

БОЛЬШОЙ СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

**УНИВЕРСАЛЬНОЕ
ПОСОБИЕ**

БОЛЬШОЙ СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

**УНИВЕРСАЛЬНОЕ
ПОСОБИЕ**

МИНСК
ХАРВЕСТ
2003

УДК 512(035)
ББК 22.1я2
Е 74

Охраняется законом об авторском праве. Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается без письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения закона будут преследоваться в судебном порядке.

Ермолицкий А. А.
Е 74 Большой справочник по элементарной математике / А. А. Ермолицкий. — Мн.: ООО «Харвест», 2003. — 880 с.
ISBN 985-13-1234-7.

Предлагаемый справочник — универсальное пособие для подготовки к вступительным экзаменам по математике в высшие учебные заведения. Теоретические разделы, включенные в книгу, охватывают программу для поступающих в вузы, а также содержат основные сведения по элементарной математике как для учащихся общеобразовательных школ, так и для обучающихся в спецклассах, гимназиях, колледжах. Каждый теоретический раздел дополнен примерами решения задач, которые располагаются по принципу «от простого к сложному».

Для школьников, абитуриентов, студентов младших курсов, а также преподавателей.

УДК 512(035)
ББК 22.1я2

1. МНОЖЕСТВА И ЧИСЛА

1.1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1.1.1. МНОЖЕСТВА

Понятие *множества* в математике вводится на основе представления о совокупностях, образованных из конечного или бесконечного числа объектов, которые по какому-либо признаку сведены в одно целое. Объекты, собранные в множество, называются *элементами* множества. Понятия «множество» и «элемент» считаются основными неопределяемыми понятиями (как, например, в геометрии понятия «точки», «прямой», «плоскости») и не могут быть определены через другие понятия. Раздел математики, в котором изучаются множества и операции над ними, называется *теорией множеств*. Ее родоначальником обычно считают немецкого математика Георга Кантора.

Множество может содержать как конечное число элементов, так и бесконечное. Более того, множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и записывается так: \emptyset .

Множества обычно обозначаются прописными буквами латинского алфавита A, B, \dots, X, Y, Z , а их элементы — малыми буквами a, b, \dots, x, y, z . Если множество A состоит из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n , то записывают: $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$. Тот факт, что элемент a входит в множество A , записывается так: $a \in A$. Если b не является элементом множества A , то пишут, что $b \notin A$. Так, например, если \mathbb{N} — множество натуральных чисел, то $7 \in \mathbb{N}$, $10^{100} \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}$, $\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$.

Порядком множества называется число его элементов; множество бесконечного порядка называется *бесконечным* (\mathbb{N} — бесконечно). Бесконечное множество называется *счетным*, если его элементы можно пронумеровать. Множества чисел \mathbb{N}, \mathbb{Z} — счетные, а множества чисел \mathbb{R}, \mathbb{C} — несчетные.

Множества обычно задаются перечислением своих элементов или *характеристическим* свойством данного множества. Так, например, запись

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < 3x - 1 < 5\}$$

означает, что множество X состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих указанному двойному неравенству.

Множество A называется *подмножеством* множества B , если любой элемент множества A принадлежит множеству B , и обозначается: $A \subset B$.

Любое множество B имеет в качестве своих подмножеств пустое множество и само множество B .

Если для множеств A и B одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B состоят из одних и тех же элементов и называются равными (запись: $A = B$).

Непустое подмножество A множества B называется *собственным*, если $A \neq B$. Запись $A \subsetneq B$ означает, что множество A не содержится в множестве B .

Для иллюстрации множеств удобно пользоваться так называемыми диаграммами Венна (крутами Эйлера), в которых элементы множеств схематически изображаются точками некоторых кругов. Так, соотношения $A \subset B$ и $A \subsetneq B$ показаны на рис. 1.1 и рис. 1.2 соответственно.

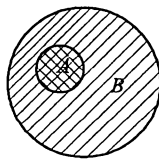


Рис. 1.1

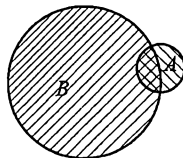


Рис. 1.2

1.1.2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Определение 1.1. Множество C всех элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B , называется *пересечением* множеств A и B и обозначается $C = A \cap B$.

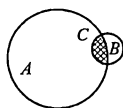


Рис. 1.3

Таким образом,

$$C = A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\};$$

соответствующую диаграмму Эйлера — Венна можно пайти на рис. 1.3.

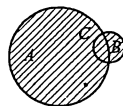


Рис. 1.4

Определение 1.2. Множество C всех элементов, принадлежащих множеству A или множеству B , называется *объединением* множеств A и B и обозначается $C = A \cup B$.

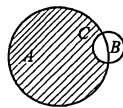


Рис. 1.5

Отсюда $C = A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$; соответствующая диаграмма Эйлера — Венна приведена на рис. 1.4.

Определение 1.3. Разностью множеств A и B называется множество C , все элементы которого принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B . Разность множеств A и B обозначают $A \setminus B$.

Значит, $C = A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$; соответствующая диаграмма Эйлера — Венна дана на рис. 1.5.

Пример 1.1. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Тогда: $A \cap B = \{3; 4; 5\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $A \setminus B = \{1; 2\}$, $B \setminus A = \{6; 7\}$.

Пример 1.2. $A = (-\infty; 1]$, $B = (-2; 3)$. Тогда: $A \cap B = (-2; 1]$, $A \cup B = (-\infty; 3)$, $A \setminus B = (-\infty; -2]$, $B \setminus A = (1; 3)$.

Пример 1.3. Пересечением двух прямых в плоскости может быть прямая, точка или пустое множество.

Пример 1.4. Пересечение множества S_1 решений уравнения $\varphi_1(x; y) = 0$ и множества S_2 решений уравнения $\varphi_2(x; y) = 0$ будет множество $S = S_1 \cap S_2$ решений системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(x; y) = 0, \\ \varphi_2(x; y) = 0. \end{cases}$$

Справедливы следующие *свойства* для операций над множествами:

1) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A \setminus A = \emptyset$;

2) коммутативность:

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A \text{ (но } A \setminus B \neq B \setminus A);$$

3) ассоциативность:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

4) дистрибутивность:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

5) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \setminus \emptyset = A$.

1.2. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

1.2.1. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Множество вместе с заданным порядком расположения его элементов называется *упорядоченным множеством*.

Одно и то же множество можно упорядочить различными способами, получая разные упорядоченные множества.

Упорядоченные (конечные или счетные) множества обычно записывают, помещая их элементы в данном порядке в круглых скобках. Так, например, из множества $\{a, b, c\}$ можно получить следующие упорядоченные множества: $(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(b; a; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$, $(c; b; a)$.

1.2.2. ПЕРЕСТАНОВКИ

Рассмотрим конечное множество A , состоящее из n различных элементов:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}. \quad (1.1)$$

Определение 1.4. Всевозможные конечные упорядоченные множества, содержащие n различных элементов, которые можно получить из множества A , называются *перестановками из элементов множества A* .

Например, все перестановки из элементов множества $\{a, b, c\}$ приведены в 1.1.1.

Естественно поставить вопрос о том, сколько различных перестановок можно получить из элементов множества (1.1).

Оказывается, что число P_n перестановок из n элементов равно произведению всех натуральных чисел от единицы до n включительно. Это произведение обозначается $n!$ (читается: *н факториал*). Таким образом,

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!, \quad 0! = 1. \quad (1.2)$$

1.2.3. РАЗМЕЩЕНИЯ

Продолжим рассмотрение множества (1.1). Выберем из элементов множества A m различных элементов и будем составлять из них различные упорядоченные множества.

Определение 1.5. Конечные упорядоченные подмножества, содержащие по m элементов, выбранных из элементов множества A , называются *размещениями из n элементов по m элементов*.

Число всевозможных размещений из n элементов по m обозначается A_n^m :

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.3)$$

Очевидно, что $A_n^1 = n$, а $A_n^n = P_n = n!$.

1.2.4. СОЧЕТАНИЯ

Каждое подмножество множества (1.1), содержащее m элементов, называется *сочетанием*, и число всех таких сочетаний из n по m обозначается C_n^m .

В табл. 1.1 приведены значения C_n^m (см. (1.4) — (1.7)) для $n \leq 10$, $m \leq n$.

Таблица 1.1

Имеет место соотношение

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m. \quad (1.4)$$

Из формул (1.2) — (1.4) следует:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n. \quad (1.5)$$

Справедливы следующие *свойства сочетаний*:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \quad (1.6)$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}; \quad (1.7)$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (1.8)$$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Формулу (1.8) можно также интерпретировать в виде следующей *теоремы*: число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n .

Эта таблица называется *треугольником Паскаля*. С помощью формулы (1.7) можно продолжить заполнение табл. 1.1.

Так, например, $C_{11}^7 = C_{10}^6 + C_{10}^7 = 210 + 120 = 330$.

1.2.5. Бином Ньютона

При любом натуральном n верна следующая формула, которая называется *биномом Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + C_n^n b^n. \quad (1.9)$$

При этом коэффициенты C_n^m , равные числу сочетаний из n элементов по m , называются *биномиальными коэффициентами*.

Используя формулу (1.9), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты в правых частях приведенных формул совпадают с числами из соответствующей строки треугольника Паскаля.

1.3. НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1.3.1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Система натуральных чисел \mathbb{N} вводится аксиоматически, как множество с выделенным в нем элементом 1 (единица), которое удовлетворяет аксиомам Пеано и на котором определены операции сложения и умножения.

Аксиома 1. Для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ существует в точности одно натуральное число $f(n) \in \mathbb{N}$, которое называется *последующим* для числа n .

Аксиома 2. $f(n) \neq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Аксиома 3. Если $f(n) = f(m)$, то $n = m$.

Аксиома 4. Принцип полной индукции. Если для подмножества $K \subset \mathbb{N}$, $1 \in K$, и для каждого $n \in K \Rightarrow f(n) \in K$, то $K = \mathbb{N}$.

Сложение и умножение натуральных чисел определяется формулами:

$$n+1 = f(n), \quad m+f(n) = f(n+m),$$

$$n \cdot 1 = n, \quad n \cdot f(m) = n \cdot m + n.$$

Множество натуральных чисел обычно обозначается так: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$.

1.3.2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел

Справедливы следующие *свойства* для операций сложения и умножения натуральных чисел:

1) коммутативность:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a+b = b+a, a \cdot b = b \cdot a;$$

2) ассоциативность:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a+b)+c = a+(b+c), (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

3) дистрибутивность:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Определение 1.6. Если для натуральных чисел a и b найдется такое число $c \in \mathbb{N}$, что $a+c = b$, то говорят, что $a < b$, а число c называется разностью натуральных чисел b и a и обозначается: $c = b-a$.

Для любых двух натуральных чисел a и b либо $a = b$, либо $a < b$, либо $b < a$.

Наименьшее натуральное число — единица, а наибольшее натуральное числа не существует.

1.3.3. Простые и составные натуральные числа

Если для данных натуральных чисел n и p найдется такое натуральное число q , что $n = p \cdot q$, то говорят, что число n делится нацело на число p . Число p называется делителем числа n , а число n — кратным числу p .

Натуральное число, единственными делителями которого являются только оно само и единица, называется *простым*

числом. Остальные натуральные числа, кроме единицы, называются *составными*. Число 1 не является ни простым числом, ни составным.

Каждое натуральное число, отличное от 1, может быть разложено на простые множители, притом единственным образом с точностью до порядка сомножителей.

Отметим, что n -степенью натурального числа k называется число $m = \underbrace{k \cdot k \cdot \dots \cdot k}_{n \text{ раз}} = k^n$.

Таким образом, каждое натуральное число $n \neq 1$ единственным образом представимо в виде своего канонического разложения, т.е. $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_l^{k_l}$,

где p_1, \dots, p_l — его простые делители, а k_1, \dots, k_l — их степени.

Для простого числа p это разложение имеет вид: $p = p$.

Множество простых чисел бесконечно. Выпишем несколько первых простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,

1.3.4. НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Приведем признаки делимости натуральных чисел.

- 1) Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2 или равна 0.
- 2) Натуральное число делится на 3 (9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (9).
- 3) Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.
- 4) Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.

5) Натуральное число делится на 7 (11, 13) тогда и только тогда, когда разность между числом, записанным последними тремя цифрами, и числом, записанным остальными цифрами данного числа (или наоборот), делится на 7 (11, 13).

6) Натуральное число делится на 4 (25) тогда и только тогда, когда его последние две цифры — нули или образуют число, которое делится на 4 (25).

7) Натуральное число делится на 8 тогда и только тогда, когда его последние три цифры — нули или образуют число, которое делится на 8.

1.3.5. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

Общим кратным нескольких натуральных чисел называется натуральное число, которое делится на каждое из этих чисел. Наименьшее из общих кратных называется *наименьшим общим кратным* (НОК).

НОК нескольких чисел находится следующим образом:

- 1) выписываются канонические разложения данных чисел;
- 2) каждый из простых множителей, входящий хотя бы в одно из канонических разложений данных чисел, возводится в наибольшую степень, с которой этот множитель встречается в канонических разложениях, а затем полученные степени перемножаются.

Полученное число и есть НОК.

Пример 1.5. Найти НОК чисел 50 000; 26 460; 4 200.

- 1) Запишем канонические разложения данных чисел:
 $50\,000 = 2^4 \cdot 5^4$; $26\,460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$; $4\,200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.
- 2) $\text{НОК} = \{50\,000, 26\,460, 4\,200\} = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2 = 66\,150\,000$.

Общим делителем нескольких натуральных чисел называется число, которое является делителем каждого из данных чисел. Наибольший из общих делителей называется *наибольшим общим делителем* (НОД).

Если НОД данных натуральных чисел равен единице, то указанные числа называются *взаимно простыми*.

НОД нескольких чисел находится следующим образом:

- 1) выписываются канонические разложения данных чисел;
- 2) любой из простых множителей, входящий в каждое из канонических разложений данных чисел, возводится в наименьшую степень, с которой этот простой множитель входит в канонические разложения данных чисел, а затем полученные степени перемножаются.

Полученное число и есть НОД.

Пример 1.6. Найти НОД чисел 50 000, 26 460, 4 200.

- 1) Выпишем канонические разложения этих чисел:
 $50\,000 = 2^4 \cdot 5^4$; $26\,460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$; $4\,200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.
- 2) $\text{НОД} = \{50\,000, 26\,460, 4\,200\} = 2^2 \cdot 5 = 20$.

Отметим, что наибольший общий делитель двух чисел делится на любой общий делитель этих чисел.

Наибольший общий делитель (a, b) чисел a и b и их наименьшее общее кратное $\{a, b\}$ в произведении дают $a \cdot b$, т.е. $a \cdot b = (a, b) \cdot \{a, b\}$.

1.3.6. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Множество целых чисел \mathbb{Z} получается из множества натуральных чисел \mathbb{N} путем добавления новых объектов (чисел) — числа нуль и отрицательных целых.

По определению 0 — это такое число, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ $0 + n = n$.

По определению число $(-n)$ — это такое число, что $n + (-n) = 0$. Число $(-n)$ называется противоположным числу n . Для числа n противоположное число единственно и $-(-n) = n$. Натуральные числа в множестве \mathbb{Z} называются *положительными целыми числами*, а им противоположные — *отрицательными*. Для положительных чисел n считают, что $n > 0$, а для отрицательных — $n < 0$.

Абсолютной величиной (модулем) целого числа n называется число, которое обозначается $|n|$ и вычисляется по следующей формуле:

$$n = \begin{cases} n, & \text{если } n > 0, \\ 0, & \text{если } n = 0, \\ -n, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Суммой двух целых чисел n и m называется целое число s , которое находится следующим образом:

- 1) $n > 0, m > 0, s = n + m$;
- 2) $n < 0, m < 0, s = -(|n| + |m|)$;
- 3) $n > 0, m < 0, |n| > |m|, s = |n| - |m|$;
- 4) $n > 0, m < 0, |n| < |m|, s = -(|m| - |n|)$;
- 5) $n > 0, m < 0, |n| = |m|, s = 0$;
- 6) $n < 0, m > 0, |n| > |m|, s = -(|n| - |m|)$;
- 7) $n < 0, m > 0, |n| < |m|, s = |m| - |n|$;
- 8) $n < 0, m > 0, |n| = |m|, s = 0$;
- 9) $n = 0, s = m$;
- 10) $m = 0, s = n$.

Произведением двух целых чисел n и m называется целое число p , которое находится следующим образом:

- 1) $n > 0, m > 0, p = n \cdot m$;
- 2) $n < 0, m < 0, p = |n| \cdot |m|$;
- 3) $n < 0, m > 0$ или $n > 0, m < 0, p = -(|n| \cdot |m|)$;
- 4) $n = 0$ или $m = 0, p = 0$.

Таким образом, вычисление суммы или произведения двух целых чисел основывается на вычислении суммы или произведения двух натуральных чисел.

Операции сложения и умножения двух целых чисел имеют те же свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, которыми обладают соответствующие операции в множестве натуральных чисел.

Разностью двух целых чисел n и m называется целое число k :

$$k = n + (-m) = n - m.$$

Говорят, что $n > m$ тогда и только тогда, когда $k = n - m > 0$.

Для любых двух целых чисел n и m выполняется одна и только одна из следующих возможностей:

$$\text{или } n > m, \text{ или } n < m, \text{ или } n = m.$$

Для любых двух целых чисел n и m существует единственное разложение

$$n = mq + r, \quad 0 \leq r < |m|. \quad (1.10)$$

Разложение (1.10) называется делением n на m с остатком r . Если $r = 0$, то говорят, что n делится на m ($n : m$), а число q называется частным.

Используя (1.10), можно доказать, что среди k последовательных целых чисел одно всегда делится на k , в частности четные (делящиеся на 2) и нечетные (вида $2k + 1, k \in \mathbb{Z}$) числа чередуются.

1.3.7. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

На аксиоме натуральных чисел (аксиома 4) основывается так называемый *метод математической индукции*:

Теорема.

Пусть $A(n)$ — некоторое утверждение, имеющее смысл для натуральных чисел n , верное для $n = 1$. Если из истинности этого утверждения для $n = k$ следует истинность утвержде-

ния для $n = k + 1$, то утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального n .

Доказательство.

Рассмотрим подмножество $K \subset \mathbb{N}, K = \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ истинно}\}$. По условию $1 \in K$, и для каждого $n \in K \Rightarrow f(n) \in K$. Тогда по аксиоме 4 $K = \mathbb{N}$, и теорема доказана. QED.

1.4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

1.4.1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Рациональной дробью называется выражение вида $\frac{a}{b}$, где

$a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными тогда и только тогда, когда $ad = bc$ (т.е. равенство рациональных дробей сводится к равенству целых чисел, которое известно).

Рациональным числом называется множество всех равных между собой рациональных дробей.

Таким образом, $\frac{3}{5}, \frac{-6}{-10}, \frac{9}{15}$ — это различные записи одного и того же рационального числа.

Число a называется *числителем*, а b — *знаменателем* рациональной дроби $\frac{a}{b}$. Так как $abn = ban$, то $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}, bn \neq 0$.

Переход от дроби $\frac{an}{bn}$ к дроби $\frac{a}{b}$ называется *сокращением числителя и знаменателя на общий множитель n* .

Рациональную дробь, у которой числитель и знаменатель взаимно простые числа, называют *несократимой рациональной дробью*.

В множестве равных между собой рациональных дробей, отличных от нуля, существует одна и только одна несократимая дробь $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$. Таким образом, мож-

но дать другое определение (отличное от нуля) рационального числа: *рациональное число* — это дробь вида $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}, (|m|, n) = 1$.

1.4.2. ОПЕРАЦИИ НАД РАЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Сложение и умножение рациональных чисел можно определить по-разному. Однако если потребовать, чтобы числа $\frac{a}{1}$ «вели себя» в точности, как целые числа, а также чтобы имели место коммутативность и ассоциативность действий и дистрибутивность умножения относительно сложения, то сложение и умножение рациональных чисел можно определить только следующим образом:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad (1.11)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \quad (1.12)$$

Используя формулы (1.11) и (1.12), определяют вычитание и деление рациональных чисел:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}; \quad (1.13)$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, cd \neq 0. \quad (1.14)$$

Можно проверить, что если дроби, стоящие в левых частях равенств (1.11) — (1.14), заменить на равные им, то рациональные числа, которые получаются в результате в правых частях этих равенств, не меняются.

Из формул (1.11), (1.13) следует, что числитель суммы (разности) дробей с одинаковыми знаменателями равен сумме

(разности) числителей этих дробей, а знаменатель — их общему знаменателю, т.е. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.

Пользуясь этим, на практике сложение и вычитание дробей производят следующим образом: сначала дроби приводят к общему знаменателю, умножая числитель и знаменатель каждой дроби на одно и то же для данной дроби число, а затем выполняют сложение (вычитание), как указывалось ранее.

Наименьшим из возможных общих знаменателей является наименьшее общее кратное данных знаменателей.

Рациональное число $\frac{a}{b}$ положительно, если a и b — натуральные числа. Говорят, что рациональное число $\frac{a}{b}$ больше рационального числа $\frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$), если разность $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ есть положительное рациональное число.

Для любых двух рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ либо $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, либо $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, либо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Множество рациональных чисел с операциями $+$, $-$, $:$ и отношением $>$ обычно обозначается \mathbb{Q} .

1.4.3. Действительные числа

Наиболее распространенный способ записи чисел — запись чисел в *десятичной системе счисления*. В десятичной системе счисления используется следующая форма записи:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad (1.15)$$

где $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ и называются *цифрами*. Каждое натуральное число $n \in \mathbb{N}$ может быть единственным образом записано в виде (1.15).

Аналогично *десятичная дробь* — это выражение вида

$$n, n_1 n_2 \dots n_k \dots = n + \frac{n_1}{10^1} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} + \dots, \quad (1.16)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n, n_1 \dots n_k \dots$ — это цифры. Заметим, что

$$-n, n_1 n_2 \dots n_k \dots = -n - \frac{n_1}{10^1} - \frac{n_2}{10^2} - \dots - \frac{n_k}{10^k} - \dots \quad (1.17)$$

Десятичная дробь $n, n_1, n_2 \dots n_k \dots$ называется *конечной*, если $n_k \neq 0$, а $n_l = 0$ при $l > k$, и *периодической*, если найдутся такие натуральные числа r и q , что $n_{k+r} = n_k$ при всех $k > q$ (см. (1.16), (1.17)). Периодическая дробь обычно записывается в виде

$$n, n_1 n_2 \dots n_q \overbrace{(n_{q+1} n_{q+2} \dots n_{q+p})}$$

где $n_{q+1} n_{q+2} \dots n_{q+p}$ называется *периодом* дроби.

Бесконечные десятичные дроби, период которых состоит не только из одной цифры 9, называются *допустимыми десятичными дробями*.

Определение 1.7. Действительным числом называется любая бесконечная допустимая десятичная дробь.

Множество рациональных чисел \mathbb{Q} может быть отождествлено с множеством всех периодических допустимых десятичных дробей.

Иррациональным числом называется действительное число, запись которого выражается непериодической десятичной дробью.

Сложение, вычитание и умножение конечных десятичных дробей производят точно так же, как сложение, вычитание и умножение целых чисел, используя затем правило плавающей запятой.

Операции над бесконечными десятичными дробями определяются через соответствующие операции над конечными десятичными дробями.

Отметим, что имеет место коммутативность и ассоциативность сложения и умножения и дистрибутивность умножения относительно сложения.

Множество всех действительных чисел с операциями сложения, вычитания, умножения, деления обозначается \mathbb{R} .

1.4.4. Числовая прямая. Числовые промежутки

Рассмотрим прямую линию с выбранными на ней точками O и E (E лежит справа от O). Длину отрезка OE примем за единицу, а направление, определяемое направленным отрезком \overrightarrow{OE} , — за положительное направление (рис. 1.6). Существует взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел \mathbb{R} и множеством точек указанной прямой (*числовой прямой*), при котором числу 0 соответствует точка O , а числу 1 — точка E .



Рис. 1.6

Таким образом, каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой (*координатной оси*), и обратно, каждой точке на оси соответствует единственное действительное число. Точка O разбивает прямую на две полуоси: полупрямая, содержащая точку E , называется *положительной полуосью* и состоит из положительных

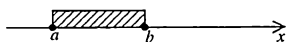
($a > 0$) чисел (точек), а полупрямая, которая состоит из точек (чисел), находящихся левее точки O , называется *отрицательной полуосью* и содержит все отрицательные ($a < 0$) числа.

Далее, для $a, b \in \mathbb{R}$ говорят, что $a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$ (точка a находится правее точки b на числовой прямой).

Для любых действительных чисел a, b возможно одно, и только одно из следующих условий: или $a > b$, или $b > a$, или $a = b$.

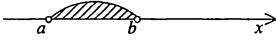
Рассмотрим следующие числовые подмножества множества действительных чисел \mathbb{R} , которые называются *числовыми промежутками*:

1) отрезок $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;



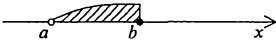
2) *интервал*

$$(a; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\};$$

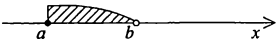


3) *полуинтервалы:*

$$(a; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\},$$

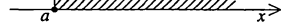


$$[a; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\};$$



4) *лучи:*

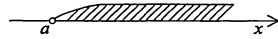
$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\},$$



$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\},$$



$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\},$$



$$(-\infty; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}.$$



1.4.5. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Пусть числа $a, b, c \in \mathbf{R}$. Как уже было отмечено, $a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b$ есть число положительное. Рассмотрим основные свойства неравенств:

1) Если $a > b$, то $b < a$.

Доказательство.

$$a > b \Leftrightarrow (a - b) > 0 \Leftrightarrow -(a - b) < 0 \Leftrightarrow b - a < 0 \Leftrightarrow b < a. \quad \text{QED.}$$

2) Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Доказательство.

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) > 0 \Leftrightarrow a + c > b + c. \quad \text{QED.}$$

3) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Доказательство:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0, b > c \Leftrightarrow b - c > 0 \Rightarrow (a - b) + (b - c) > 0 \Leftrightarrow a - c > 0 \Leftrightarrow a > c. \quad \text{QED.}$$

4) Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Доказательство.

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \text{ и } c > 0 \Rightarrow (a - b) \cdot c > 0 \Leftrightarrow ac - bc > 0 \Leftrightarrow ac > bc. \quad \text{QED.}$$

5) Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

Доказательство.

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \text{ и } c < 0 \Rightarrow (a - b) \cdot c < 0 \Leftrightarrow ac - bc < 0 \Leftrightarrow ac < bc. \quad \text{QED.}$$

6) Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доказательство.

$$\begin{cases} a > b, \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b > 0, \\ c - d > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - b) + (c - d) > 0 \Leftrightarrow a - b + c - d > 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + d) > 0 \Leftrightarrow a + c > b + d. \quad \text{QED.}$$

7) Если a, b, c, d — положительные числа и $a > b, c > d$, то $ac > bd$.

Доказательство.

$$\begin{cases} a > b, \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b > 0, \\ c - d > 0 \end{cases} \Rightarrow a(c - d) + d(a - b) > 0 \Leftrightarrow ac - ad + da - bd > 0 \Leftrightarrow ac - bd > 0 \Leftrightarrow ac > bd. \quad \text{QED.}$$

8) Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

Доказательство.

$$\begin{cases} a > b, \\ c < d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b > 0, \\ d - c > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - b) + (d - c) > 0 \Leftrightarrow (a - c) - (b - d) > 0 \Leftrightarrow a - c > b - d. \quad \text{QED.}$$

9) Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доказательство.

$$\begin{cases} a > b, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b > 0, \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a - b}{ab} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}. \quad \text{QED.}$$

Все перечисленные свойства могут быть также записаны для знаков неравенств $<, \geq, \leq$.

1.4.6. Модуль действительного числа и его геометрический смысл

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется неотрицательное число, которое обозначается $|a|$ и определяется по формуле

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Геометрически $|a|$ — это расстояние от точки, соответствующей числу a на числовой прямой, до точки O ; $|a - b|$ — расстояние между точками (числами) a и b на числовой прямой.

Модуль действительного числа обладает следующими свойствами:

- 1) $|a| \geq 0$;
- 2) $|-a| = |a|$;
- 3) $|a| \geq a$;
- 4) $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- 5) $|a - b| \geq |a| - |b|$;
- 6) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- 7) $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot b \neq 0$;
- 8) $|a|^2 = a^2$.

1.5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Одна из причин, приводящих к необходимости расширения множества действительных чисел, связана с решением квадратных уравнений. Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Определение 1.8. Комплексным числом z называется выражение вида

$$a + bi, \quad (1.19)$$

где a и b — действительные числа, а символ i , определяемый условием $i^2 = -1$, называется *мнимой единицей*.

Число a называется *действительной частью* комплексного числа ($a = \operatorname{Re} z$), b — *мнимой частью* ($b = \operatorname{Im} z$).

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются

равными тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$

Множество комплексных чисел обозначается буквой \mathbb{C} . Отметим, что множество всех действительных чисел \mathbb{R} содержится в \mathbb{C} как множество всех чисел вида $a + 0i = a$.

Комплексное число $0 + 0i$ называется нулем (запись: 0) и совпадает с нулем множества действительных чисел.

Комплексное число вида $0 + bi$ называется *чисто мнимым* и записывается bi .

Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *комплексно-сопряженными*.

1.5.2. Действия над комплексными числами

Действия над комплексными числами определяются таким образом, чтобы для действительных чисел эти операции совпадали с известными операциями над последними (*принцип перманентности*).

Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i, \quad a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$$

Последнее равенство получают путем умножения числителя

и знаменателя дроби $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ на $a_2 - b_2 i$.

Отметим, что имеют место коммутативность и ассоциативность сложения и умножения комплексных чисел, а также дистрибутивность умножения относительно сложения.

По определению для $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ раз}}$$

В частности, $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$.

Для комплексно-сопряженных чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ выполняются следующие равенства:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2, \quad (\bar{\bar{z}}) = z,$$

а для пар z_1, \bar{z}_1 и z_2, \bar{z}_2 имеем:

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}, \quad \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \overline{z_1 - z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)}.$$

Неотрицательное действительное число $\sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается $|z|$.

Имеют место следующие свойства:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||;$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{при } z_2 \neq 0 \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};$$

$$|z^n| = |z|^n = |\bar{z}|^n.$$

1.5.3. КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Комплексное число $z = a + bi$ геометрически можно представить точкой координатной плоскости Ox с координатами a, b (рис. 1.7). Таким образом, между множеством комплексных чисел \mathbb{C} и множеством точек координатной плоскости (*комплексной плоскости*) существует взаимно однозначное соответствие. При этом соответствию каждому действительному числу $a + 0i$ соответствует точка $A(a; 0)$ оси Ox , а любому чисто мнимому числу $0 + bi$ — точка $B(0; b)$ оси Oy , минимальной единице i — точка $(0; 1)$. Для всякой точки M комплексной плоскости можно рассмотреть ее радиус-вектор \overrightarrow{OM} (рис. 1.8), т.е. возникает взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством радиус-векторов.

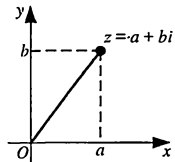


Рис. 1.7

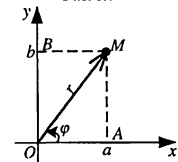


Рис. 1.8

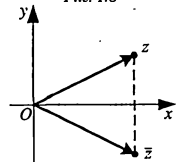


Рис. 1.9

Из определения комплексно-сопряженных чисел очевидно, что числа z и \bar{z} симметричны друг другу на комплексной плоскости относительно действительной оси Ox (рис. 1.9) (Ось Ox называется действительной, а ось Oy — мнимой.)

Геометрическая интерпретация суммы и разности двух комплексных чисел — это сложение и вычитание соответствующих радиус-векторов (рис. 1.10, 1.11).

Пусть комплексному числу $z = a + bi \neq 0$ соответствует радиус-вектор \overrightarrow{OM} (см. рис. 1.8). Обозначим $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

φ — угол, образуемый \overrightarrow{OM} и положительным направлением оси Ox (рад). Тогда очевидно, что

$$\sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

и комплексное число z можно записать в виде

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Запись комплексного числа в виде (1.19) называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа. При этом угол φ определяется с точностью до периода $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, и называется *аргументом* комплексного числа z ($\text{Arg } z$):

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \arg z \in (-\pi; \pi],$$

где $\arg z$ — *главное значение* аргумента.

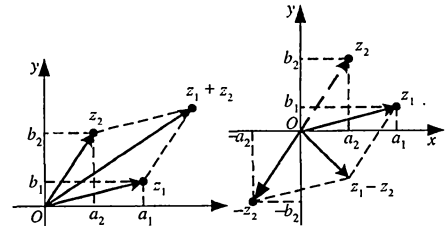


Рис. 1.10

Рис. 1.11

1.5.4. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАПИСАННЫМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим два отличных от нуля комплексных числа z_1, z_2 :

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Произведение этих комплексных чисел находится по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Частное двух комплексных чисел z_1, z_2 находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Геометрически вектор, изображающий произведение (частное) чисел z_1 и z_2 , получается поворотом вектора z_1 против (по) часовой стрелки на угол, равный φ_2 , и растяжением (сжатием) его в $|z_2|$ раз в случае $|z_2| > 1$ (рис. 1.12, 1.13).

Возведение комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ в натуральную степень n производится по формуле Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), z \neq 0.$$

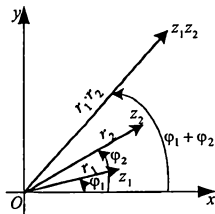


Рис. 1.12

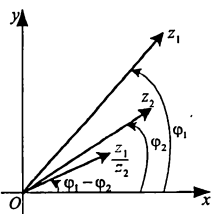


Рис. 1.13

Корнем n -й степени из комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

называется такое комплексное число W , для которого $W^n = z$. Это число обозначается $W = \sqrt[n]{z}$. В множестве комплексных чисел \mathbb{C} существует ровно n корней n -й степени из данного ненулевого комплексного числа n , и эти корни находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$; $\sqrt[n]{r}$ — арифметический корень из положительного числа r .

Геометрически всем корням n -й степени из комплексного числа z соответствуют точки комплексной плоскости, лежащие на окружности с центром в начале координат, радиус которой равен $\sqrt[n]{r}$, а центральные углы, образованные радиус-векторами, проведенными в соседние точки, равны $\frac{\varphi}{n}$.

Комплексное число z можно представить также в виде

$$z = r e^{i\varphi},$$

где $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Так как $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, то

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далее, $e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$.

В заключение отметим, что для комплексных чисел в отличие от действительных не существует понятий «больше», «меньше», так как точки комплексной плоскости нельзя упорядочить.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ТЕМЫ: МНОЖЕСТВА. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. БИНОМ НЬЮТОНА

1.001. Указать все подмножества множества, состоящего из трех элементов $\{a, b, c\}$.

Ответ: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

1.002. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{a_3, a_4, a_5\}$. Найти $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$.

Ответ: $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, A \cap B = \{a_3, a_4\}, A \setminus B = \{a_1, a_2\}$.

1.003. Доказать, что для любых множеств A, B, C

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Решение.

Пусть элемент $x \in (A \cup B) \cap C$, т. е.

входит в C и, кроме того, по крайней мере, в одно из множеств A или B . Но тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$, т. е. $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Обратно, если $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, то $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$, следовательно, $x \in C$ и, кроме того, x входит в A или B , т. е. $x \in A \cup B$. Таким образом, $x \in (A \cup B) \cap C$.

Так как любой элемент x левой части входит в правую и наоборот, то эти множества совпадают.

QED.

1.004. Доказать, что для любых множеств A, B, C

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Решение.

Аналогично решению 1.003.

1) $x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow x \in C$ или $x \in A \cap B$, т. е. $x \in A$ и $x \in B$. Таким образом, обязательно $x \in C \cup A$ и $x \in C \cup B$, т. е. $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

2) $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$, следовательно, $x \in C$ или x входит и в A и в B ($x \in A \cap B$). Но тогда $x \in (A \cap B) \cup C$. Получили, что левая часть входит в правую и наоборот, т. е. эти множества совпадают.

QED.

1.005. Пусть для любых множеств A, B

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Доказать, что

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Решение.

Для любого $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ возможны только два варианта:

1) $x \in A$ и $x \notin B$; 2) $x \in B$ и $x \notin A$. Но это означает, что $x \in A \cup B$ и $x \notin A \cap B$, т. е. $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Обратно, если $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, то возможны варианты:

1) $x \in A$ и $x \notin B$, т. е. $x \in A \setminus B$; 2) $x \in B$ и $x \notin A$, т. е. $x \in B \setminus A$. Таким образом, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Левая часть входит в правую и наоборот, следовательно, они совпадают.

QED.

На координатной плоскости заштриховывать пересечение и объединение множеств точек, координаты которых являются решениями указанных неравенств (границу, принадлежащую найденному множеству, изображать сплошной линией, а не принадлежащую множеству — пунктирной) (1.006—1.011).

1.006. $x + y \geq 0, y - x \leq 0$.

Решение.

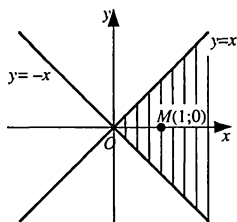


Рис. 1.14

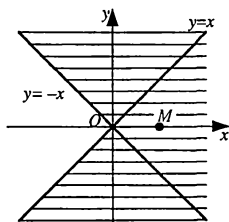


Рис. 1.15

Прямая $y = -x$ разбивает координатную плоскость на две полуплоскости, координаты точек одной из которых являются решениями неравенства $x + y \geq 0$. Для выбора этой полуплоскости достаточно проверить одну точку.

Аналогично, прямая $y = x$ разбивает координатную плоскость на две полуплоскости, координаты точек одной из них являются решениями неравенства $y - x \leq 0$. Для выбора нужной полуплоскости достаточно проверить одну точку M . Отметим, что так как неравенства нестрогие, то границы входят. Построим $\alpha \cap \beta$ (рис. 1.14) и $\alpha \cup \beta$ (рис. 1.15).

Для точки $M(1; 0)$ $1 + 0 > 0, 0 - 1 < 0$.

1.007. $x^2 + y^2 < 4, x + y \geq 0$.

Решение.

Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x + y \geq 0$, рассматривалось в 1.006. Неравенству $x^2 + y^2 < 4$ удовлетворяют координаты внутренних точек круга радиусом 2 с центром в начале координат и только они. Если X — первое множество, а Y — второе, то $X \cap Y$ изображено на рис. 1.16, а $X \cup Y$ — на рис. 1.17.

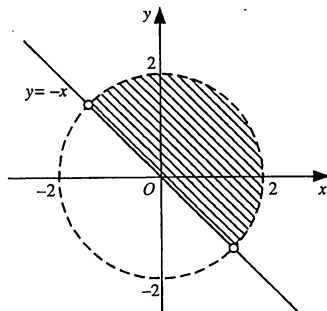


Рис. 1.16

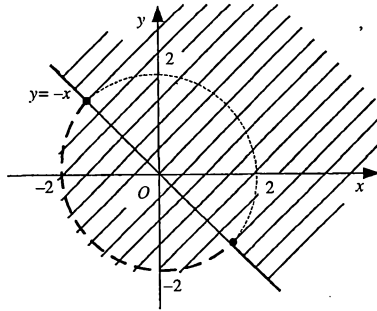


Рис. 1.17

1.008. $y \geq x^2$, $y \geq x$.

Решение.

Пусть X , Y — множества точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют первому и второму неравенствам соответственно. $X \cap Y$ изображено на рис 1.18, а $X \cup Y$ — на рис. 1.19.

1.009. $y > \log_2 x$, $x + y \geq 1$.

Решение.

Пусть X , Y — множества точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют первому и второму неравенствам соответственно. $X \cap Y$ изображено на рис 1.20, а $X \cup Y$ — на рис. 1.21.

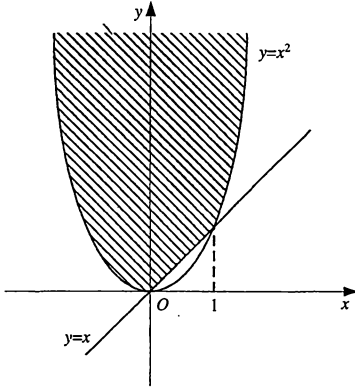


Рис. 1.18

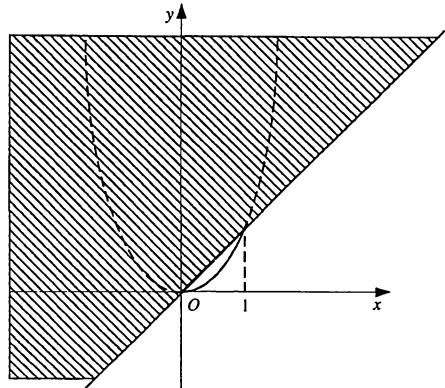


Рис. 1.19

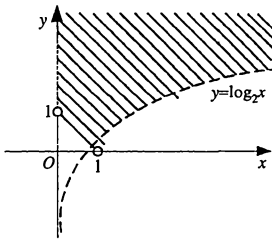


Рис. 1.20

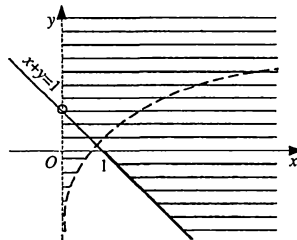


Рис. 1.21

1.010. $y > \sin x$, $y \leq 1$.

Решение.

Пусть X , Y — множества точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют первому и второму неравенствам соответственно. $X \cap Y$ изображено на рис 1.22, а $X \cup Y$ — на рис. 1.23.

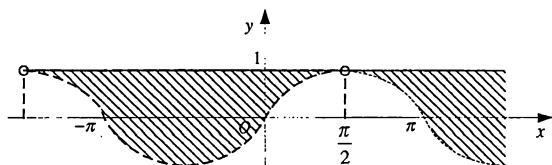


Рис. 1.22

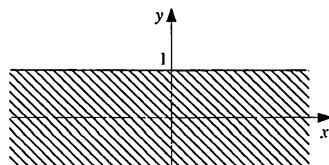


Рис. 1.23

1.011. $|x| + |y| \leq 2, y \geq 0$.

Решение.

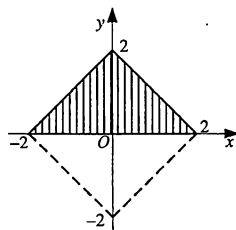


Рис. 1.24*

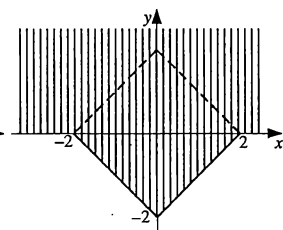


Рис. 1.25

Пусть X, Y — множества точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют первому и второму неравенствам соответственно. Тогда $X \cap Y$ изображено на рис. 1.24, а $X \cup Y$ — на рис. 1.25.

1.012. Найти наибольшее значение линейной функции $z = 3x + y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x + y \geq 2, \\ y - x \geq 0, \\ y \leq 4, \\ x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение.

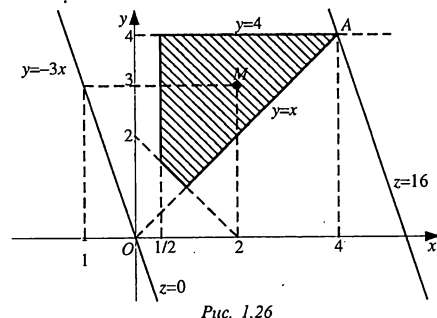


Рис. 1.26

Построим область (многоугольник) решений системы ограничений (рис. 1.26).

Для этого на координатной плоскости строим прямые $x + y = 2, y - x = 0, y = 4, x = \frac{1}{2}$. Подставляя координаты какой-либо точки плоскости в левую часть каждого из неравенств системы ограничений, находим, какие полуплоскости эти неравенства определяют. Пересечение полученных полуплоскостей и есть искомый многоугольник.

Рассмотрим множество прямых $y = -3x + z$ (z считаем параметром), параллельных прямой $y = -3x$ ($z = 0$). В этом множестве требуется найти прямую, которая, пересекаясь с многоугольником системы ограничений, даст наибольшее значение

параметра z . Ясно, что это будет прямая, проходящая через вершину $A(4; 4)$ многоугольника. Подставляя в уравнение $y = -3x + z$ координаты точки A , будем иметь:

$$4 = -3 \cdot 4 + z \Rightarrow z_{\max} = 16.$$

Отметим, что это наибольшее значение достигается в единственной точке A многоугольника, т. е. задача имеет единственное решение: $x = 4, y = 4$.

Ответ: 16.

1.013. Найти наименьшее и наибольшее значения линейной функции $z = -x + y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ y - x \leq 1, \\ 3x + y \leq 9, \\ x - 2y \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

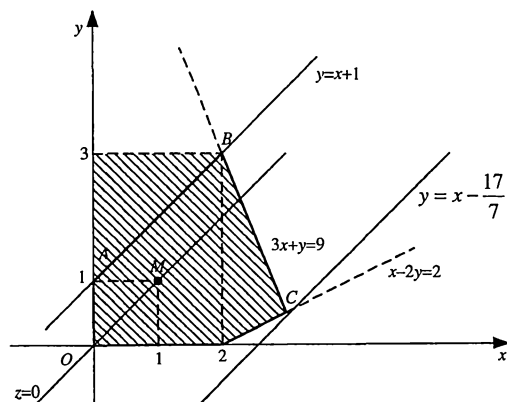


Рис. 1.27

Строим многоугольник решений системы ограничений (рис. 1.27). Для этого на координатной плоскости строим прямые $x = 0$, $y = 0$, $y - x = 1$, $3x + y = 9$, $x - 2y = 2$. Подставляя координаты какой-либо точки M плоскости в левую часть каждого из неравенств системы ограничений, находим, какие полуплоскости эти неравенства определяют. Пересечение полученных полуплоскостей и есть искомый многоугольник.

Рассмотрим множество прямых $y = x + z$ (z считаем параметром), параллельных прямой $y = x$ ($z = 0$). В этом множестве требуется найти прямые, которые, пересекаясь с многоугольником системы ограничений, дают наибольшее и наименьшее значения параметра z . В первом случае это будет прямая AB : $y = x + 1$, т. е. $z_{\max} = 1$. Это значение достигается в любой точке отрезка AB , задача имеет множество решений. Во втором случае это будет прямая, проходящая через точку C . Координаты точки C находим из системы

$$\begin{cases} 3x + y = 9, \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 18, \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow 7x = 20, x = \frac{20}{7}, y = 9 - \frac{60}{7} = \frac{3}{7}.$$

Подставляя координаты точки C в уравнение $y = x + z$, получаем

$$\frac{3}{7} = \frac{20}{7} + z \Rightarrow z_{\min} = -\frac{17}{7}.$$

Это значение достигается в единственной точке C многоугольника, т. е. задача имеет единственное решение.

Ответ: $z_{\max} = 1, z_{\min} = -\frac{17}{7}$.

1.014. Найти наименьшее значение линейной функции $z = -x - y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x - 2y \leq 2, \\ 6x + 2y \geq 6. \end{cases}$$

Решение.

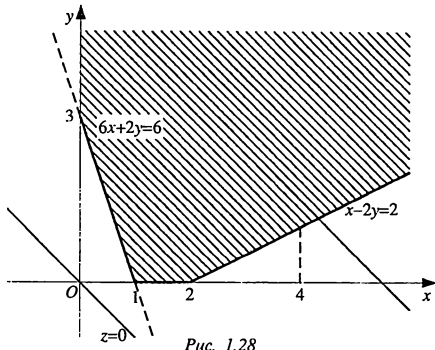


Рис. 1.28

Строим многоугольник решений системы ограничений (рис. 1.28). Для этого на координатной плоскости строим прямые $x = 0$, $y = 0$, $x - 2y = 2$, $6x + 2y = 6$. Подставляя координаты какой-либо точки M плоскости в левую часть каждого из неравенств системы ограничений, находим, какие полуплоскости эти неравенства определяют. Пересечение полученных полуплоскостей и есть искомый многоугольник.

Рассмотрим множество прямых $y = -x - z = -x + t$ ($t = -z$ считаем параметром), параллельных прямой $y = -x$ ($t = 0$). В этом множестве требуется найти прямую, которая, пересекаясь с многоугольником ограничений, дает наименьшее значение параметра z , т. е. наибольшее значение параметра t . Так как многоугольник решений представляет собой неограниченную область, то такой прямой не существует (см. рис. 1.28). Таким образом, задача решений не имеет.

Ответ: нет решений.

1.015. Показать, что два конечных множества имеют одинаковый порядок тогда и только тогда, когда между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Решение.

Пусть $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n\}$ и $B = \{b_1; b_2; b_3; \dots; b_n\}$ — два конечных множества одинакового порядка. Между ними можно установить взаимно однозначное соответствие $\varphi: A \rightarrow B$, например по формуле $b_i = \varphi(a_i)$ (взаимная однозначность очевидна).

Обратно, предположим, что существует взаимно однозначное соответствие φ между элементами множества $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n\}$ и некоторого множества B , $\varphi: A \rightarrow B$. Занумеруем элементы множества B по правилу: $b_1 = \varphi(a_1)$, $b_2 = \varphi(a_2)$, ..., $b_n = \varphi(a_n)$. Так как каждому элементу множества A соответствует посредством φ один и только один элемент множества B , то получаем, что в множестве B также n элементов, A и B — одинакового порядка.

QED.

1.016. Показать, что множество целых чисел \mathbb{Z} счетно.

Решение.

Установим взаимно однозначное соответствие (нумерацию) между всеми натуральными и целыми числами по следующей схеме:

1	2	3	4	5	...
0	-1	1	-2	2	...

Таким образом, всякому нечетному числу $2n + 1$ ставится в соответствие неотрицательное число $n \geq 0$, а всякому четному числу $2n$ — отрицательное число $-n$.

QED.

где точки x , y соответствуют друг другу, если они лежат на одном и том же луче, выходящем из точки O . Используя 1.018, получаем, что множество действительных чисел, принадлежащих любому отрезку, несчетно.

QED.

1.020. Показать, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех чисел интервала $(0; 1)$ и множеством всех действительных чисел \mathbb{R} .

Решение.

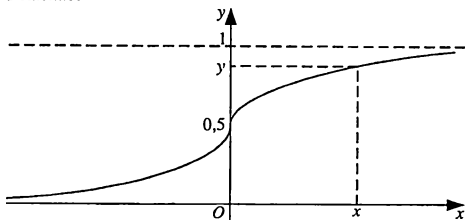


Рис. 1.30

Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{\pi \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}}$. Ее график приведен на рис. 1.30. $y' = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. Следовательно, эта функция монотонно возрастающая. Она устанавливает взаимно однозначное соответствие между областью определения $D(y) = \mathbb{R}$ и множеством значений $E(y) = (0; 1)$.

QED.

1.021. Пусть в множестве A — n элементов. Доказать, что число k -элементных подмножеств множества A ($0 \leq k \leq n$) равно числу $(n - k)$ -элементных подмножеств множества A .

Решение.

Пусть X — произвольное подмножество множества A , состоящее из k элементов, тогда $A \setminus X$ будет подмножеством множества, имеющего $(n - k)$ элементов. Ясно, что это соответствие взаимно однозначное:

$$X = Y \Leftrightarrow A \setminus X = A \setminus Y.$$

Таким образом, количество подмножеств X совпадает с количеством подмножеств вида $A \setminus X$.

QED.

1.022. Пусть A — конечное множество, $a \in A$. Каких подмножеств множества A больше: содержащих или не содержащих элемент a ?

Решение.

Пусть X — произвольное множество, не содержащее элемент a , тогда $Y = X \cup \{a\}$ — подмножество, содержащее элемент a . Получили взаимно однозначное соответствие между подмножествами, в которые входит элемент a , и подмножествами, в которые a не входит. Таким образом, количество подмножеств типа X совпадает с количеством подмножеств типа Y .

Ответ: одинаково.

1.023. Доказать, что среди любых одиннадцати натуральных чисел найдутся два числа, разность которых делится на 10.

Решение.

Принцип ящиков. При любом распределении $n + 1$ или более предметов по n ящикам в каком-нибудь ящике окажется не менее двух предметов.

Рассмотрим десять ящиков 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Натуральное число будет считаться помещенным в ящик, соответствующий последней цифре этого числа. По принципу ящиков, среди одиннадцати натуральных чисел по крайней мере два числа попадут в один ящик, т. е. их разность будет делиться на 10.

QED.

1.024. Некоторые точки плоскости соединены отрезками (точек — конечное число). Доказать, что существуют две точки, из которых выходит одинаковое количество отрезков.

Решение.

Пусть n — количество точек, тогда наименьшее количество отрезков, выходящих из любой точки этого множества, равняется 0, а наибольшее — $n - 1$. Рассмотрим n ящиков $0, 1, 2, \dots, n - 1$. Точка будет считаться помещенной в ящик, соответствующий числу выходящих из этой точки отрезков. При этом первый или последний ящик должен быть пустым. Действительно, если существует точка A_{n-1} , попадающая в последний ящик, то $(n - 1)$ различных отрезков должны соединять ее с $(n - 1)$ оставшимися точками, в частности с точкой A_0 из первого ящика. Но из точки A_0 не выходит ни одного отрезка. Полученное противоречие показывает, что первый ящик пуст.

Таким образом, n точек распределяются по $(n - 1)$ ящику, следовательно, по принципу ящиков (см. 1.023), по крайней мере две точки попадут в один ящик.

QED.

1.025. В алфавите 20 согласных и 10 гласных букв. Сколько можно составить различных слогов из двух букв, первая из которых согласная, а вторая — гласная?

Решение.

Правило произведения. Пусть рассматриваются последовательности длины k : (x_1, x_2, \dots, x_k) , составленные из некоторых элементов x_i (не обязательно различных) некоторого фиксированного множества X . Такие последовательности назовем строками. Две строки считаются равными, если элементы, стоящие на одинаковых местах, равны. Предположим, что элемент x_i может быть выбран n_i способами; при каждом выборе x_1 , элемент x_2 может быть выбран n_2 способами; при каждом выборе x_1, x_2, x_3 — n_3 способами; ...; при каждом выборе x_1, x_2, \dots, x_{k-1} , x_k — n_k способами. Тогда число различных строк (x_1, x_2, \dots, x_k) равно

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

По условию выбор согласной можно осуществить 20 способами, а выбор гласной 10 способами. По правилу произведения всего можно составить $20 \cdot 10 = 200$ слогов.

Ответ: 200.

1.026. Номер автомашины имеет две буквы латинского алфавита (всего 26 букв) и пяти цифр. Сколько всего можно составить различных таких номеров?

Решение.

Каждый такой номер представляет собой последовательность $\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, где каждый из элементов $x_i, i = 1, 2$, может быть выбран 26 способами, а каждый из элементов $y_j, j = 1, \dots, 5$, может быть выбран 10 способами. По правилу произведения (см. 1.025) число всех таких различных строк будет равняться $26^2 \cdot 10^5$.

Ответ: $26^2 \cdot 10^5$.

1.027. Сколько различных натуральных делителей имеет число $2^7 \cdot 3^{10} \cdot 7^{15} \cdot 11^{97}$?

Решение.

Произвольный делитель d данного числа имеет вид $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 7^{x_3} \cdot 11^{x_4}$, где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \leq x_1 \leq 7, 0 \leq x_2 \leq 10, 0 \leq x_3 \leq 15, 0 \leq x_4 \leq 97$. Таким образом, требуется найти число всевозможных строк вида $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, где элемент x_1 может быть выбран 8 способами, элемент x_2 — 11 способами, x_3 — 16 способами, x_4 — 10 способами. По правилу произведения (см. 1.025) число всех таких различных строк будет равняться $8 \cdot 11 \cdot 16 \cdot 10 = 14\,080$.

Ответ: 14 080.

1.028. Сколько есть шестизначных чисел, в каждом из которых нет одинаковых чисел, а вторая и четвертая цифры — нечетные.

Решение.

Вторая цифра любого такого шестизначного числа может быть выбрана 5 способами, четвертая — 4 способами (она не должна совпадать со второй), первая — 7 способами (не совпадает с 0, второй и четвертой цифрами), третья — 7 способами (не совпадает с первой, второй, четвертой цифрами), пятая — 6 способами (не совпадает с первыми четырьмя цифрами), шестая — 5 способами (не совпадает с первыми пятью цифрами). По правилу произведения (см. 1.025) число всех таких чисел будет равняться $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 29\,400$.

Ответ: 29 400.

1.029. Доказать, что число всевозможных размещений из n элементов по m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Решение.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ — упорядоченный набор элементов (размещение) некоторого множества X , содержащего n элементов. Тогда элемент x_1 может быть выбран n способами; при каждом выборе x_1 элемент x_2 может быть выбран $(n-1)$ способами (x_2 не может совпадать с x_1);; при каждом выборе x_1, x_2, \dots, x_{m-1} элемент x_m может быть выбран $(n-(m-1))$ способами (x_m не может совпадать с x_1, x_2, \dots, x_{m-1}). По правилу произведения (см. 1.025) число всевозможных размещений из n элементов по m будет равно

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(m-1)) = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-(m-1)) \cdot (n-m) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-m) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

QED.

1.030. Доказать, что число всевозможных сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Решение.

Отметим сначала, что число всевозможных перестановок множества, содержащего k элементов, $P_k = A_k^k = \frac{k!}{0!} = k!$

Пусть $Y \subset X$, X содержит n элементов, а подмножество Y — m элементов. Составив всевозможные перестановки из элементов Y , получаем $m!$ различных строк длиной m . Если такую операцию проделать с каждым подмножеством Y , содержащим m элементов, то получаем всего $C_n^m \cdot m!$ различных строк длиной m . Очевидно, что таким образом должны получаться все строки длиной m без повторений, т. е. все размещения из n элементов по m , а их A_n^m . Отсюда имеем:

$$A_n^m = C_n^m \cdot m! \Rightarrow C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (\text{см. 1.029}).$$

QED.

Доказать тождества (1.031 – 1.040):

$$1.031. C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Решение.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, C_n^{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} C_n^m + C_n^{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \frac{n!}{m!(n-m-1)!(n-m)} + \frac{n!}{m!(m+1)(n-m-1)!} = \frac{n!(m+1+n-m)}{m!(m+1)(n-m-1)!(n-m)} = \\ &= \frac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!} = C_{n+1}^{m+1}. \end{aligned}$$

QED.

$$1.032. C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Решение.

По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k,$$

где \sum — знак суммы. Подставляя в эту формулу значение $x = 1$, получаем

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n.$$

QED.

$$1.033. C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0.$$

Решение.

По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

Подставляя в эту формулу значение $x = -1$, получаем $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$.

QED.

1.034. $C_n^m + 3C_n^{m-1} + 3C_n^{m-2} + C_n^{m-3} = C_{n+3}^m$.

Решение.

$$\begin{aligned} C_n^m + 3C_n^{m-1} + 3C_n^{m-2} + C_n^{m-3} &= C_n^m + C_n^{m-1} + 2C_n^{m-1} + 2C_n^{m-2} + C_n^{m-2} + C_n^{m-3} = (C_n^{m-1} + C_n^m) + \\ &+ 2(C_n^{m-2} + C_n^{m-1}) + (C_n^{m-3} + C_n^{m-2}) = (C_n^{m-1} + C_n^{(m-1)+1}) + 2(C_n^{m-2} + C_n^{(m-2)+1}) + \\ &+ (C_n^{m-3} + C_n^{(m-3)+1}) = (\text{по формуле 1.7}) = C_{n+1}^m + 2C_{n+1}^{m-1} + C_{n+1}^{m-2} = (C_{n+1}^{m-2} + C_{n+1}^{(m-2)+1}) + \\ &+ (C_{n+1}^{m-1} + C_{n+1}^{(m-1)+1}) = C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} = (\text{по формуле 1.7}) = C_{n+2}^{m-1} + C_{n+2}^{(m-1)+1} = C_{n+3}^m. \end{aligned}$$

QED.

1.035. $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

Решение.

Беря производную от левой и правой частей формулы бинома $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, получаем

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot kx^{k-1}.$$

Подставляя в полученную формулу значение $x = 1$, имеем:

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n.$$

QED.

1.036. $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} kC_n^k = 0$.

Решение.

Используем формулу $n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot kx^{k-1}$ (см. 1.035). Подставив в эту формулу значение $x = -1$, получаем

$$0 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} kC_n^k.$$

QED.

1.037. $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Решение.

Беря интеграл от 0 до x от левой и правой частей формулы бинома Ньютона $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^x (x+1)^n dx &= \int_0^x (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x = C_n^0 x \Big|_0^x + C_n^1 \frac{x^2}{2} \Big|_0^x + C_n^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + \dots + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + \dots + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} x^{k+1}. \end{aligned}$$

Подставляя в полученную формулу значение $x = 1$, имеем:

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}.$$

QED.

$$1.038. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Решение.

Используем формулу $\frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} x^{k+1}$. Подставив в эту формулу значение $x = -1$, получаем

$$-\frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} (-1)^{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} (-1)^{k+2} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1}.$$

QED.

$$1.039. A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m.$$

Решение.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, A_n^{m-1} = \frac{n!}{(n-m+1)!}, A_{n+1}^m = \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!}.$$

Далее, имеем:

$$A_n^m + mA_n^{m-1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!} - \frac{m \cdot n!}{(n+1-m)!} = \frac{n!(n+1-n!m)}{(n+1-m)!} = \frac{n!(n+1-m)}{(n-m)!(n-m+1)} = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^m.$$

QED.

$$1.040. C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m.$$

Решение.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, C_{n-k}^{m-k} = \frac{(n-k)!}{(n-m)!(n-k-n+m)!} = \frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!}, C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}, C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Таким образом, тождество принимает вид

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{m!} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_m^k \cdot C_n^m.$$

QED.

Решить уравнения (1.041 – 1.046).

$$1.041. 3 \cdot C_{2x}^{x+1} = 2 \cdot C_{2x+1}^{x-1}, x \in \mathbb{N}.$$

Решение.

$$3C_{2x}^{x+1} = 3 \frac{(2x)!}{(x+1)!(2x-x-1)!} = \frac{3(2x)!}{(x+1)!(x-1)!};$$

$$2C_{2x+1}^{x-1} = \frac{2(2x+1)!}{(x-1)!(2x+1-x+1)!} = \frac{2(2x)!(2x+1)}{(x-1)!(x+2)!};$$

$$\frac{3(2x)!}{(x+1)!(x-1)!} = \frac{2(2x)!(2x+1)}{(x-1)!(x+1)!(x+2)} \Leftrightarrow 3 = \frac{2(2x+1)}{x+2} \Leftrightarrow 3x+6 = 4x+2, x=4.$$

Ответ: 4.

1.042. $A_x^5 = 252 \cdot C_{x-2}^{x-5}, x \in \mathbb{N}$.

Решение.

По формуле (1.4) имеем:

$$A_x^5 = \frac{x!}{(x-5)!} = \frac{(x-5)!(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x}{(x-5)!} = (x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x.$$

Далее, $C_{x-2}^{x-5} = C_{x-2}^{x-2-x+5} = C_{x-2}^3$,

$$C_{x-2}^3 = \frac{(x-2)!}{3!(x-2-3)!} = \frac{(x-5)!(x-4)(x-3)(x-2)}{6(x-5)!} = \frac{1}{6}(x-4)(x-3)(x-2).$$

Тогда уравнение принимает вид

$$(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x = \frac{252}{6}(x-4)(x-3)(x-2) \Leftrightarrow (x-1)x = 42 = 6 \cdot 7, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 7. \text{ Других корней быть не может, так как левая часть уравнения монотонно возрастает при } x \in \mathbb{N} (y' = (x^2 - x)' = 2x - 1 > 0, x \in \mathbb{N}).$$

Ответ: 7.

1.043. $A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y} = 30 \cdot P_{x-1}, x \in \mathbb{N}, y \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Решение.

Так как $A_{x+1}^{y+1} = \frac{P_{x+1}}{P_{x+1-y-1}} = \frac{P_{x+1}}{P_{x-y}}$, то исходное уравнение принимает вид

$$\frac{P_{x+1}}{P_{x-y}} \cdot P_{x-y} = 30 P_{x-1} \Leftrightarrow \frac{P_{x+1}}{P_{x-1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (x-1)} = 30 \Leftrightarrow x(x+1) = 5 \cdot 6. \text{ Очевидно, что только натуральное число}$$

$x = 5$ удовлетворяет этому уравнению. Учитывая, что $x - y > 0$, получаем $y = 0, 1, 2, 3, 4$.

Ответ: $x = 5; y = 0, 1, 2, 3, 4$.

1.044. $P_{x+3} = 120 \cdot A_x^5 \cdot P_{x-5}, x \in \mathbb{N}$.

Решение.

Так как $A_x^5 = \frac{P_x}{P_{x-5}}$, то исходное уравнение принимает вид

$$P_{x+3} = 120 \cdot \frac{P_x}{P_{x-5}} \cdot P_{x-5} \Leftrightarrow P_{x+3} = 120 P_x \Leftrightarrow 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x(x+1)(x+2)(x+3) = 120 \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3) = 4 \cdot 5 \cdot 6.$$

Очевидно, что только натуральное число $x = 3$ удовлетворяет этому уравнению.

Ответ: $x = 3$.

$$1.045. C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + C_x^{x-4} + C_x^{x-5} = 31.$$

Решение.

По формуле (1.6) перепишем исходное уравнение в виде

$$C_x^{x-x+1} + C_x^{x-x+2} + C_x^{x-x+3} + C_x^{x-x+4} + C_x^{x-x+5} = 31 \Leftrightarrow 1 + C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 + C_x^4 + C_x^5 = 32 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 + C_x^4 + C_x^5 = 2^5.$$

Используя № 1.032, имеем:

$$C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 + C_x^4 + C_x^5 = 2^x, \text{ отсюда } 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: $x = 5$.

$$1.046. A_{x+3}^2 - C_{x+2}^3 = 20, x \in \mathbb{N}.$$

Решение.

Используя формулы (1.3), (1.5), получаем

$$\frac{(x+3)!}{(x+1)!} - \frac{(x+2)!}{6(x+2-3)!} = 20 \Leftrightarrow (x+2)(x+3) - \frac{(x+2)!}{6(x-1)!} = 20 \Leftrightarrow 6(x+2)(x+3) - x(x+1)(x+2) = 20 \cdot 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x + 18 - x^2 - x = \frac{120}{x+2} \Leftrightarrow 18 + 5x - x^2 = \frac{120}{x+2}.$$

Решим неравенство $18 + 5x - x^2 > 0, x \in \mathbb{N}$. $D = 25 + 4 \cdot 18 = 97, x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}$. Таким образом $0 < x < \frac{5 + \sqrt{97}}{2}$. Далее,

$$\frac{120}{x+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow x \neq 5, x \neq 7 \text{ и возможные значения } x: 1, 2, 3, 4, 6. \text{ Подставляя полученные числа в уравнение } \\ 18 + 5x - x^2 = \frac{120}{x+2}, \text{ непосредственной проверкой убеждаемся, что } x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

1.047. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 6, \\ P_{x+1} = 720, \end{cases} x, y \in \mathbb{N}.$$

Решение.

$$A_y^x = \frac{y!}{(y-x)!}, \quad P_{x-1} = (x-1)!, \quad P_{x+1} = (x+1)!, \quad C_y^{y-x} = C_y^x = \frac{y!}{x!(y-x)!}.$$

Тогда исходная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{y!}{(y-x)!(x-1)!} + \frac{y!}{(y-x)!x!} = 6, \Leftrightarrow \left\{ \frac{y!}{(y-x)!} \left(\frac{1}{(x-1)!} + \frac{1}{x!} \right) = 6, \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ \frac{y!}{(y-5)!} \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \right) = 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(y-5)!(y-4)(y-3)(y-2)(y-1)y}{(y-5)!} \cdot \frac{5+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \Leftrightarrow (y-4)(y-3)(y-1)y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5. \end{cases} \right. \end{aligned}$$

Очевидно, что только натуральное число $y = 5$ удовлетворяет этому уравнению.

Ответ: (5; 5).

1.048. Найти x и y , если

$$C_x^{y-1} : (C_{x-2}^{y-2} + C_{x-2}^{y-1} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y+1} = 3 : 5 : 5, \quad x, y \in \mathbb{N}.$$

Решение.

Преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\begin{aligned} C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1} &= \frac{(x-2)!}{y!(x-y-2)!} + \frac{(x-2)!}{(y-2)!(x-y)!} + \frac{2(x-2)!}{(y-1)!(x-y-1)!} = \\ &= \frac{(x-2)!((x-y-1)(x-y) + (y-1)y + 2y(x-y))}{y!(x-y)!} = \frac{(x-2)!}{y!(x-y)!} (x^2 - xy - x - xy + y^2 + y + y^2 - y + 2xy - 2y^2) = \\ &= \frac{(x-2)!}{y!(x-y)!} (x^2 - x) = \frac{(x-2)!(x-1)x}{y!(x-y)!} = \frac{x!}{y!(x-y)!} = C_x^y. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_x^{y-1} : C_x^y = 3 : 5, \\ C_x^y : C_x^{y+1} = 5 : 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \cdot \frac{y!(x-y)!}{x!} = \frac{3}{5}, \\ \frac{x!}{y!(x-y)!} \cdot \frac{(y+1)!(x-y-1)!}{x!} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x-y+1} = \frac{3}{5}, \\ \frac{y+1}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 3x - 3y + 3, \\ y + 1 = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 3(2y+1) + 3, \\ x = 2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 6, \\ x = 2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (7; 3).

1.049. Найти x и y , если

$$(A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10 : 2 : 1.$$

Решение.

$$A_{x-1}^y = \frac{(x-1)!}{(x-1-y)!}, A_{x-1}^{y-1} = \frac{(x-1)!}{(x-1-y+1)!} = \frac{(x-1)!}{(x-y)!}, A_x^{y-1} = \frac{x!}{(x-y+1)!}, C_x^{y-1} = \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{(x-1)!}{(x-y-1)!} + \frac{y(x-1)!}{(x-y)!} = 5 \cdot \frac{x!}{(x-y+1)!}, \\ \frac{x!}{(x-y+1)!} = 2 \cdot \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)!}{(x-y-1)!} + \frac{y(x-1)!}{(x-y-1)!(x-y)} = \frac{5(x-1)!x}{(x-y-1)!(x-y)(x-y+1)}, \\ \frac{1}{(x-y+1)!} = \frac{2}{(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{y}{x-y} = \frac{5x}{(x-y)(x-y+1)}, \\ (y-1)! = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{3}{x-3} = \frac{5x}{(x-3)(x-2)}, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-2) + 3(x-2) = 5x, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 5, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: (7; 3).

1.050. Решить неравенство:

$$C_n^6 < C_n^4, n \in \mathbb{N}, n \geq 6.$$

Решение.

$$C_n^6 < C_n^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{6!(n-6)!} < \frac{n!}{4!(n-4)!} \Leftrightarrow 4!(n-4)! < 6!(n-6)! \Leftrightarrow (n-6)!(n-5)(n-4) < 5 \cdot 6(n-6)! \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-5)(n-4) < 5 \cdot 6.$$

Левая часть неравенства — монотонно возрастающая функция на множестве \mathbb{N} . Равенство достигается при $n = 10$, следовательно, $6 \leq n \leq 9, n \in \mathbb{N}$, т. е. $n = 6, 7, 8, 9$.

Ответ: $n = 6, 7, 8, 9$.

1.051. Решить неравенство:

$$C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leq 100, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Решение.

$$C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leq 100 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!3!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} \leq 100 \Leftrightarrow \frac{(n-1)n(n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \leq 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n(n+1) - 3n(n+1) \leq 600 \Leftrightarrow n(n+1)(n-4) \leq 600.$$

Очевидно, что при $n > 4$ левая часть неравенства — монотонно возрастающая функция на множестве \mathbb{N} , $n = 2, 3, 4$ — удовлетворяют неравенству.

Если $n = 10$, то $10 \cdot 11 \cdot 6 = 660 > 600$, а если $n = 9$, то $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450 < 600$. Таким образом, решениями неравенства будут значения $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Ответ: $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

1.052. Доказать, что $C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^k \leq (C_{2n}^n)^2$.

Решение.

Так как $-k^2 \leq 0$, $m^2 - k^2 \leq m^2$, то $(m-k)(m+k) \leq m^2$. (1)

Пусть m принимает значения $2n$; $2n-1$; $2n-2$; ...; $2n-l+1$, где n — натуральное число, $l = 0, 1, 2, \dots, n$. Неравенство (1) принимает вид

$$\begin{aligned}(2n+k)(2n-k) &\leq (2n)^2, \\(2n-1+k)(2n-1-k) &\leq (2n-1)^2, \\(2n-2+k)(2n-2-k) &\leq (2n-2)^2, \\&\dots \\(2n-l+1+k)(2n-l+1-k) &\leq (2n-l+1)^2.\end{aligned}\quad (2)$$

Перемножая почленно левые и правые части неравенств (2), получаем

$$(2n+k)(2n-k)(2n-1+k)(2n-1-k)(2n-2+k)(2n-2-k)(2n-3+k)(2n-3-k) \dots (2n-l+1+k)(2n-l+1-k) \leq (2n)^2(2n-1)^2(2n-2)^2(2n-3)^2 \dots (2n-l+1)^2 \Leftrightarrow (2n+k)(2n-1+k)(2n-2+k)(2n-3+k) \dots (2n-l+1+k)(2n-k)(2n-1-k)(2n-2-k)(2n-3-k) \dots (2n-l+1-k)(2n-k)(2n-1-k)(2n-2-k)(2n-3-k) \dots (2n-l+1-k) \leq (2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots (2n-l+1))^2. \quad (3)$$

Домножая обе части неравенства (3) на $\left(\frac{1}{n!}\right)^2$, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{(2n+k)(2n-1+k)(2n-2+k)(2n-3+k) \dots (2n-l+1+k)}{n!} \cdot \frac{(2n-k)(2n-1-k)(2n-2-k)(2n-3-k) \dots (2n-l+1-k)}{n!} \leq \\&\leq \left(\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots (2n-l+1)}{n!} \right)^2.\end{aligned}\quad (4)$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{(2n+k)(2n-1+k)(2n-2+k)(2n-3+k) \dots (2n-l+1+k)}{n!} &= C_{2n+k}^n, \\ \frac{(2n-k)(2n-1-k)(2n-2-k)(2n-3-k) \dots (2n-l+1-k)}{n!} &= C_{2n-k}^n, \\ \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots (2n-l+1)}{n!} &= C_{2n}^n.\end{aligned}\quad (5)$$

С учетом (5) неравенство (4) принимает вид

$$C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n \leq (C_{2n}^n)^2. \quad \text{QED.}$$

1.053. Доказать, что при натуральном n

$$C_n^1 x(1-x)^{n-1} + 2C_n^2 x^2(1-x)^{n-2} + \dots + kC_n^k x^k(1-x)^{n-k} + \dots + nC_n^n x^n = nx.$$

Решение.

Преобразуем общий член левой части неравенства:

$$kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = nx \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} = nx C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)}.$$

Таким образом, левая часть тождества принимает вид:

$$nx [C_{n-1}^0 (1-x)^{n-1} + C_{n-1}^1 x(1-x)^{n-2} + \dots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}] = (\text{по формуле бинома Ньютона}) = nx [x + (1-x)]^{n-1} = nx.$$

QED.

1.054. Найти наибольший коэффициент разложения $(x+y)^n$, если сумма всех коэффициентов равна 256.

Решение.

Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n , где n — показатель бинома. Далее, по условию $2^n = 256 = 2^8$, т. е. $(x+y)^n = (x+y)^8$.

Так как показатель бинома 8 — четное число, то наибольшим биномиальным коэффициентом будет коэффициент при среднем члене разложения, т. е. коэффициент при четвертом члене:

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 70.$$

Ответ: 70.

1.055. Найти третий член разложения $(a^2 + a^{-\frac{2}{3}})^n$, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2048.

Решение.

Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n , где n — показатель бинома. Далее, по условию $2^n = 2048 = 2^{11}$,

$$\text{т. е. } (a^2 + a^{-\frac{2}{3}})^n = (a^2 + a^{-\frac{2}{3}})^{11}.$$

$$\text{Третий член разложения } T_3 = C_{11}^3 (a^2)^8 (a^{-\frac{2}{3}})^3 = \frac{11!}{3!8!} a^{16} \cdot a^{-2} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3} a^{14} = 165a^{14}.$$

Ответ: $165a^{14}$.

1.056. Найти степень n бинома $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)^n$, если отношение четвертого слагаемого разложения к третьему $\frac{T_4}{T_3} = 8\sqrt{2}$.

Решение.

$$\text{Так как } T_4 = C_n^3 \cdot 3^3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-3}, T_3 = C_n^2 \cdot 3^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}, \text{ то}$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{C_n^3 \cdot 3^3 \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-3}}{C_n^2 \cdot 3^2 \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-2}} = \frac{3C_n^3}{C_n^2} \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n-3)-(n-2)} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{2!(n-2)!}{n!} = \sqrt{2} \frac{(n-2)!}{(n-3)!} = \sqrt{2} \frac{(n-3)!(n-2)}{(n-3)!} = \sqrt{2}(n-2) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow n-2=8, n=10.$$

Ответ: $n=10$.

1.057. При каком значении a третий член разложения бинома $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{a}{2}}\right]^5$ равен десятому члену разложения бинома $\left[\frac{9}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{a-1}{9}}\right]^{10}$?

Решение.

Третий член разложения первого бинома равен:

$$C_5^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^a = \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} = 10 \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}.$$

Десятый член разложения второго бинома равен:

$$C_{10}^9 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{a-1} = 10 \left(\frac{3}{2}\right)^{a+1}.$$

По условию имеем:

$$10 \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} = 10 \left(\frac{3}{2}\right)^{a+1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-a-1} \Rightarrow a+2 = -a-1 \Leftrightarrow 2a = -3, a = -\frac{3}{2}.$$

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$.

1.058. Найти слагаемое в разложении $\left(1 + x + \frac{6}{x}\right)^{10}$, не содержащее x .

Решение.

Пусть $y = x + \frac{6}{x}$, тогда по формуле бинома имеем

$$\left(1 + x + \frac{6}{x}\right)^{10} = (1 + y)^{10} = 1 + C_{10}^1 y + C_{10}^2 y^2 + \dots + C_{10}^{10} y^{10},$$

где

$$y^n = \left(x + \frac{6}{x}\right)^n = x^n + C_n^1 x^{n-2} \cdot 6 + \dots + C_n^k x^{n-2k} \cdot 6^k + \dots + \frac{6^k}{x^k}. \quad (1)$$

Любое слагаемое разложения (1), не содержащее x , должно удовлетворять условию $n - 2k = 0$, т. е. иметь вид $C_{2k}^k 6^k$.

Собирая все такие члены первоначального разложения, получим, что искомое слагаемое этого разложения, не содержащее x , равно

$$1 + C_{10}^2 C_2^1 \cdot 6 + C_{10}^4 C_4^2 \cdot 6^2 + C_{10}^6 C_6^3 \cdot 6^3 + C_{10}^8 C_8^4 \cdot 6^4 + C_{10}^{10} C_{10}^5 \cdot 6^5.$$

1.059. Найти наибольшее слагаемое разложения $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20}$.

Решение.

По условию имеем $T_{m+1} > T_m$ и $T_{m+1} > T_{m+2}$, следовательно,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} C_{20}^m (\sqrt{5})^{20-m} (\sqrt{2})^m > C_{20}^{m-1} (\sqrt{5})^{20-m+1} (\sqrt{2})^{m-1}, \\ C_{20}^m (\sqrt{5})^{20-m} (\sqrt{2})^m > C_{20}^{m+1} (\sqrt{5})^{20-m-1} (\sqrt{2})^{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20!}{m!(20-m)!} \frac{(\sqrt{5})^{20}}{(\sqrt{5})^m} (\sqrt{2})^m > \frac{20!}{(m-1)!(20-m+1)!} \frac{(\sqrt{5})^{21}}{(\sqrt{5})^m} \frac{(\sqrt{2})^m}{\sqrt{2}}, \\ \frac{20!}{m!(20-m)!} \frac{(\sqrt{5})^{20}}{(\sqrt{5})^m} (\sqrt{2})^m > \frac{20!}{(m+1)!(20-m-1)!} \frac{(\sqrt{5})^{19}}{(\sqrt{5})^m} \sqrt{2} (\sqrt{2})^m \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{20\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} < m < \frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \Leftrightarrow 7,1 < m < 8,1 \Rightarrow m = 8. \end{aligned}$$

Тогда

$$T_{m+1} = T_9 = C_{20}^8 (\sqrt{5})^{12} (\sqrt{2})^8 = \frac{20!}{8!2!} (\sqrt{5})^{12} (\sqrt{2})^8 = 314\,925 \cdot 10^5.$$

Ответ: $314\,925 \cdot 10^5$.

1.060. Сколько можно составить телефонных номеров, состоящих из 7 цифр:

а) всего; б) так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были различны?

Решение.

а) используя правило произведения (см. 1.025), получаем, что всего семизначных номеров можно составить $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7$;

б) каждый такой номер представляет собой размещение из 10 элементов по 7. Число всех таких размещений

$$A_{10}^7 = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Ответ: а) 10^7 ; б) 720.

1.061. На лавке сидят 5 человек. Сколькими способами можно их рассадить, чтобы при этом 1-й и 2-й человек не оказались рядом?

Решение.

Всего число способов, которыми можно разместить 5 человек на лавке, совпадает с $P_5 = 5!$. Число способов, при которых 1-й и 2-й человек оказываются рядом, равно $2 \cdot 4!$ (считая пары (1; 2), (2; 1) за один элемент). Тогда искомое количество способов, при которых 1-й и 2-й человек не оказываются рядом, равно $5! - 2 \cdot 4! = (5 - 2) \cdot 4! = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 72$.

Ответ: 72.

1.062. В группе 6 мужчин и 4 женщины. Наугад отобрано 5 человек так, что среди них 3 женщины. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

3 женщины из 4 можно отобрать $C_4^3 = C_4^1 = 4$ способами, а 2 мужчин из 6 можно отобрать $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ способами. Таким образом, всего групп из 5 человек указанного вида можно составить $C_4^3 \cdot C_6^2 = 4 \cdot 15 = 60$ способами.

Ответ: 60.

1.063. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых трех мест, а цифра 1 — одно из последних четырех мест?

Решение.

Построение произвольной перестановки можно разбить на три этапа: 1) выбор места для 0 — три варианта; 2) выбор места для 1 — четыре варианта; 3) выбор перестановки оставшихся цифр — $8!$ способов. По правилу произведения (см. 1.025) искомое число равно $3 \cdot 4 \cdot 8!$.

Ответ: $3 \cdot 4 \cdot 8!$.

1.064. Двенадцать шаров разложены в три урны по 4 шара в каждой. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Из 12 шаров можно выбрать 4 шара в первую урну C_{12}^4 способами. Из 8 шаров, которые остались, во вторую урну можно положить четыре шара C_8^4 способами. Четыре оставшихся шара можно положить в третью урну одним способом. Таким образом, число всех вариантов будет

$$C_{12}^4 \cdot C_8^4 = \frac{12!}{4!8!} \cdot \frac{8!}{4!4!} = \frac{12!}{(4!)^3}.$$

Ответ: $\frac{12!}{(4!)^3}$.

1.065. Сколько есть пятизначных чисел, в десятичной записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Решение.

По правилу произведения (см. 1.025) число всех пятизначных чисел равно $9 \cdot 10^4$, а число всех пятизначных чисел, в десятичной записи которых все цифры нечетные, — 5^5 . Таким образом, число пятизначных чисел, в десятичной записи которых есть хотя бы одна четная цифра, равно $9 \cdot 10^4 - 5^5$.

Ответ: $9 \cdot 10^4 - 5^5$.

1.066. Сколькими способами можно разделить колоду из 24 карт пополам так, чтобы в первой и во второй половине было бы по два короля?

Решение.

Каждый выбор первой половины состоит из извлечения 2 королей из 4, что можно сделать C_4^2 способами, а также из выбора 10 некоролей из 20, что можно сделать C_{20}^{10} способами. Таким образом, первую половину можно выбрать $C_4^2 \cdot C_{20}^{10}$ способами. Оставшиеся двенадцать карт попадают во вторую половину.

Ответ: $C_4^2 \cdot C_{20}^{10}$.

1.067. Сколькими способами можно распределить по трем аудиториям 12 студентов?

Решение.

Для каждого студента имеется три возможности попасть в любую аудиторию, следовательно, всего имеется 3^{12} способов.

Ответ: 3^{12} .

1.068. Лифт, в котором 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры выходят группами в два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

Решение.

Количество способов распределения пассажиров по указанным группам будет

$$C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{9!}{2!7!} \cdot \frac{7!}{3!4!} = \frac{9!}{2!3!4!}.$$

Каждая из трех групп может выйти на одном из десяти этажей. Это можно сделать $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!}$ способами. Следовательно,

это может произойти $\frac{10!}{7!} \cdot \frac{9!}{2!3!4!} = \frac{10! \cdot 7! \cdot 8 \cdot 9}{7! \cdot 8 \cdot (2 \cdot 3)^2} = \frac{10!}{4}$ способами.

Ответ: $\frac{10!}{4}$.

1.069. Сколько можно сделать из n элементов перестановок, в которых два элемента a и b не стоят рядом?

Решение.

Из общего числа $n!$ перестановок вычтем те, в которых элементы a и b стоят рядом. Имеется две возможности — $(a; b)$, $(b; a)$ поставить эти элементы рядом. Оставшиеся элементы можно переставлять $(n-2)!$ способами. Присоединить пару $(a; b)$ или $(b; a)$ к оставшимся элементам можно $2(n-1)$ способами (пара считается как один элемент), следовательно, число перестановок, в которых a и b стоят рядом, равно $2(n-1)(n-2)! = 2(n-1)!$, а искомое число

$$n! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2).$$

Ответ: $(n-1)!(n-2)$.

1.070. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если в обозначении каждого числа каждая из данных цифр входит не более одного раза?

Решение.

Учитывая, что цифра 0 не может занимать первый разряд, из данных цифр получаем:

пятизначных чисел — $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4 \cdot 4!$;

четырёхзначных чисел — $A_5^3 - A_4^3 = 5! - 4! = 4 \cdot 4!$;

трехзначных чисел — $A_5^3 - A_4^3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$;

двузначных чисел — $A_5^2 - A_4^2 = 4 \cdot 5 - 5 = 15$;

однозначных чисел — 5 (0, 1, 2, 3, 4).

Всего различных натуральных чисел будет $4 \cdot 4! + 4 \cdot 4! + 3 \cdot 4^2 + 15 + 5 = 260$.

Ответ: 260.

1.071. В лотерее разыгрывается 8 предметов. Первый подошедший к урне вынимает из нее 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы: 1) ровно два из них оказались выигрышными; 2) по крайней мере два из них оказались выигрышными, если в урне всего 50 билетов?

Решение.

1) Если из 5 выпутых билетов ровно два выигрышных, то остальные три — невыигрышные. Из 8 выигрышных два можно выбрать C_8^2 способами, а из $50 - 8 = 42$ невыигрышных три можно выбрать C_{42}^3 способами. По правилу произведения (см. 1.025) общее число способов будет

$$C_8^2 \cdot C_{42}^3 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 326\,240.$$

2) Число способов выбора пяти билетов, при которых по крайней мере два будут выигрышными, равно сумме числа способов, при которых будет ровно два выигрышных, ровно три, ровно четыре, ровно пять, т. е. получаем

$$C_8^2 C_{42}^3 + C_8^3 C_{42}^2 + C_8^4 C_{42}^1 + C_8^5 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{42 \cdot 41}{1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{42}{1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} =$$

$$= 326\,240 + 48\,216 + 2940 + 56 = 377\,452.$$

Ответ: 1) 326 240; 2) 377 452.

1.072. Сколько существует треугольников с вершинами в вершинах данного выпуклого многоугольника, не имеющих с ним общих сторон?

Решение.

Всего треугольников с вершинами в вершинах n -угольника будет C_n^3 . При этом получаем:

1) $n(n-4)$ треугольников будут иметь точно одну общую сторону со сторонами этого n -угольника;

2) n треугольников будут иметь точно две общие стороны.

Окончательно, имеем:

$$C_n^3 - n(n-3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-3) = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

Ответ: $\frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$

1.073. n параллельных прямых плоскости пересекаются множеством m параллельных прямых. Сколько параллелограммов получается при этом в образовавшейся сетке?

Решение.

Каждый параллелограмм определяется выбором двух прямых первого множества (C_n^2 способов) и двух прямых второго множества (C_m^2 способов). Всего параллелограммов получается

$$C_n^2 \cdot C_m^2 = \frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$$

Ответ: $\frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$

1.074. На окружности отмечены 10 точек. Сколько можно провести незамкнутых несамопересекающихся ломаных с вершинами во всех этих точках?

Решение.

Возьмем одну из точек в качестве начала ломаной, тогда первое звено можно провести двумя способами, второе также двумя (следующая выбираемая вершина будет одной из двух соседних с построенным звеном), и так далее до построения восьмого звена включительно, которое соединит последнюю вершину построенной ломаной с одной из двух оставшихся точек. Чтобы построить девятое звено, имеется только одна возможность (нет выбора). Таким образом, строится 2^8 ломаных, один из двух концов которых находится во взятой точке. Так как любая из 10 точек может быть начальной,

следовательно, $10 \cdot 2^8$ — удвоенное количество ломаных (каждая ломаная подсчитывается дважды, если поменять местами начало и конец движения по ней). Окончательно, общее число ломаных — $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^8 = 5 \cdot 2^8$.

Ответ: $5 \cdot 2^8$.

1.075. Грани куба $ABCD, B_1C_1D_1$ раскрашиваются шестью красками, причем никакие две грани не раскрашиваются одной краской. Сколько можно получить различных раскрасок куба?

Решение.

Запишем краски; тогда первая краска должна быть нанесена на некоторую грань, пусть на ABA_1B_1 (в противоположном случае переобозначим вершины). Для противоположной грани $C_1D_1D_1C_1$ остается пять возможностей окраски. Если одна из них выбрана, то нужно найти число способов окраски пояса из четырех граней четырьмя различными красками.

Будем считать, что первой из оставшихся красок раскрашена грань ADA_1D_1 (в противоположном случае повернем пояс так, чтобы раскрашенная этой краской грань совпала с гранью ADA_1D_1). Тогда полосе из оставшихся трех граней можно раскрасить столькими различными способами, сколько перестановок из трех красок.

Таким образом, число различных раскрасок куба равно $5 \cdot 3! = 30$.

Ответ: 30.

ТЕМЫ: МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ

Используя метод математической индукции, доказать утверждения (1.076 – 1.100).

1.076. Если $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, то $y' = nx^{n-1}$.

Решение.

$$\text{При } n = 1, y = x, \Delta y = \Delta x \text{ и } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Предположим, что формула для производной верна при $n = k$, тогда для $n = k + 1$ имеем:

$y' = (x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = (x)'(x^k) + x(x^k)' = x^k + kx^k = (k+1)x^k$, т. е. эта формула верна для $n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

1.077. Сумма углов выпуклого n -угольника $S_n = 180^\circ(n - 2)$.

Решение.

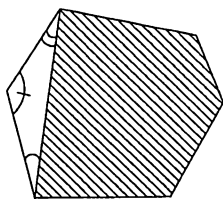


Рис. 1.31

При $n = 3$, получаем истинное утверждение: сумма углов треугольника $S_3 = 180^\circ$.

Предположим, что формула верна для $n = k$, тогда при $n = k + 1$ получаем: $S_{k+1} = S_k + S_1 = 180^\circ(k - 2) + 180^\circ = 180^\circ((k + 1) - 2)$ (рис. 1.31), т. е. формула справедлива для $n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

1.078. Сумма первых n членов геометрической прогрессии находится по формуле

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 0, 1,$$

где b_1 — первый член прогрессии, q — знаменатель.

Решение.

При $n = 1$, $S_1 = b_1 = b_1 \frac{q-1}{q-1}$, т. е. формула верна.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, тогда для $n = k + 1$ имеем:

$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = b_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + b_1 q^k = b_1 \frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q - 1} = b_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$, т. е. формула справедлива при $n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

1.079. Сумма первых n членов арифметической прогрессии находится по формуле

$$S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2},$$

где a_1 — первый член прогрессии, d — разность.

Решение.

При $n = 1$, $S_1 = a_1 = \frac{2a_1 \cdot 1}{2}$, т. е. формула верна.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, тогда для $n = k + 1$ имеем:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} = \frac{(2a_1 + d(k-1))k}{2} + (a_1 + dk) = \frac{1}{2}(2a_1 k + d(k^2 - k) + 2a_1 + 2dk) = \frac{1}{2}(2a_1(k+1) + d(k^2 - k + 2k)) = \\ &= \frac{(2a_1 + dk)(k+1)}{2}, \end{aligned}$$

т. е. формула справедлива при $n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

$$1.080. 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Решение.

Пусть $S_n = 1 + 3 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$. При $n = 1$, $S_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, т. е. формула верна.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, тогда для $n = k + 1$ имеем:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{6}(k+3), \text{ т. е. формула справедлива при } n = k + 1. \text{ По}$$

методу математической индукции заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

$$1.081. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение.

Пусть $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. При $n = 1$, $S_1 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, т. е. формула верна.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, тогда для $n = k + 1$ получаем:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6} (2k^2 + k + 6k + 6) = \frac{k+1}{6} (2k^2 + 7k + 6) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \text{ т. е.}$$

формула справедлива при $n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

$$1.082. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Решение.

Пусть $S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$. При $n = 1$, $S_1 = 1^3 = \frac{1 \cdot 2^2}{4}$, т. е. формула верна.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, тогда для $n = k + 1$ имеем:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4} (k^2 + 4k + 4) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}, \text{ т. е. формула справедлива при}$$

$n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

$$1.083. 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Решение.

Пусть $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$. При $n = 1$, $S_1 = 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$, т. е. формула верна.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, тогда для $n = k + 1$ получаем:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)}{3} (k+3), \text{ т. е. формула справедлива при } n = k + 1. \text{ По}$$

методу математической индукции заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

$$1.084. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Решение.

Пусть $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. При $n = 1$, $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 2 \cdot 3}$, т. е. формула верна.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, тогда для $n = k + 1$ имеем:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)^2 + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} =$$

$$= \frac{k^3 + 6k^2 + 9k + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k^3 + k^2) + (5k^2 + 5k) + (4k + 4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k^2 + 5k + 4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)},$$

т. е. формула справедлива при $n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

$$1.085. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Решение.

Пусть $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, $Q_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$. При $n = 1$, $S_1 = 1 - \frac{1}{2} = Q_1 = \frac{1}{2}$, т. е. формула верна.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, т. е. $S_k = Q_k$. Для $n = k + 1$ получаем:

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}, \quad Q_{k+1} - Q_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \Rightarrow S_{k+1} = Q_{k+1}, \quad \text{т. е. формула справедлива}$$

при $n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что формула выполняется для всех натуральных n .

QED.

1.086. Сумма $n^3 + 5n$ делится на 6 при любом натуральном n .

Решение.

При $n = 1$, $1 + 5 = 6$ делится на 6.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, т. е. $(k^3 + 5k):6$. Для $n = k + 1$ получаем: $(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6$ — делится на 6, так как первое и последнее слагаемые делятся на 6, а $k(k+1)$ — делится на 2 как произведение двух последовательных натуральных чисел. По методу математической индукции заключаем, что утверждение верно для всех натуральных n .

QED.

1.087. Сумма $2^{2n-1} + 3n + 4$ делится на 9 при любом натуральном n .

Решение.

При $n = 1$, $2^{2-1} + 3 + 4 = 9$ делится на 9.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, т. е. $(2^{2k-1} + 3k + 4):9$. Для $n = k + 1$ получаем: $2^{2(k+1)-1} + 3(k+1) + 4 = 2^{2k-1+2} + 3k + 3 + 4 = 4(2^{2k-1} + 3k + 4) - 9k - 9 = 4(2^{2k-1} + 3k + 4) - 9(k+1)$ — делится на 9, так как первое и второе слагаемые делятся на 9. По методу математической индукции заключаем, что утверждение верно для всех натуральных n .

QED.

1.088. Сумма $4^n + 15n - 1$ делится на 9 при любом натуральном n .

Решение.

При $n = 1$, $4 + 15 - 1 = 18$ делится на 9.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, т. е. $(4^k + 15k - 1) : 9$. Для $n = k + 1$ имеем: $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18$ — делится на 9, так как каждое из слагаемых делится на 9. По методу математической индукции заключаем, что утверждение справедливо для всех натуральных n .

QED.

1.089. Сумма $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом целом неотрицательном n .

Решение.

При $n = 0$, $11^2 + 12 = 133$ делится на 133.

Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, т. е. $(11^{k+2} + 12^{2k+1}) : 133$. Для $n = k + 1$ имеем:

$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}$ — делится на 133, так как каждое из слагаемых делится на 133. По методу математической индукции заключаем, что утверждение справедливо для всех натуральных n .

QED.

1.090. $2^n > 2n + 1$ при всех натуральных $n \geq 3$.

Решение.

При $n = 3$, $2^3 > 7$ — неравенство истинно.

Предположим, что $2^k > 2k + 1$. Для $n = k + 1$ имеем: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k > 2(2k + 1) > 2k + 1 + 2$, т. е. $2^{k+1} > 2k + 3$ и неравенство истинно при $n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что утверждение верно для всех натуральных n .

QED.

1.091. $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $x > -1$ при всех натуральных n (неравенство Я. Бернулли).

Решение.

При $n = 1$, $(1+x)^1 = 1+x$.

Предположим, что неравенство $(1+x)^k \geq 1 + kx$ — истинно. Так как $1+x > 0$, то, учитывая, что $kx^2 \geq 0$, имеем: $(1+x)^k \geq 1 + kx \Leftrightarrow (1+x)(1+x)^{k-1} \geq (1+x)(1+kx) \Leftrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$, т. е. неравенство истинно для всех натуральных n .

QED.

1.092. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ при всех натуральных $n > 1$.

Решение.

При $n = 2$, $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$ — неравенство истинно.

Предположим, что неравенство $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$ — истинно, тогда

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} = S_k - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = S_k + \frac{2k+2+2k+1-2(2k+1)}{2(k+1)(2k+1)} = \\ &= S_k + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > S_k > \frac{13}{24}, \end{aligned}$$

т. е. неравенство истинно при всех натуральных n .

QED.

1.093. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ при всех натуральных $n \geq 2$.

Решение.

При $n = 2$, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ — неравенство истинно.

Предположим, что неравенство $S_k = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$ — истинно. Так как

$$k^2 + k > k^2 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + k} > k \Leftrightarrow \sqrt{k(k+1)} > k \Leftrightarrow \sqrt{k} > \frac{k}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow \sqrt{k} > \sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}, \text{ то}$$

$S_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$, т. е. неравенство истинно для всех натуральных $n \geq 2$.

QED.

1.094. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$ при всех натуральных $n \geq 2$.

Решение.

При $n = 2$, $\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ — неравенство истинно.

Предположим, что неравенство $S_k = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{k}$ — истинно. Так как

$$k^2 + 2k + 1 > k^2 + 2k \Leftrightarrow (k+1)^2 > k(k+2) \Leftrightarrow \frac{1}{k} > \frac{k+2}{(k+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{k} > 1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1},$$

то $S_{k+1} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = S_k + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1}$, т. е. неравенство истинно для всех натуральных $n \geq 2$.

QED.

1.095. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$ при всех натуральных n .

Решение.

При $n = 1$, $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2$, т. е. исходное неравенство истинно.

Так как $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$, то достаточно доказать, что

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, n \geq 2.$$

При $n = 2$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow 3\sqrt{7} < 8 \Leftrightarrow 9 \cdot 7 < 64$ — неравенство истинно.

Предположим, что неравенство $\Pi_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ — истинно. Тогда $\Pi_{k+1} = \Pi_k \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{2k+1}{2k+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$. Требуется доказать, что

$$\frac{2k+1}{2k+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3k+1}} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \Leftrightarrow (2k+1)\sqrt{3k+4} < (2k+2)\sqrt{3k+1} \Leftrightarrow (2k+1)^2(3k+4) < (2k+2)^2(3k+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4k^2 + 4k + 1)(3k + 4) < (4k^2 + 8k + 4)(3k + 1) \Leftrightarrow 12k^3 + 12k^2 + 3k + 16k^2 + 16k + 4 <$$

$$< 12k^3 + 24k^2 + 12k + 4k^2 + 8k + 4 \Leftrightarrow k > 0 \text{ — истинно.}$$

Таким образом, доказано, что $\Pi_{k+1} < \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$, т. е. неравенство истинно для всех натуральных n .

QED.

1.096. $n^n > (n+1)^{n-1}$ для всех натуральных $n \geq 2$.

Решение.

При $n = 2$, $2^2 > 3$ — неравенство истинно.

Предположим, что неравенство $k^k > (k+1)^{k-1}$ выполняется, докажем, что $(k+1)^{k+1} > (k+2)^k$. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(k+2)^k = ((k+1)+1)^k = (k+1)^k + C_k^1(k+1)^{k-1} + C_k^2(k+1)^{k-2} + \dots + C_k^{k-1}(k+1) + 1 <$$

$$< \underbrace{(k+1)^k + (k+1)^k + \dots + (k+1)^k}_{(k+1) \text{ раз}} = (k+1)^k + (k+1)(k+1)^{k-1} + (k+1)^2(k+1)^{k-2} + \dots + (k+1)^{k-1}(k+1) + (k+1)^k, \text{ так как}$$

$C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{1}{l!}(k+1-l)(k+2-l) \cdot \dots \cdot (k-l) \cdot k < (k+1)^l$, т. е. $(k+1)^{k+1} > (k+2)^k$. Таким образом, доказано, что неравенство истинно для всех натуральных n .

QED.

1.097. $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$ для всех натуральных $n \geq 6$.

Решение.

Докажем предварительно, что $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 2 \Leftrightarrow (n+1)^n > 2n^n$. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k n^k = 1 + C_n^1 n + C_n^2 n^2 + \dots + C_n^{n-1} n^{n-1} + n^n = 1 + C_n^1 n + \dots + C_n^{n-2} n^{n-2} + 2n^n > 2n^n.$$

Рассмотрим теперь исходное неравенство. При $n = 6$, $3^6 = 729 > 6! = 720$.

Предположим теперь, что исходное неравенство истинно, докажем справедливость неравенства

$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} > (n+1)! \Leftrightarrow (n+1)^n > 2^{n+1} \cdot n!$. Имеем верные неравенства $n^n > 2^n \cdot n!$ и $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 2$. Перемножая их, получаем:

$$n^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 2^{n+1} n! \Leftrightarrow (n+1)^n > 2^{n+1} n! \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} > (n+1)!.$$

Доказано, что исходное неравенство справедливо для всех натуральных $n \geq 6$.

QED.

1.098. При $n \geq 2$, $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$, где $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Решение.

По определению модуля действительного числа имеем: $-|a_1| \leq a_1 \leq |a_1|$, $-|a_2| \leq a_2 \leq |a_2|$. При $n = 2$, складывая эти два неравенства, получаем: $-(|a_1| + |a_2|) \leq a_1 + a_2 \leq |a_1| + |a_2| \Leftrightarrow |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$. Предположим, что истинно неравенство

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k|,$$

тогда

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + a_{k+1}| \leq |a_1 + a_2 + \dots + a_k| + |a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| + |a_{k+1}|.$$

По методу математической индукции заключаем, что неравенство верно для всех натуральных n .

QED.

1.099. Число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n .

Решение.

При $n = 0$, пустое множество \emptyset имеет $2^0 = 1$ подмножество, само \emptyset . При $n = 1$, $\{a\}$ имеет два подмножества \emptyset и $\{a\}$.

Предположим, что множество, состоящее из k элементов, имеет 2^k подмножеств. Рассмотрим множество A , имеющее $(k+1)$ элементов:

$$A = \{a_1; a_2; \dots; a_k; a_{k+1}\}.$$

Если $B = \{a_1; a_2; \dots; a_k\}$, то B имеет 2^k подмножеств, и $A = B \cup \{a_{k+1}\}$. Для любого подмножества $X \subset A$ либо $X \subset B$, либо

$$X = Y \cup \{a_{k+1}\}, \text{ где } Y \subset B. \text{ Таким образом, всего подмножеств множества } A \text{ будет } 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

По методу математической индукции заключаем, что утверждение верно.

QED.

1.100. Правило произведения (см. 1.025) справедливо для всех натуральных k .

Решение.

Пусть $k = 2$. Среди строк $(x_1; x_2)$ ровно n_2 строк вида $(a_1; x_2)$, n_2 строк вида $(a_2; x_2)$ и так далее, где a_1, a_2, \dots, a_{n_1} — различные значения x_1 . Значит, всех строк вида $(x_1; x_2)$ будет:

$$\underbrace{n_2 + n_2 + \dots + n_2}_{n_1 \text{ раз}} = n_1 \cdot n_2.$$

Предположим, что правило произведения справедливо для строк длины k , докажем его истинность для строк длины $(k+1)$. Любую строку $(x_1; x_2; \dots; x_k; x_{k+1})$ можно рассматривать как строку вида $(y; x_{k+1})$, где $y = (x_1; x_2; \dots; x_k)$. По предположению индукции строка y может быть выбрана $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами, x_{k+1} — n_{k+1} способами. Применяя доказанное правило для строк длины 2, получаем, что число всех строк длины $(k+1)$ будет равно

$$(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k) \cdot n_{k+1} = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{k+1}.$$

По методу математической индукции утверждение доказано.

QED.

1.101. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Решение.

Пусть искомое число имеет вид $10x + y$. По условию имеем:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 10x + y + 18 = 10y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: 24.

1.102. Какой цифрой x должно заканчиваться натуральное число $n = \overline{7267}x$, чтобы оно было наибольшим, делящимся без остатка на: а) 2; б) 3; в) 5?

Решение.

а) $n:2 \Leftrightarrow x = 0; 2; 4; 6; 8$. Ясно, что число будет наибольшим, если $x = 8$, т. е. $n = 72\,678$.

б) $n:3 \Leftrightarrow (7 + 2 + 6 + 7 + x) = (22 + x):3$. Возможные значения для цифры $x = 2; 5; 8$. Очевидно, что число будет наибольшим, если $x = 8$, т. е. $n = 72\,678$.

в) $n:5 \Leftrightarrow x = 0; 5$. Число n будет наибольшим, если $x = 5$, т. е. $n = 72\,675$.

Ответ: а) $n = 72\,678$; б) $n = 72\,678$; в) $n = 72\,675$.

1.103. Какой цифрой x должно заканчиваться натуральное число $n = \overline{32159}x$, чтобы оно было наименьшим, делящимся без остатка на: а) 4; б) 7; в) 8; г) 9?

Решение.

а) $n:4 \Leftrightarrow \overline{9x}:4$. Возможные значения $x = 2; 6$. Число n будет наименьшим, если $x = 2$, т. е. $n = 321\,592$.

б) $n:7 \Leftrightarrow 590 + x - 321 = 269 + x = 266 + (x + 3):7 \Leftrightarrow (x + 3):7$, что возможно лишь при $x = 4$, т. е. $n = 321\,594$.

в) $n:8 \Leftrightarrow \overline{59x}:8 \Leftrightarrow 590 + x = 560 + 24 + (x + 6):8 \Leftrightarrow (x + 6):8$, что возможно лишь при $x = 2$, т. е. $n = 321\,592$.

г) $n:9 \Leftrightarrow 3 + 2 + 1 + 5 + 9 + x = (x + 20):9$, что возможно лишь при $x = 7$, т. е. $n = 321\,597$.

Ответ: а) $n = 321\,592$; б) $n = 321\,594$; в) $n = 321\,592$; г) $n = 321\,597$.

1.104. Сумма цифр двузначного числа равна наименьшему из двузначных чисел, а цифра десятков в четыре раза меньше цифры единиц. Найти число.

Решение.

Пусть искомое число имеет вид $10x + y$. По условию имеем:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ 4x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x, \\ 5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 8. \end{cases}$$

Ответ: 28.

1.105. Написать наибольшее целое число, в котором все цифры различны и которое делится на 25.

Решение.

По условию наибольшие цифры должны стоять в наивысших разрядах и по признаку делимости на 25 число, образованное последними двумя цифрами искомого, должно делиться на 25, т. е. иметь вид 75, 50, 25.

Учитывая оба этих условия, получаем искомое число

9 876 432 150.

Ответ: 9 876 432 150.

1.106. Натуральное число $n = \overline{42x4y}$ кратно 72. Найти x, y .

Решение.

$$\text{По условию } n:72 \Rightarrow \begin{cases} n:9 \\ n:4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+2+4+x+y):9 \\ 4y:4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (10+x+y):9 \\ (40+y):4 \end{cases} \Rightarrow y = 0, 4, 8.$$

1) Если $y = 0$, то $(10+x):9 \Rightarrow x = 8$, $n = 42\,840 = 72 \cdot 595$.

2) $y = 4$, то $(14+x):9 \Rightarrow x = 4$, $n = 42\,444$ — не делится на 72.

3) Если $y = 8$, то $x = 0$, $n = 42\,048 = 72 \cdot 584$, $n = 42\,948$ — не делится на 72.

Ответ: 42 840, 42 048.

1.107. Доказать, что число $11\dots 11$ (81 единица) делится на 81.

Решение.

$$\underbrace{111\dots 111}_{81 \text{ единица}} = \underbrace{111111111}_9 \cdot 10^{72} + \underbrace{11\dots 11}_9 \cdot 10^{63} + \dots + \underbrace{11\dots 11}_9 = \underbrace{11\dots 11}_9 (\underbrace{1000000001}_{8} 0\dots 01).$$

Первый сомножитель делится на 9, так как состоит из девяти единиц, а второй сомножитель делится на 9, так как в его записи девять единиц, а остальные нули. Таким образом, произведение делится на 81.

QED.

1.108. Найти НОК и НОД чисел 1044, 1512, 2436.

Решение.

1) Выпишем канонические разложения данных чисел:

$$1044 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 29;$$

$$1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7;$$

$$2436 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29.$$

2) Чтобы получить НОК, каждый из простых множителей, входящих хотя бы в одно из канонических разложений данных чисел, возводится в наибольшую степень, с которой этот множитель встречается в канонических разложениях, а затем полученные степени перемножаются:

$$\text{НОК} = \{1044, 1512, 2436\} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 29 = 43\,848.$$

3) Чтобы получить НОД, каждый из простых множителей, входящий в каждое из канонических разложений данных чисел, возводится в наименьшую степень, с которой этот простой множитель входит в канонические разложения данных чисел, а затем полученные степени перемножаются:

$$\text{НОД} = \{1044, 1512, 2436\} = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Ответ: НОК = 43 848, НОД = 12.

1.109. Доказать, что всякое целое a представляется единственным образом через положительное целое b в виде

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b,$$

где число q называется неполным частным, а число r — остатком от деления a на b .

Решение.

1) Возьмем bq равным наибольшему кратному числа b , не превосходящим a , $r = a - bq$.

2) Единственность. Пусть $a = bq_1 + r_1$ — другое представление указанного вида, тогда

$$\begin{cases} a = bq + r, \\ a = bq_1 + r_1 \end{cases} \Rightarrow 0 = b(q - q_1) + (r - r_1) \Rightarrow (r - r_1) \Rightarrow (r - r_1) : b. \text{ Так как } |r - r_1| < b, \text{ то } r - r_1 = 0, \text{ т. е. } r = r_1, q = q_1.$$

QED.

1.110. Доказать, что среди последовательных k целых чисел одно всегда делится на k .

Решение.

Пусть $a, a + 1, a + 2, \dots, a + k - 1$ — последовательность k целых чисел. Поделим первое из них на k с остатком (см. 1.109). Пусть

$$a = kq + r, \quad 0 \leq r < k, \text{ тогда имеем:}$$

$$a + 1 = kq + (r + 1),$$

$$a + 2 = kq + (r + 2),$$

...

$$a + k - 1 = kq + (r + q - 1).$$

Среди чисел $r, r + 1, \dots, r + q - 1$ ($0 \leq r < k$) одно всегда делится на k .

QED.

1.111. Доказать, что при любом целом a , $a^5 - a$ делится на 5.

Решение.

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 - 4 + 5) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 - 4) + 5(a - 1)a(a + 1) = \\ &= (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5(a - 1)a(a + 1). \end{aligned}$$

Первое слагаемое делится на 5 как произведение пяти последовательных целых чисел, второе также кратно пяти, следовательно, их сумма делится на 5.

QED.

1.112. Доказать, что при любом целом a выражение $a^3 + 3a^2 + 2a$ делится на 6.

Решение.

$$a^3 + 3a^2 + 2a = a(a^2 + 3a + 2) = a(a^2 - 1 + 3a + 3) = a(a^2 - 1) + 3a(a + 1) = (a - 1)a(a + 1) + 3a(a + 1).$$

Произведение $a(a + 1)$ делится на два, так как одно из этих чисел — четное; первое слагаемое делится на три как произведение трех последовательных целых чисел, следовательно, каждое из слагаемых кратно 6 и их сумма делится на 6.

QED.

1.113. Доказать, что при любом целом a выражение $a^7 - a$ делится на 42.

Решение.

$$\begin{aligned} a^7 - a &= a(a^6 - 1) = a(a^3 - 1)(a^3 + 1) = a(a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1) = \\ &= (a - 1)a(a + 1)(a^2 + a - 6 + 7)(a^2 - a - 6 + 7) = (a - 1)a(a + 1)[(a + 3)(a - 2) + 7][(a - 3)(a + 2) + 7] = \\ &= (a - 3)(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 7(a - 1)a(a + 1) \cdot Q, \end{aligned}$$

где Q — некоторое целое число.

В первом слагаемом имеется 6 и 7 последовательных целых чисел (в произведении), следовательно, оно делится на $6 \cdot 7 = 42$; $(a - 1)a(a + 1)$ делится на 6 как произведение трех последовательных целых чисел, поэтому второе слагаемое, а значит и вся сумма, делится на 42.

QED.

1.114. Доказать, что если p и q — простые числа, большие 3, то $p^2 - q^2$ делится на 24.

Решение.

Так как простые числа p и q нечетны, то $p = 2m + 1$, $q = 2n + 1$, $m \geq 2$, $n \geq 2$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= (2m + 1)^2 - (2n + 1)^2 = (2m + 1 - 2n - 1)(2m + 1 + 2n + 1) = 4(m + n + 1)(m - n) = \\ &= 4(m + n + 1)(m + n - 2n) = 4(m + n)(m + n + 1) - 8(m + n + 1)n. \end{aligned}$$

В первом слагаемом один из сомножителей — четное число, следовательно, $(p^2 - q^2) : 8$.

Докажем, что $(p^2 - q^2) : 3$. Поделим p и q на 3 с остатком. Возможны варианты:

$$a) \quad p = 3k + 1, \quad q = 3l + 1 \Rightarrow p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = 3(k - l)(3k + 3l + 2) : 3;$$

$$б) \quad p = 3k + 2, \quad q = 3l + 2 \Rightarrow p^2 - q^2 = 3(k - l)(3k + 3l + 4) : 3;$$

$$в) \quad p = 3k + 1, \quad q = 3l + 2 \text{ (или наоборот)} \Rightarrow p^2 - q^2 = (3k - 3l - 1)(3k + 3l + 3) : 3.$$

Таким образом, $(p^2 - q^2) : 3 \cdot 8$.

QED.

1.115. Доказать, что число простых чисел бесконечно.

Решение.

От противного, предположим, что имеется конечное число p_1, \dots, p_k простых чисел. Рассмотрим число $n = p_1 p_2 \dots p_k + 1$. Очевидно $n > p_k$. Если рассмотреть каноническое разложение этого числа n , то ясно, что оно простое (не имеет простых делителей). Получили противоречие тому, что p_k — последнее простое число, что и доказывает наше утверждение. QED.

1.116. Найти последнюю цифру числа 3^{2000} .

Решение.

Последняя цифра числа $n = 3^{2000}$ совпадает с остатком от деления этого числа на 10.

$$3^{2000} = 9(3^3)^{666} = 9(27)^{666} = 9(20 + 7)^{666}.$$

Ясно, что остаток от деления этого числа на 10 будет совпадать с остатком от деления числа

$$m = 9 \cdot 7^{666} = 9 \cdot 49^{333} = 9(40 + 9)^{333} \text{ на } 10.$$

Очевидно, что остаток от деления этого числа на 10 будет совпадать с остатком от деления числа

$$k = 9 \cdot 9^{333} = 81 \cdot 9^{332} = 81^{167} = (80 + 1)^{167} \text{ на } 10.$$

Ясно, что этот остаток равен единице.

Ответ: 1.

1.117. Найти последнюю цифру числа 5^{1000} .

Решение.

Последняя цифра числа $n = 5^{1000}$ совпадает с остатком от деления этого числа на 10.

$$5^{1000} = 625^{250} = (620 + 5)^{250}.$$

Остаток от деления этого числа на 10 будет совпадать с остатком от деления числа

$$m = 5^{250} = 25^{125} = (20 + 5)^{125} \text{ на } 10.$$

Аналогичными рассуждениями получаем последовательность чисел, имеющих одинаковые остатки:

$$k_1 = 5^{125} = 5 \cdot 25^{62} = 5 \cdot (20 + 5)^{62}, k_2 = 5 \cdot 5^{62} = 5 \cdot 25^{31} = 5(20 + 5)^{31}, k_3 = 5 \cdot 5^{31} = 25 \cdot 25^{15} = 25^{16} = (20 + 5)^{16},$$

$$k_4 = 5^{16} = 25^8 = (20 + 5)^8, k_5 = 5^8 = 25^4, k_6 = 5^4 = 25^2 = 625. \text{ Остаток равен } 5.$$

Ответ: 5.

1.118. Найти остаток от деления $5^{100} + 4^{200}$ на 7.

Решение.

Выпишем последовательность чисел, имеющих одинаковые остатки от деления на 7:

$$1) \quad n_1 = 5^{100} = 25^{50} = (21 + 4)^{50}, n_2 = 4^{50} = 16^{25} = (14 + 2)^{25}, n_3 = 2^{25} = 2 \cdot 8^8 = 2(7 + 1)^8, n_4 = 2 \cdot 1^8 = 2 \text{ — остаток;}$$

$$2) \quad k_1 = 4^{200} = 16^{100} = (14 + 2)^{100}, \quad k_2 = 2^{100} = 2 \cdot 8^{33} = 2(7 + 1)^{33}, \quad k_3 = 2 \cdot 1^{33} = 2 \text{ — остаток.}$$

Таким образом, остаток от деления исходного числа на 7 будет равен $2 + 2 = 4$.

Ответ: 4.

1.119. Доказать, что разность $9^{1972} - 7^{1972}$ делится на 10.

Решение.

Выпишем последовательности чисел, имеющие одинаковые остатки от деления на 10:

$$1) \quad n_1 = 9^{1972} = 81^{986} = (80 + 1)^{986}, \quad n_2 = 1^{986} = 1 \text{ — остаток;}$$

$$2) \quad k_1 = 7^{1972} = 49^{986} = (40 + 9)^{986}, \quad k_2 = 9^{986} = 81^{493} = (80 + 1)^{493}, \quad k_3 = 1^{493} = 1 \text{ — остаток.}$$

Таким образом, остаток от деления исходного числа на 10 будет равен $1 - 1 = 0$.

QED.

1.120. Доказать, что разность $7^{1968^{1970}} - 3^{68^{70}}$ делится на 10.

Решение.

Отметим сначала, что $1968 \div 4$ и $68 \div 4$, т. е. $1968^{1970} = 4k$, $68^{70} = 4n$. Тогда данное число имеет вид $7^{4k} - 3^{4n}$. Рассмотрим числа, имеющие одинаковые остатки от деления на 10:

$$1) \quad l_1 = 7^{4k} = 49^{2k} = (40 + 9)^{2k}, \quad l_2 = 9^{2k} = 81^k = (80 + 1)^k, \quad l_3 = 1^k = 1 \text{ — остаток;}$$

$$2) \quad m_1 = 3^{4n} = 81^n = (80 + 1)n, \quad m_2 = 1^n = 1 \text{ — остаток.}$$

Таким образом, остаток от деления исходного числа на 10 будет равен $1 - 1 = 0$.

QED.

1.121. Доказать, что сумма квадратов трех целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

Решение.

Если рассматривать и отрицательные остатки, то каждое целое число при делении на 8 может иметь следующие остатки: $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4$, следовательно, квадрат целого числа может иметь остатком при делении на 8 числа $0; 1; 4$.

Для того чтобы при делении на 8 сумма квадратов трех чисел имела остаток 7, необходимо, чтобы этот остаток был нечетным, что возможно в двух случаях:

- 1) Один из квадратов имеет нечетный остаток 1, а два других — четные остатки 0; 4. Остаток 7 в сумме получить нельзя.
- 2) Все три квадрата имеют нечетные остатки 1, т. е. остаток всей суммы равен 3.

QED.

1.122. Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа.

Решение.

Пусть $a = 2k + 1$, $b = 2n + 1$, тогда имеем:

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2n + 1)^2 = (4k^2 + 4k + 1) + (4n^2 + 4n + 1) = 4(k^2 + n^2 + k + n) + 2.$$

Таким образом, $a^2 + b^2$ — четное, но не делится на 4. Если бы $a^2 + b^2$ было квадратом четного числа c , то c было бы четным $c = 2m \Rightarrow c^2 = 4m^2$, т. е. $a^2 + b^2$ было бы кратным 4. Полученное противоречие доказывает утверждение.

QED.

1.123. Доказать, что если каждое из двух чисел есть сумма квадратов двух целых чисел, то их произведение также есть сумма двух квадратов.

Решение.

Пусть $u = a^2 + b^2$, $v = c^2 + d^2$, тогда

$$uv = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2.$$

QED.

1.124. Можно ли число 1450 представить как разность квадратов двух натуральных чисел?

Решение.

Пусть $a^2 - b^2 = 1450 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 1450$. Так как $1450:2$, но не делится на 4, то $a - b$ или $a + b$ — четное число.

Если $a - b = 2k$, то $a = b + 2k$ и $(a - b)(a + b) = 2k(2b + 2k) = 4k(b + k)$, т. е. $1450:4$, что быть не может.

Если $a + b = 2n$, то $-b = a - 2n$ и $(a - b)(a + b) = (2a - 2n)2n = 4(a - n)n$, т. е. $1450:4$, что быть не может.

Ответ: нет.

1.125. Найти НОД чисел $2n + 3$ и $n + 7$.

Решение.

$$(2n + 3, n + 7) = (n + 7, 2n + 3 - n - 7) = (n + 7, n - 4) = (n - 4, n + 7 - n + 4) = (n - 4, 11).$$

Так как 11 — простое число, то искомый НОД равен 1 или 11.

Если $n = 11k + 4$, то $(2n + 3, n + 7) = 11$, если $n \neq 11k + 4$, то $(2n + 3, n + 7) = 1$.

Ответ: 11, если $n = 11k + 4$; 1, если $n \neq 11k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.126. Числа p и $2p + 1$ простые, где $p > 3$. Доказать, что число $4p + 1$ составное.

Решение.

Число p — простое, $p > 3$, следовательно, $p = 3k + 1$ или $p = 3k + 2$. Пусть $p = 3k + 1$, тогда $2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$, $2p + 1 > 7$, что невозможно, так как $(2p + 1)$ — простое число. Если $p = 3k + 2$, то $2p + 1 = 6k + 5$, $4p + 1 = 12k + 8 + 1 = 3(4k + 3)$ — число составное.

QED.

1.127. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Доказать, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда равны его цифры десятков и единиц.

Решение.

Если $z = 100a + 10b + c$, где $a \geq 1$ и $a + b + c = 7$, то $a = 7 - b - c$ и $z = 700 - 100b - 100c + 10b + c = 700 - 90b - 99c = (700 - 91b - 98c) + (b - c) = 7n + (b - c)$.

$z:7 \Leftrightarrow (b-c):7$. По условию b, c — цифры и $0 \leq b+c < a+b+c = 7$, т. е. $b+c \leq 6, 0 \leq b \leq 6, 0 \leq c \leq 6 \Rightarrow -6 \leq b-c \leq 6$, следовательно, $(b-c):7 \Leftrightarrow b=c$.

QED.

1.128. Доказать, что если квадрат натурального числа содержит нечетное число десятков, то цифра единиц всегда равна 6.

Решение.

Если число $z = 10a + b$, то $z^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = (10a^2 + 2ab) \cdot 10 + b^2$. $(10a^2 + 2ab)$ — четно, а цифра десятков — нечетна, поэтому $b^2 = 10(2n + 1) + c$ (b^2 содержит нечетное число десятков), что возможно лишь при $b = 4$ или $b = 6$, но в обоих случаях b^2 оканчивается цифрой 6, следовательно, и z^2 оканчивается цифрой 6.

QED.

Решить в целых числах уравнения (1.129 – 1.134).

1.129. $xy = x + y$.

Решение.

$xy = x + y \Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 1 \Leftrightarrow x(y-1) - (y-1) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 1$. Произведение двух целых чисел $x-1, y-1$ равно единице, следовательно:

$$a) \begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0), (2; 2)$.

1.130. $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Решение.

$6x^2 + 5y^2 = 74 \Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 50 - 5y^2 \Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$, следовательно, $x^2 - 4 = 5k, 10 - y^2 = 6n, k = n$. Отсюда:

$x^2 = 4 + 5k \Rightarrow 4 + 5k \geq 0, k \geq -\frac{4}{5}; 10 - y^2 = 6n, y^2 = 10 - 6n \Rightarrow 10 - 6n \geq 0, n \leq \frac{5}{3}$. Получили неравенство $-\frac{4}{5} \leq k \leq \frac{5}{3}, k \in \mathbb{Z}$, поэтому $k = 0, 1$. Если $k = n = 0$, то $10 = y^2$, где $y \in \mathbb{Z}$, что невозможно. Если $k = n = 1$, то $x^2 = 9, y^2 = 4$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = -2, \end{cases} \begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2. \end{cases}$

1.131. $19x^2 + 28y^2 = 729$.

Решение.

$19x^2 + 28y^2 = 729 \Leftrightarrow (18x^2 + 27y^2) + (x^2 + y^2) = 729$, поэтому $(x^2 + y^2):3$, следовательно, $x = 3a, y = 3b$ и $19a^2 + 28b^2 = 81$. Аналогичными рассуждениями получаем, что $a = 3k, b = 3n$ и $19k^2 + 28n^2 = 9$. Последнее уравнение не имеет решений в множестве \mathbb{Z} .

Ответ: нет решений.

1.132. $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$

Решение.

ОДЗ: $xyz \neq 0.$

Домножая обе части исходного уравнения на $2xyz$, получаем:

$$2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = 6xyz \Leftrightarrow (x^2y^2 + x^2z^2 - 2x^2yz) + (x^2z^2 + y^2z^2 - 2xz^2y) + (y^2z^2 + x^2y^2 - 2xy^2z) = 6xyz - 2x^2yz - 2xz^2y - 2xy^2z \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (xy - xz)^2 + (xz - yz)^2 + (yz - xy)^2 = 2xyz[(1-x) + (1-y) + (1-z)].$$

Последнее уравнение в натуральных числах имеет единственное решение $x = y = z = 1$. Так как $xyz > 0$, то целые решения получаем, заменив значения двух переменных на противоположные.

Ответ: (1; 1; 1), (-1; -1; 1), (-1; 1; -1), (1; -1; -1).

1.133. $1! + 2! + \dots + x! = y^2.$

Решение.

а) При $x = 1$, $y^2 = 1$, а при $x = 3$ $y^2 = 9$, следовательно, имеем следующие решения: (1; 1), (1; -1), (3; 3), (3; -3).

б) При $x = 2$, $1! + 2! = 3 \neq y^2$, а при $x = 4$ $1! + 2! + 3! + 4! = 33 \neq y^2$.

в) При $x \geq 5$, $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + x! = 33 + 10k$ — число, которое заканчивается цифрой 3, поэтому оно не является квадратом целого числа.

Ответ: (1; 1), (1; -1), (3; 3), (3; -3).

1.134. $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$

Решение.

$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y \Leftrightarrow (1+x)(1+x^2) = 2^y \Rightarrow 1+x = 2^k$, $1+x^2 = 2^{y-k} \Rightarrow x = 2^k - 1$, $x^2 = 2^{y-k} - 1$. Из первого равенства получаем:

$$x^2 = (2^k - 1)^2 = 2^{2k} - 2^{k+1} + 1, \text{ следовательно,}$$

$$2^{2k} - 2^{k+1} + 1 = 2^{y-k} - 1 \Leftrightarrow 2^{y-k} + 2^{k+1} - 2^{2k} = 2.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $k = 0$, тогда $2^y + 2 - 1 = 2 \Leftrightarrow 2^y = 1$, $y = 0$, $x = 2^0 - 1 = 0$.

2) $k > 0$, тогда $2^{y-k} + 2^{k+1} - 2^{2k} = 2 \Leftrightarrow 2^{y-k-1} + 2^k - 2^{2k-1} = 1$.

Так как 2^k и 2^{2k-1} — целые числа ($k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$), то 2^{y-k-1} — также целое число, следовательно,

$$2^{y-k-1}(1 + 2^{2k-y+1} - 2^{3k-y}) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^{y-k-1} = 1, \\ 1 + 2^{2k-y+1} - 2^{3k-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-k-1 = 0, \\ 2k-y+1 = 3k-y \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1, \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2^k - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Ответ: (0; 0), (1; 2).

1.135. Найти целые решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1 + z^2. \end{cases}$$

По теореме Виета x, y — корни квадратного уравнения $u^2 - 2u + (z^2 + 1) = 0$. Дискриминант $D = 4 - 4(z^2 + 1) = 4 - 4z^2 - 4 = -4z^2 \geq 0$ при $z = 0$. Имеем:

$$u^2 - 2u + 1 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)^2 = 0, u = 1, \text{ т. е. } x = y = 1.$$

Ответ: (1; 1; 0).

1.136. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$?

Решение.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960} \Rightarrow x = 1960 + y - 28\sqrt{10y}$, где $x, y \in \mathbb{Z}$, следовательно, $28\sqrt{10y}$ — целое, а значит, $\sqrt{10y}$ — рациональное, поэтому $\sqrt{10y}$ — целое (квадрат несократимой дроби не может быть целым). Отсюда $10y = m^2 \Rightarrow y = 10u^2$. Аналогичными рассуждениями показывается, что $x = 10v^2$. Тогда из исходного уравнения имеем: $|u| + |v| = 14$, следовательно, для целого $|u|$ возможны 15 значений: $|u| = 0, 1, 2, 3, \dots, 14$, т. е. исходное уравнение в целых числах имеет 15 решений.

Ответ: 15.

Решить в натуральных числах уравнения (1.137 – 1.139).

1.137. $\frac{x+z+xyz}{1+yz} = \frac{7}{4}.$

Решение.

$$\frac{x+z+xyz}{1+yz} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{x(1+yz)+z}{1+yz} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x + \frac{z}{1+yz} = 1 + \frac{3}{4}. \text{ Тогда } x \text{ — целая часть, а } \frac{z}{1+yz} \text{ — дробная часть, следовательно,}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ \frac{z}{1+yz} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1+yz}{z} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow y + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{3}, \text{ откуда } y = 1, z = 3. \end{cases}$$

Ответ: (1; 1; 3).

1.138. $x + y + z = xyz.$

Решение.

Предположим, что $x \leq y \leq z$, тогда $x + y + z \leq 3z$ и, так как $x + y + z = xyz$, $xyz \leq 3z \Leftrightarrow xy \leq 3$. Если $x = y = z$, то $x^3 = 3x \Leftrightarrow x^2 = 3$, нет решений. Таким образом, хотя бы два из чисел x, y, z не совпадают, следовательно, $xy < 3$, т. е. либо $xy = 1$, либо $xy = 2$.

Если $xy = 1$, то $x = y = 1, 2 + z = z$, нет решений.

Если $xy = 2$, то $x = 1, y = 2, 3 + z = 2z, z = 3$.

Из полученного решения $(1; 2; 3)$ в силу симметрии уравнения остальные находятся перестановками.

Ответ: $(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1)$.

1.139. $ax + by = ab, (a, b) = 1$.

Решение.

Предположим, что $(u; v)$ — натуральное решение этого уравнения, тогда

$ab - au = bv \Leftrightarrow a(b - u) = bv \Rightarrow bv : a \Rightarrow v : a$ (a и b — взаимно простые числа), т. е. $v = an$. Аналогично показывается, что u делится на b , т. е. $u = bk$. Подставляя u, v в исходное уравнение, имеем:

$abk + abn = ab \Rightarrow k + n = 1$, что невозможно при натуральных n и k .

Ответ: нет решений.

1.140. Решить в простых числах уравнение $x^y + 1 = z$.

Решение.

Так как по условию $x \geq 2, y \geq 2$, то $x^y \geq 4$ и $z \geq 5$; далее, $x^y + 1$ — простое число, а, следовательно, нечетное, т. е. x^y — четное, а значит, x — простое четное число, что возможно лишь тогда, когда $x = 2$. При $y = 2k + 1$,

$z = 2^{2k+1} + 1 = (2 + 1)(2^{2k} - 2^{2k-1} + \dots + 1)$, т. е. $z : 3$ и $z \geq 5$,

следовательно, z — не простое. Значит, y — простое четное, т. е. $y = 2, z = 2^2 + 1 = 5$.

Ответ: $(2; 2; 5)$.

1.141. Доказать, что выражение $x + \frac{1}{x}$ не является целым числом ни при каком рациональном x , кроме $x = \pm 1$.

Решение.

Пусть $x = \frac{m}{n}$ — рациональное число, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, и $x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = k \Rightarrow m^2 + n^2 = kn \cdot m \Rightarrow m^2 : n$ и $(m, n) = 1$, т. е. $n = \pm 1$. Аналогично показывается, что $m = \pm 1$, т. е. $x = \pm 1$.

QED.

Вычислить (1.142 – 1.147).

$$1.142. \left(\frac{0,216}{0,15} + \frac{2}{3} : \frac{4}{15} \right) + \left(\frac{196}{225} - \frac{7,7}{24 \frac{3}{4}} \right) + 0,695 : 1,39.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{0,216}{0,15} + \frac{2}{3} : \frac{4}{15} \right) + \left(\frac{196}{225} - \frac{7,7}{24 \frac{3}{4}} \right) + 0,695 : 1,39 = \left(\frac{216}{150} + \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4} \right) + \left(\frac{196}{225} - \frac{77}{10} : \frac{99}{4} \right) + \frac{695}{1390} = \\
 & = \left(\frac{36}{25} + \frac{5}{2} \right) + \left(\frac{196}{225} - \frac{77 \cdot 4}{10 \cdot 99} \right) + \frac{139 \cdot 5}{139 \cdot 10} = \frac{72+125}{50} + \frac{196}{225} - \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 9} + \frac{1}{2} = \frac{197+25}{50} + \frac{196-70}{225} = \\
 & = \frac{111}{25} + \frac{126}{225} = \frac{111}{25} + \frac{14}{25} = \frac{125}{25} = 5.
 \end{aligned}$$

Ответ: 5.

$$1.143. \frac{3,75 : 1 \frac{1}{2} + \left(1,5 : 3 \frac{3}{4} \right) \cdot 2 \frac{1}{2} + \left(1 \frac{1}{7} - \frac{23}{49} \right) : \frac{22}{147} : \frac{0,125}{2}}{2 : 3 \frac{1}{5} + \left(3 \frac{1}{4} : 13 \right) : \frac{2}{3} - \left(2 \frac{5}{18} - \frac{17}{36} \right) \cdot \frac{18}{65}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \frac{3,75 : 1 \frac{1}{2} + \left(1,5 : 3 \frac{3}{4} \right) \cdot 2 \frac{1}{2} + \left(1 \frac{1}{7} - \frac{23}{49} \right) : \frac{22}{147} : \frac{0,125}{2}}{2 : 3 \frac{1}{5} + \left(3 \frac{1}{4} : 13 \right) : \frac{2}{3} - \left(2 \frac{5}{18} - \frac{17}{36} \right) \cdot \frac{18}{65}} = \frac{3 \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{3}{2} : \frac{15}{4} \right) \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{8}{7} - \frac{23}{49} \right) \cdot \frac{147}{22} : \frac{1}{16}}{2 \cdot \frac{5}{16} + \left(\frac{13}{4} : 13 \right) \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{41}{18} - \frac{17}{36} \right) \cdot \frac{18}{65}} = \\
 & = \frac{\frac{5}{2} + 1 + \frac{33}{49} \cdot \frac{147}{22} : \frac{1}{16}}{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{65}{36} \cdot \frac{18}{65}} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot 16} = \frac{8}{8} = 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$1.144. \frac{\left(\frac{3}{5} + 0,425 - 0,005 \right) : 0,1}{30,5 + \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{3}} + \frac{6 \frac{3}{4} + 5 \frac{1}{2}}{26 : 3 \frac{5}{7}} - 0,05 + \frac{\left(152 \frac{3}{4} - 148 \frac{3}{8} \right) \cdot 0,3}{0,2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left(\frac{3}{5} + 0,425 - 0,005 \right) : 0,1}{30,5 + \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{3}} + \frac{6 \frac{3}{4} + 5 \frac{1}{2}}{26 : 3 \frac{5}{7}} - 0,05 + \frac{\left(152 \frac{3}{4} - 148 \frac{3}{8} \right) \cdot 0,3}{0,2} = \frac{(0,6 + 0,42) \cdot 10}{\frac{61}{2} + \frac{1}{6} + \frac{10}{3}} + \frac{12 \frac{1}{4} \cdot 26}{26 \cdot 7} - \frac{1}{20} + \frac{3}{2} \left(4 \frac{3}{8} \right) = \\
 & = \frac{10,2}{34} + \frac{7}{4} - \frac{1}{20} + \frac{3 \cdot 35}{16} = \frac{3}{10} + \frac{7}{4} - \frac{1}{20} + \frac{105}{16} = 2 + \frac{105}{16} = \frac{137}{16}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{137}{16}$.

$$1.145. \frac{\left(1,88 + 2\frac{3}{25}\right) \cdot \frac{3}{16} + \left(\frac{0,216}{0,15} + 0,56\right) : 0,5}{0,625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{26}{9}} + \frac{2}{\left(7,7 : 24\frac{3}{4} + \frac{2}{15}\right) \cdot 4,5} + \frac{2}{0,125}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\left(1,88 + 2\frac{3}{25}\right) \cdot \frac{3}{16} + \left(\frac{0,216}{0,15} + 0,56\right) : 0,5}{0,625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{26}{9}} + \frac{2}{\left(7,7 : 24\frac{3}{4} + \frac{2}{15}\right) \cdot 4,5} + \frac{2}{0,125} = \frac{(1,88 + 2,12) \cdot \frac{3}{16} + \left(\frac{216}{150} + \frac{56}{100}\right) \cdot 2}{0,625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26}} + \frac{2}{\left(\frac{77}{10} \cdot \frac{4}{99} + \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{9}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{8}} = \\ & = \frac{4 \cdot \frac{3}{16} + \left(\frac{72}{50} + \frac{28}{50}\right) \cdot 2}{\frac{5}{8} - \frac{1}{4}} + \frac{\left(\frac{14}{45} + \frac{6}{45}\right) \cdot \frac{9}{2}}{2} + 16 = 4 \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 16 = 20. \end{aligned}$$

Ответ: 20.

$$1.146. \frac{0,8 : \left(\frac{4}{5} \cdot 1,25\right) + \left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}}{\left(1,2 \cdot 0,5\right) : \frac{4}{5}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{0,8 : \left(\frac{4}{5} \cdot 1,25\right) + \left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}}{\left(1,2 \cdot 0,5\right) : \frac{4}{5}} = \frac{0,8 : \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}\right) + \left(1,08 - 0,08\right) \cdot \frac{7}{4}}{0,64 - 0,04} + \frac{\left(3\frac{5}{9} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{36}{17}}{0,6 \cdot \frac{5}{4}} = \\ & = \frac{8}{6} + \frac{\frac{7}{4}}{\left(\frac{32}{9} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{36}{17}} + \frac{6 \cdot \frac{5}{4}}{10 \cdot \frac{5}{4}} = \frac{4}{3} + \frac{17 \cdot 7}{\left(\frac{128}{9} - 1\right) \cdot 36} + \frac{3}{4} = \frac{4}{3} + \frac{17 \cdot 7 \cdot 9}{119 \cdot 36} + \frac{3}{4} = \frac{48 + 9 + 27}{36} = \frac{84}{36} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{7}{3}$.

$$1.147. \frac{\left(\left(\frac{1}{6} + 0,1 + \frac{1}{15}\right) : \left(\frac{1}{6} + 0,1 - \frac{1}{15}\right)\right) \cdot 2,52 \cdot 24}{\left(\left(0,5 - \frac{1}{3} + 0,25 - \frac{1}{5}\right) : \left(0,25 - \frac{1}{6}\right)\right) \cdot \frac{7}{13} \cdot \left(\frac{9}{7} - \frac{3}{5}\right)}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\left(\frac{1}{6} + 0,1 + \frac{1}{15}\right) : \left(\frac{1}{6} + 0,1 - \frac{1}{15}\right)\right) \cdot 2,52 \cdot 24}{\left(\left(0,5 - \frac{1}{3} + 0,25 - \frac{1}{5}\right) : \left(0,25 - \frac{1}{6}\right)\right) \cdot \frac{7}{13} \cdot \left(\frac{9}{7} - \frac{3}{5}\right)} = \frac{\left(\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right) : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15}\right)\right) \cdot \frac{63 \cdot 24}{25}}{\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\right) \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{45 - 21}{35}} = \\ & = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{63 \cdot 24}{25}}{\frac{13}{60} \cdot 12 \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{24}{35}} = \frac{21}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot 35 = 105. \end{aligned}$$

Ответ: 105.

1.148. Найти x , если $\frac{1,2 \cdot 0,375 - 0,2}{6 \frac{4}{25} : 15 \frac{2}{5} + 0,8} = \frac{0,016 : 0,12 + 0,7}{5x}$.

Решение.

$$x = \frac{(0,016 : 0,12 + 0,7) \left(6 \frac{4}{25} : 15 \frac{2}{5} + 0,8 \right)}{5(1,2 : 0,375 - 0,2)} = \frac{\left(\frac{2}{125} \cdot \frac{3}{25} + \frac{7}{10} \right) \left(\frac{154}{25} \cdot \frac{77}{5} + \frac{4}{5} \right)}{5(3,2 - 0,2)} = \frac{\left(\frac{2}{15} + \frac{7}{10} \right) \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5} \right)}{15} = \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{15}.$$

Ответ: $\frac{1}{15}$.

1.149. Найти x , если $\frac{15,2 \cdot 0,25 - 48,51 : 14,7}{125x} = \frac{\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2 \frac{1}{2} \right) \cdot 1 \frac{1}{5}}{3,2 + 0,8 \cdot \left(5 \frac{1}{2} - 3,25 \right)}$.

Решение.

$$x = \frac{(15,2 \cdot 0,25 - 48,51 : 14,7) \left(3,2 + 0,8 \left(5 \frac{1}{2} - 3,25 \right) \right)}{125 \left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2 \frac{1}{2} \right) \cdot 1 \frac{1}{5}} = \frac{(3,8 - 3,3)(3,2 + 0,8 \cdot 2,25)}{125 \left(\frac{5}{44} - \frac{5}{66} : \frac{5}{2} \right) \frac{6}{5}} = \frac{0,5 \cdot (3,2 + 1,8)}{\left(\frac{5}{44} - \frac{1}{33} \right) \cdot 6 \cdot 25} = \frac{0,5 \cdot 5}{\frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 25} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

1.150. Представить в виде рациональной дроби выражение

$$\frac{0,23(7) + \frac{43}{450}}{0,5(61) - \frac{113}{495}}.$$

Решение.

а) $0,23(7) = \frac{23}{100} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \dots = \frac{23}{100} + \frac{\frac{7}{10^3}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{23}{100} + \frac{7}{9 \cdot 100} = \frac{214}{900} = \frac{107}{450};$

б) $0,5(61) = \frac{5}{10} + \frac{61}{10^3} + \frac{61}{10^5} + \dots = \frac{5}{10} + \frac{\frac{61}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{5}{10} + \frac{61}{990} = \frac{556}{990} = \frac{278}{495};$ $\frac{0,23(7) + \frac{43}{450}}{0,5(61) - \frac{113}{495}} = \frac{\frac{107}{450} + \frac{43}{450}}{\frac{278}{495} - \frac{113}{495}} = \frac{150}{450} \cdot \frac{495}{165} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$

Ответ: 1.

1.151. Решить уравнение $\frac{0,1(6)+0,(3)}{0,(3)-1,1(6)}x=10$.

Решение.

$$\text{а) } 0,1(6) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \dots = \frac{1}{10} + \frac{\frac{6}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6};$$

$$\text{б) } 0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{0,1(6)+0,(3)}{0,(3)-1,1(6)}x=10 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}x=10 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}x=10 \Leftrightarrow \frac{1+2}{6} \cdot 6x=10 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{10}{3}$.

1.152. Найти десятичные записи чисел $\frac{3}{25}, \frac{2}{7}, \frac{7}{15}$.

Решение.

$$\text{а) } \begin{array}{r} 300 \\ 25 \overline{) 300} \\ \underline{-50} \\ 50 \\ \underline{-50} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{3}{25} \mid \frac{25}{0,12(0)} ; \end{array}$$

$$\text{б) } \begin{array}{r} 20000000 \\ 14 \overline{) 20000000} \\ \underline{-60} \\ 56 \\ \underline{-40} \\ 35 \\ \underline{-50} \\ 49 \\ \underline{-10} \\ 7 \\ \underline{-30} \\ 28 \\ \underline{20} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{7} \mid \frac{7}{0,(285714)} ; \end{array}$$

$$\text{в) } \begin{array}{r} 7000 \\ 60 \overline{) 7000} \\ \underline{-100} \\ 90 \\ \underline{-90} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{7}{15} \mid \frac{15}{0,4(6)} . \end{array}$$

Ответ: 0,12(0); 0,(285714); 0,4(6).

1.153. Доказать, что если $b \neq a^n$, $a, n \in \mathbb{N}$, то $\log_a b$ — число иррациональное.

Решение.

Предположим, что $\log_a b = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда $b = a^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow b^q = a^p$. Правая часть при $p \in \mathbb{N}$ делится на a , следовательно, и левая часть должна делиться на a , что невозможно, так как $b \neq a^n$. Полученное противоречие доказывает, что $\log_a b$ — не может быть рациональным числом, т. е. число иррациональное.

QED.

1.154. Доказать, что \sqrt{p} — число иррациональное, где p — простое число, $p \in \mathbb{N}$.

Решение.

Предположим, что $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая рациональная дробь. Тогда

$m^2 = pn^2 \Rightarrow m^2 : p \Rightarrow m : p$, т. е. $m = pk$, $m^2 = p^2 k^2$, $p^2 k^2 = pn^2 \Rightarrow n^2 = pk^2 \Rightarrow n^2 : p \Rightarrow n : p = pl$. Получили, что m и n имеют общий множитель p , т. е. противоречие несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Полученное противоречие доказывает иррациональность числа \sqrt{p} .

QED.

1.155. Доказать, что если квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами p и q имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа.

Решение.

Пусть $x = \frac{m}{n}$ — рациональный корень квадратного уравнения, где $\frac{m}{n}$ — несократимая рациональная дробь. Имейт место тождество

$$\frac{m^2}{n^2} + p \frac{m}{n} + q = 0 \Leftrightarrow m^2 + pmn + qn^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = -n(pm + qn) \Rightarrow m^2 : n \Rightarrow m : n, \text{ противоречие несократимости дроби } \frac{m}{n}.$$

Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

QED.

ТЕМА: КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел (1.156 – 1.160).

1.156. $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 2 + 3i$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (1 + 2) + (-2 + 3)i = 3 + i;$

б) $z_1 - z_2 = (1 - 2) + (-2 - 3)i = -1 - 5i;$

в) $z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)(2 + 3i) = 2 - 4i + 3i - 6i^2 = 8 - i;$

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - 2i}{2 + 3i} = \frac{(1 - 2i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{1}{4 + 9} (2 - 4i - 3i + 6i^2) = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i.$

Ответ: а) $3 + i$; б) $-1 - 5i$; в) $8 - i$; г) $-\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i.$

1.157. $z_1 = -3 + i, z_2 = 5 - 3i$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (-3 + i) + (5 - 3i) = 2 - 2i;$

б) $z_1 - z_2 = (-3 + i) - (5 - 3i) = -8 + 4i$

в) $z_1 \cdot z_2 = (-3 + i)(5 - 3i) = -15 + 5i + 9i - 3i^2 = -12 + 14i$

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3+i}{5-3i} = \frac{(-3+i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{1}{25+9}(-15+5i-9i+3i^2) = -\frac{18}{34} - \frac{4}{34}i = -\frac{9}{17} - \frac{2}{17}i$

Ответ: а) $2 - 2i$; б) $-8 + 4i$; в) $-12 + 14i$; г) $-\frac{9}{17} - \frac{2}{17}i$.

1.158. $z_1 = 0,1 + 2i$, $z_2 = -0,2 + 0,3i$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (0,1 + 2i) + (-0,2 + 0,3i) = -0,1 + 2,3i$

б) $z_1 - z_2 = (0,1 + 2i) - (-0,2 + 0,3i) = 0,3 + 1,7i$

в) $z_1 \cdot z_2 = (0,1 + 2i)(-0,2 + 0,3i) = -0,02 - 0,4i + 0,03i + 0,6i^2 = -0,62 - 0,37i$

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{0,1+2i}{-0,2+0,3i} = \frac{(0,1+2i)(-0,2-0,3i)}{(-0,2+0,3i)(-0,2-0,3i)} = \frac{1}{0,04+0,09}(-0,02-0,4i-0,03i-0,6i^2) = \frac{100}{13}(0,58-0,43i) = \frac{58}{13} - \frac{43}{13}i$

Ответ: а) $-0,1 + 2,3i$; б) $0,3 + 1,7i$; в) $-0,62 - 0,37i$; г) $\frac{58}{13} - \frac{43}{13}i$.

1.159. $z_1 = 4 - 3\sqrt{3}i$, $z_2 = 4 + 3\sqrt{3}i$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (4 - 3\sqrt{3}i) + (4 + 3\sqrt{3}i) = 8$

б) $z_1 - z_2 = (4 - 3\sqrt{3}i) - (4 + 3\sqrt{3}i) = -6\sqrt{3}i$

в) $z_1 \cdot z_2 = (4 - 3\sqrt{3}i)(4 + 3\sqrt{3}i) = 16 - 27i^2 = 43$

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-3\sqrt{3}i}{4+3\sqrt{3}i} = \frac{(4-3\sqrt{3}i)^2}{(4+3\sqrt{3}i)(4-3\sqrt{3}i)} = \frac{1}{43}(16-24\sqrt{3}i+27i^2) = -\frac{11}{43} - \frac{24\sqrt{3}}{43}i$

Ответ: а) 8 ; б) $-6\sqrt{3}i$; в) 43 ; г) $-\frac{11}{43} - \frac{24\sqrt{3}}{43}i$.

1.160. $z_1 = \sqrt{a} - \sqrt{b}i$, $z_2 = \sqrt{a} + \sqrt{b}i$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b}i) + (\sqrt{a} + \sqrt{b}i) = 2\sqrt{a}$

$$\text{в) } z_1 - z_2 = (\sqrt{a} - \sqrt{bi}) - (\sqrt{a} + \sqrt{bi}) = 2\sqrt{bi};$$

$$\text{в) } z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{a} - \sqrt{bi})(\sqrt{a} + \sqrt{bi}) = a - bi^2 = a + b;$$

$$\text{г) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{bi}}{\sqrt{a} + \sqrt{bi}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{bi})(\sqrt{a} - \sqrt{bi})}{(\sqrt{a} + \sqrt{bi})(\sqrt{a} - \sqrt{bi})} = \frac{1}{a+b} (a - 2\sqrt{abi} + bi^2) = \frac{a-b}{a+b} - \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}i.$$

Ответ: а) $2\sqrt{a}$; б) $-2\sqrt{bi}$; в) $a + b$; г) $\frac{a-b}{a+b} - \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}i$.

1.161. Вычислить $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{15}$.

Решение.

$$\text{Имеем: } \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

$$\text{Тогда } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{15} = (-i)^{15} = (-i)^{12}(-i)^3 = (-i)^2(-i) = i.$$

Ответ: i .

1.162. Вычислить $\frac{(2-i)^3}{1+i}$.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{(2-i)^3}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} (8 - 12i - 6 + i) = \frac{1}{2} (1-i)(2-11i) = \frac{1}{2} (2-11i-2i-11) = \\ &= \frac{1}{2} (-9-13i) = -\frac{9}{2} - \frac{13}{2}i = -4,5 - 6,5i. \end{aligned}$$

Ответ: $-4,5 - 6,5i$.

1.163. Вычислить $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2} &= \frac{1-4+4i - (1-3i-3+i)}{27+54i-36-8i - (4-1+4i)} = \frac{-1+6i}{-12+42i} = \frac{(1-6i)(12+42i)}{(12-42i)(12+42i)} = \\ &= \frac{12+252-30i}{1908} = \frac{267-30i}{1908} = \frac{22}{159} - \frac{5}{318}i. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{22}{159} - \frac{5}{318}i$.

1.164. Найти вещественные решения уравнения $(1+i)x + (2+i)y = 5+3i$.

Решение.

Из условия имеем:

$$(1+i)x + (2+i)y = 5+3i \Leftrightarrow (x+2y) + (x+y)i = 5+3i \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=5, \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Ответ: $x=1, y=2$.

1.165. Найти вещественные решения уравнения

$$\frac{2+5i}{x-y} - \frac{1-3i}{x+y} = \frac{-7x+12i}{y^2-x^2}.$$

Решение.

ОДЗ: $|x| \neq |y|$.

$$\begin{aligned} \frac{2+5i}{x-y} - \frac{1-3i}{x+y} &= \frac{-7x+12i}{y^2-x^2} \Rightarrow (2+5i)(x+y) - (1-3i)(x-y) = 7x-12i \Leftrightarrow (2x+2y-x+y) + \\ &+ i(5x+5y+3x-3y) = 7x-12i \Leftrightarrow (x+3y) + (8x+2y)i = 7x-12i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=7x, \\ 8x+2y=-12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x=3y, \\ y+4x=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x, \\ 6x=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=-2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x=-1, y=-2$.

1.166. Найти вещественные решения уравнения

$$x^2 + xyi - 5 + i = xi - y^2 + yi.$$

Решение.

Из условия имеем:

$$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - x - y + 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ (x+y) - xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 5, \\ 2(x+y) - 2xy = 2 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) - 3 = 0.$$

Если $t = x+y$, то получаем уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -1$.

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2, \end{cases} \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-1, \\ xy=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=1, \\ y_3=-2, \end{cases} \begin{cases} x_4=-2, \\ y_4=1. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 2), (2; 1), (1; -2), (-2; 1)$.

1.167. При каких вещественных значениях x и y числа $z_1 = (2x^2 - 1) + (y - 3)i$, $z_2 = (y - 3) + (x^2 - 2)i$ являются сопряженными?

Решение.

$$z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = -\operatorname{Im} z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 = y - 3, \\ y - 3 = -(x^2 - 2) \end{cases} \Rightarrow 3x^2 = 3, |x| = 1.$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: (1; 4) или (-1; 4).

1.168. Доказать свойства сопряженных чисел:

а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; в) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Решение.

а) Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2), \quad \overline{z_1} = x_1 - iy_1, \quad \overline{z_2} = x_2 - iy_2, \quad \overline{z_1} + \overline{z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2).$$

$$\text{б) } z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + y_2x_1),$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(y_1x_2 + y_2x_1), \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(y_1x_2 + y_2x_1).$$

$$\text{в) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i,$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{(x_2 - iy_2)(x_2 + iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

QED.

1.169. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, если известен его корень $z_1 = 2 - 5i$.

Решение.

Если $z_1 = 2 - 5i$ — корень уравнения с действительными коэффициентами $z^2 + pz + q = 0$, то $z_2 = \overline{z_1} = 2 + 5i$ — также корень этого уравнения, причем по теореме Виета $p = -(z_1 + z_2) = -4$, $q = z_1 z_2 = (2 - 5i)(2 + 5i) = 4 + 25 = 29$.

Ответ: $z^2 - 4z + 29 = 0$.

1.170. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, если известен его корень $z_1 = \frac{2+3i}{1-i}$.

Решение.

Если $z_1 = \frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}(2-3+3i+2i) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ — корень уравнения с действительными коэффициентами, то

$z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ — также корень этого уравнения, причем по теореме Виета для искомого уравнения $z^2 + pz + q = 0$ $p =$

$$= -(z_1 + z_2) = 1, \quad q = z_1 z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{13}{2}.$$

Ответ: $z^2 + z - \frac{13}{2} = 0$.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа (1.171 – 1.174).

1.171. -3 ; $2i$; $\sqrt{3} - i$.

Решение.

1) $-3 = -3 + 0i = 3(-1 + 0i) = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$;

2) $2i = 2(0 + i) = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$;

3) $\sqrt{3} - i = \sqrt{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Ответ: $3(\cos\pi + i\sin\pi)$; $2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$; $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

1.172. $\sin 32^\circ + i\cos 32^\circ$; $\cos 12^\circ - i\sin 12^\circ$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin 32^\circ + i\cos 32^\circ &= \sin(90^\circ - 58^\circ) + i\cos(90^\circ - 58^\circ) = \cos 58^\circ + i\sin 58^\circ = \cos \frac{290^\circ}{5} + i\sin \frac{290^\circ}{5} = \cos\left(\frac{29}{5} \cdot 10^\circ\right) + i\sin\left(\frac{29}{5} \cdot 10^\circ\right) = \\ &= \cos\left(\frac{29}{5} \cdot \frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{29}{5} \cdot \frac{\pi}{18}\right) = \cos \frac{29\pi}{90} + i\sin \frac{29\pi}{90}; \end{aligned}$$

$$\cos 12^\circ - i\sin 12^\circ = \cos(-12^\circ) + i\sin(-12^\circ) = \cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right).$$

Ответ: $\cos \frac{29\pi}{90} + i\sin \frac{29\pi}{90}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)$.

1.173. $-\sin\alpha - i\cos\alpha$; $\sin\alpha - i\cos\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$-\sin\alpha - i\cos\alpha = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$$

$$\sin\alpha - i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ: $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

1.174. $1 + i\operatorname{ctg}\alpha$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение.

$$1 + i\operatorname{ctg}\alpha = 1 + i \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + i\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right).$$

Ответ: $\frac{1}{\sin\alpha} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right)$.

1.175. Доказать, что если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ при $z_2 \neq 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} 1) z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 \cdot r_2 ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \\ &+ i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \\ &+ i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

QED.

1.176. Доказать формулу Муавра ($z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$) для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Решение.

Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$, получается просто тригонометрическая форма записи комплексного числа. Пусть формула справедлива при $n = k$, тогда для $n = k + 1$ имеем:

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) \cdot r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r^{k+1} (\cos(k+1)\varphi + i \sin(k+1)\varphi).$$

(см. из 1.175). Отсюда заключаем, что формула верна для всех натуральных n .

QED.

Вычислить (1.177 – 1.180).

1.177. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^8.$

Решение.

$$\text{В тригонометрической форме записи } z_1 = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Используя формулу Муавра, имеем:

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^8 = \left(\frac{2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \right)^8 = 2^4 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right)^8 = \\ &= 16 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)^8 = 16 \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3} \right) = 16 \left(\cos \left(3\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(3\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 16 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -8 - 8\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Ответ: $-8 - 8\sqrt{3}i$.

1.178. $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right)^6 - \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2} \right)^6.$

Решение.

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}; \quad \frac{-\sqrt{3}-i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right);$$

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right)^6 - \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2} \right)^6 = \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)^6 - \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right)^6 =$$

$$= \cos 5\pi + i \sin 5\pi - \cos(-5\pi) - i \sin(-5\pi) = \cos 5\pi - \cos 5\pi = 0.$$

Ответ: 0.

1.179. $(1+i)^{20} + (1-\sqrt{3}i)^6$.

Решение.

$$(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \right)^{20} = 2^{10} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{20} = 2^{10} (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = -2^{10};$$

$$\left(2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right)^6 = 2^6 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^6 = 2^6 (\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi)) = 2^6;$$

$$(1+i)^{20} + (1-\sqrt{3}i)^6 = -2^{10} + 2^6 = 2^6(1-2^4) = -15 \cdot 2^6 = -960.$$

Ответ: -960.

1.180. $(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n$; $(1 - \cos \varphi + i \sin \varphi)^n$.

Решение.

$$\begin{aligned} 1) (1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} i \right)^n = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)^n = \\ &= 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{n\varphi}{2} + i \sin \frac{n\varphi}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (1 - \cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \left(2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} i \right)^n = 2^n \sin^n \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} + i \cos \frac{\varphi}{2} \right)^n = \\ &= 2^n \sin^n \frac{\varphi}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right)^n = 2^n \sin^n \frac{\varphi}{2} \left(\cos \left(n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) + i \sin \left(n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Ответ: 1) $2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{n\varphi}{2} + i \sin \frac{n\varphi}{2} \right)$; 2) $2^n \sin^n \frac{\varphi}{2} \left(\cos \left(n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) + i \sin \left(n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right)$.

1.181. Доказать тригонометрические формулы:

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

Решение.

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha \text{ — по формуле Муавра.}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 &= \cos^3 \alpha + 3\cos^2 \alpha \sin \alpha i + 3\cos \alpha \sin^2 \alpha i^2 + \sin^3 \alpha i^3 = (\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha) + \\ &+ (3\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha) i = (\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)) + (3(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \sin^3 \alpha) i = \\ &= (4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha) + (3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha) i. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha, \quad \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha.$$

QED.

Вычислить (1.182 – 1.185).

1.182. $\sqrt[3]{64i}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{64i} = 4\sqrt[3]{i} = 4\sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = 4 \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right), k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0, \alpha_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3} + 2i;$$

$$k = 1, \alpha_2 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -2\sqrt{3} + 2i;$$

$$k = 2, \alpha_3 = 4 \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -4i.$$

Ответ: $2\sqrt{3} + 2i$; $-2\sqrt{3} + 2i$; $-4i$.

1.183. $\sqrt[3]{1+i}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)} = \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0, \alpha_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}}i;$$

$$k = 1, \alpha_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\frac{\sqrt[3]{2} \cdot 8}{2} + \frac{\sqrt[3]{2} \cdot 8}{2}i = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt[3]{4}}{2}i;$$

$$\begin{aligned} k = 2, \alpha_3 &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{5\pi}{12} \right) \right) = \\ &= -\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) = -\sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right) = \\ &= -\sqrt[3]{2} \left(\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right) = -\sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right) = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}}i. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}}i$; $-\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt[3]{4}}{2}i$; $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}}i$.

1.184. $\sqrt[6]{1}$.

Решение.

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0+2\pi k}{6} + i \sin \frac{0+2\pi k}{6} = \cos \frac{\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi k}{3}, k = 0, 1, \dots, 5.$$

$$1) \quad k = 0, \alpha_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$k = 1, \alpha_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$k = 2, \alpha_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$2) \quad k = 3, \alpha_4 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$k = 4, \alpha_5 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$k = 5, \alpha_6 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\text{Ответ: 1) } 1; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; 2) -1; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

1.185. $\sqrt{a+bi}$, $b \neq 0$.

Решение.

Пусть $\sqrt{a+bi} = u + vi$ в предположении, что корень существует. Тогда

$$\begin{aligned} a + bi = u^2 - v^2 + 2uvi &\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ 2uv = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u^2 - v^2)^2 = a^2, \\ 4u^2v^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow u^4 - 2u^2v^2 + v^4 = a^2, \\ &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 = a^2 + b^2, \quad u^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ u^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 2v^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u| = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \\ |v| = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \end{cases}$$

Отметим, что $uv = \frac{b}{2}$, т. е. знак произведения $u \cdot v$ должен совпадать со знаком b .

$$1) \quad \text{Пусть } b > 0, \quad u_1 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad u_2 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad v_2 = -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

2) Если $b < 0$, то $u_3 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$, $v_3 = -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$, $u_4 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$, $v_4 = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$.

Подставляя полученные значения в систему уравнений $\begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ 2uv = b, \end{cases}$ непосредственными вычислениями убеждаемся, что они являются решениями этой системы.

Ответ: $\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right)$ при $b > 0$,
 $\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right)$ при $b < 0$.

Решить уравнения (1.186 – 1.192).

1.186. $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Решение.

Дискриминант $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = 4(4 - 13) = -36$, $\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6\sqrt{-1} = \pm 6i$,

$z_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$.

Ответ: $2 \pm 3i$.

1.187. $z^2 - (1 + 3i)z - 2 + 2i = 0$.

Решение.

Дискриминант $D = (1 + 3i)^2 - 4(-2 + 2i) = (1 - 9 + 6i) + (8 - 8i) = -2i$. Используя решение 1.185, находим

$\sqrt{D} = \sqrt{-2i} = \pm \left(\sqrt{\frac{0 + \sqrt{0+4}}{2}} - i \sqrt{\frac{0 + \sqrt{0+4}}{2}} \right) = \pm(1 - i)$.

Тогда $z_{1,2} = \frac{(1 + 3i) \pm (1 - i)}{2} = 2i; 1 + i$.

Ответ: $2i; 1 + i$.

1.188. $2(1 + i)z^2 - 4(2 - i)z - 5 - 3i = 0$.

Решение.

Дискриминант $D = 16(2 - i)^2 + 8(1 + i)(5 + 3i) = 8(8 - 2 - 8i + 5 - 3 + 5i + 3i) = 8^2$. $\sqrt{D} = 8$.

$$z_{1,2} = \frac{4(2-i) \pm 8}{4(1+i)} = \frac{2 \pm 2-i}{1+i} = \frac{4-i}{1+i}, \quad \frac{-i}{1+i}, \quad z_1 = \frac{(4-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2}(4-1-i-4i) = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i,$$

$$z_2 = \frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2}(-1-i) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\text{Ответ: } z_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i; \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$1.189. \quad z^4 + (2-4i)z^2 - (1-i)^6 = 0.$$

Решение.

$$(1-i)^6 = \left(\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \right)^6 = 8 \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \right) = 8i.$$

$$\text{Пусть } t = z^2, \text{ тогда получаем уравнение } t^2 + (2-4i)t - 8i = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 2i - 1 \pm \sqrt{(2i-1)^2 + 8i} = 2i - 1 \pm \sqrt{-3+4i}.$$

$$\text{Используя решение 1.185, находим } \sqrt{-3+4i} = \pm \left(\sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}} + i \sqrt{\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}} \right) = \pm(1+2i).$$

$$t_1 = 2i - 1 + 1 + 2i = 4i, \quad z^2 = 4i \Rightarrow z = 2\sqrt{i} = 2 \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}{2} \right), \quad n = 0, 1.$$

$$\text{При } n = 0, \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \text{ а при } n = 1, \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

$$t_2 = 2i - 1 - 1 - 2i = -2, \quad z_2 = -2 \Rightarrow z_{3,4} = \sqrt{-2} = \pm \sqrt{2}i.$$

$$\text{Ответ: } z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i; \quad z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i; \quad z_3 = -\sqrt{2}i; \quad z_4 = \sqrt{2}i.$$

$$1.190. \quad z^2 + 4|z| = 0.$$

Решение.

Предположим, что $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$(x+iy)^2 + 4\sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4\sqrt{x^2+y^2} + 2xyi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0, \\ x^2 - y^2 + 4\sqrt{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \quad x = 0, -y^2 + 4|y| = 0 \Leftrightarrow |y|(|y| - 4) = 0, y_1 = 0, y_2 = -4, y_3 = 4;$$

$$2) \quad y = 0, x^2 + 4|x| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Таким образом, имеем $z_1 = 0, z_2 = -4i, z_3 = 4i$.

$$\text{Ответ: } 0; -4i; 4i.$$

1.191. $|z| - iz = 2 + 5i$.

Решение.

Если $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} - i(x + iy) &= 2 + 5i \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + y - ix = 2 + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + y = 2, \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{25 + y^2} = 2 - y &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y \geq 0, \\ 25 + y^2 = 4 - 4y + y^2 \end{cases} \Rightarrow 4y = -21, \quad y = -\frac{21}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $-5 + \frac{21}{4}i$.

1.192. $\left| \frac{z+i}{z-3i} \right| = 1$.

Решение.

Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+iy+i}{x+iy-3i} \right| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{x+(y+1)i}{x+(y-3)i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|x+(y+1)i|}{|x+(y-3)i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\sqrt{x^2+(y-3)^2}} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 &= x^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow 8y = 8, \quad y = 1. \end{aligned}$$

Ответ: $z = a + i$, где $a \in \mathbb{R}$.

1.193. Доказать, что $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z|_2 \neq 0$.

Решение.

а) Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, тогда

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)| = \\ &= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + 2x_1y_2y_1x_2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2}. \\ |z_1| \cdot |z_2| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2}. \end{aligned}$$

б) Докажем сначала, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z_2} \right| &= \frac{1}{|z_2|}, \quad \left| \frac{1}{z_2} \right| = \left| \frac{1}{x_2 + iy_2} \right| = \left| \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right| = \\ &= \sqrt{\frac{x_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2} + \frac{y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2}} = \sqrt{\frac{x_2^2 + y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{1}{|z_2|}. \end{aligned}$$

$$\text{Имеем: } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

QED.

Решить системы уравнений (1.194 – 1.197).

$$1.194. \begin{cases} z_1 + z_2 = -i, \\ 3z_1 + iz_2 = 1 + 2i. \end{cases}$$

Решение.

Умножим первое уравнение на 3, а затем вычтем полученное из второго:

$$\begin{aligned} 3z_1 + iz_2 - 3z_1 - 3z_2 &= 1 + 2i + 3i \Leftrightarrow (-3 + i)z_2 = 1 + 5i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_2 &= \frac{1 + 5i}{-3 + i} = \frac{(1 + 5i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} = \frac{1}{10}(-3 + 5 - 15i - i) = \frac{1}{10}(2 - 16i) = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i. \end{aligned}$$

Из первого уравнения системы получаем:

$$z_1 = -i - z_2 = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i - i = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

$$\text{Ответ: } z_1 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i, \quad z_2 = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i.$$

$$1.195. \begin{cases} (1 + i)z_1 + z_2 = 2 + i, \\ z_1 + (1 - i)z_2 = 3 - i. \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения системы получаем $z_2 = (2 + i) - (1 + i)z_1$, тогда, подставляя это выражение во второе уравнение системы, имеем:

$$z_1 + (1 - i)((2 + i) - (1 + i)z_1) = 3 - i \Leftrightarrow z_1 + (1 - i)(2 + i) - (1 - i)(1 + i)z_1 = 3 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 - 2z_1 + 2 + 1 - 2i + i = 3 - i, z_1 = 0, z_2 = 2 + i.$$

$$\text{Ответ: } z_1 = 0, z_2 = 2 + i.$$

$$1.196. \begin{cases} |z + 1| = |z + 2|, \\ |3z + 9| = |5z + 10i|. \end{cases}$$

Решение.

Если $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, то система уравнений может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \begin{cases} |(x + 1) + iy| = |(x + 2) + iy|, \\ |3(x + 9) + 3iy| = |5x + (5y + 10)i| \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = (x + 2)^2 + y^2, \\ (3x + 9)^2 + 9y^2 = 25x^2 + (5y + 10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2, \\ 9x^2 + 54x + 81 + 9y^2 = 25x^2 + 25y^2 + 100y + 100 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 0, \\ 16x^2 - 54x + 16y^2 + 100y + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}, \\ 4y^2 + 25y + 34 = 0 \end{cases} &\Rightarrow y_1 = -2, \quad y_2 = -\frac{17}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } z_1 = -\frac{3}{2} - 2i; \quad z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{17}{4}i.$$

$$1.197. \begin{cases} \left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3}, \\ \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, тогда второе уравнение системы можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1 &\Leftrightarrow |z-4| = |z-8| \Leftrightarrow |(x-4) + iy| = |(x-8) + iy| \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 - 16x + 64 + y^2, \quad x = 6, \quad z = 6 + iy. \end{aligned}$$

Из первого уравнения системы имеем:

$$\begin{aligned} 3|z-12| = 5|z-8i| &\Leftrightarrow 3|-6 + iy| = 5|6 + (y-8)i| \Leftrightarrow 3\sqrt{36 + y^2} = 5\sqrt{36 + (y-8)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9(36 + y^2) = 25(36 + y^2 - 16y + 64) \Leftrightarrow y^2 - 25y + 136 = 0. \end{aligned}$$

По теореме Виета $y_1 = 17$, $y_2 = 8$.

Ответ: $z_1 = 6 + 17i$, $z_2 = 6 + 8i$.

1.198. Доказать, что представление $\frac{1-xi}{1+xi} = a+bi$, $x \in \mathbb{R}$, возможно тогда и только тогда, когда $|a+bi| = 1$, $a+bi \neq -1$.

Решение.

Необходимость. Если представление $\frac{1-xi}{1+xi} = a+bi$ возможно, то

$$|a+bi| = \left| \frac{1-xi}{1+xi} \right| = \frac{|1-xi|}{|1+xi|} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1. \text{ Если бы } \frac{1-xi}{1+xi} = -1, \text{ то } 1-xi = -1-xi, \quad 2=0, \text{ что невозможно.}$$

Достаточность. Пусть $|a+bi| = 1$, $a+bi \neq -1$, $a+bi = |a+bi|(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$$= \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Воспользуемся следующими тригонометрическими тождествами:

$$\cos\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Тогда

$$a+bi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} + i \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} i - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{\left(1 + i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^2}{\left(1 + i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) \left(1 - i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1 + i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{1-xi}{1+xi},$$

$$\text{где } x = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

QED.

1.199. Составить уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни $z_1 = z_2 = i$, $z_3 = 2 - i$.

Решение.

Уравнение с действительными коэффициентами, имеющее комплексный корень z_0 , всегда имеет своим корнем комплексное число $\overline{z_0}$. Таким образом, искомое уравнение должно иметь корни $z_4 = z_3 = -i$, $z_5 = 2 + i$. т. е. оно принимает вид:

$$(x - i)^2(x + i)^2(x - (2 - i))(x - (2 + i)) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2(x^2 - 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow (x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 - 4x + 5) = 0.$$

Ответ: $(x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 - 4x + 5) = 0$.

1.200. Пусть $z_1 = 1 + ai$, $z_2 = 2^{\frac{3}{4}} \left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right)$. Найти все действительные значения параметра a , при которых $z_1^3 = z_2^2$.

Решение.

Запишем указанные комплексные числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = \sqrt{1+a^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$z_2 = 2^{\frac{3}{4}} \left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right) = 2^{\frac{3}{4}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) = 2^{\frac{3}{4}} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right).$$

По формуле Муавра имеем:

$$z_1^3 = z_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+a^2}^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = \sqrt{2^3} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \Rightarrow a^2 + 1 = 2, |a| = 1. \text{ Далее, так как}$$

$$3\varphi = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \text{ т. е. подходит лишь значение } a = 1.$$

Ответ: $a = 1$.

Указать множества точек комплексной плоскости \mathbb{C} , удовлетворяющие заданным условиям (1.201 – 1.210).

1.201. а) $\operatorname{Re} z^2 = 0$; б) $\operatorname{Im} z^2 = 0$.

Решение.

Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, тогда $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$.

$$\text{а) } \operatorname{Re} z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ y = -x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{Im} z^2 = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \text{ И в случае а), и в случае б) искомые множества}$$

представляют собой пары прямых на комплексной плоскости (рис. 1.32), в случае а) — это биссектрисы координатных углов, в случае б) — это оси координат.

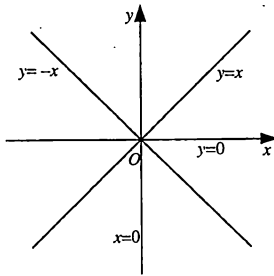


Рис. 1.32

1.202. $x^2 + 4 - 4(x+y) + yi + i - \frac{y^2 - 1}{y-1}i = 0$.

Решение. ,

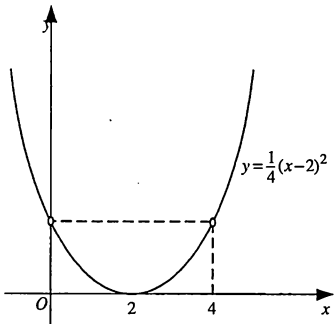


Рис. 1.33

ОДЗ: $y \neq 1$.

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 - 4x - 4y + yi + i - \frac{(y-1)(y+1)}{y-1}i &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + yi + i - (y+1)i = 4y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}(x-2)^2, \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}(x-2)^2, \\ x \neq 0, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Получили параболу с двумя выколотыми точками (рис. 1.33).

1.203. $|z+i| \geq |z+2|$.

Решение.

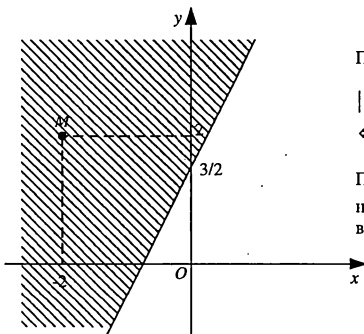


Рис. 1.34

Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, тогда из условия получаем:

$$\begin{aligned} |z+i| \geq |z+2| &\Leftrightarrow |x+iy+i| \geq |x+iy+2| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \geq \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 \geq x^2 + 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow y \geq 2x + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Прямая $y = 2x + \frac{3}{2}$ разбивает плоскость на две полуплоскости. Для выбора нужной полуплоскости достаточно проверить одну точку M . Так как неравенство нестрогое, то граница входит в искомое множество (рис. 1.34).

1.204. $\left| \frac{z+i}{z-2i} \right| \leq 1$.

Решение.

Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, тогда из условия получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+i}{z-2i} \right| \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{|z+i|}{|z-2i|} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z+i| \leq |z-2i|, \\ z \neq 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+(y+1)i| \leq |x+(y-2)i|, \\ z \neq 2i \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq \sqrt{x^2 + (y-2)^2}, \\ z \neq 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y + 1 \leq x^2 + y^2 - 4y + 4, \\ z \neq 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{6}, \\ z \neq 2i \end{cases} \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Прямая $y = \frac{1}{2}$ разбивает плоскость на две полуплоскости. Искомое множество — нижняя полуплоскость вместе с границей (рис. 1.35).

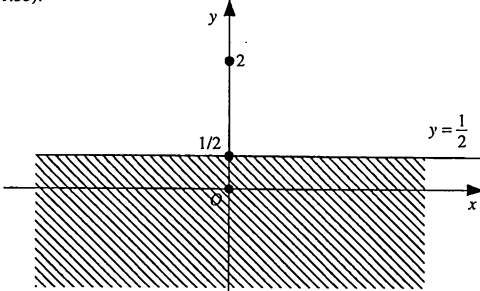


Рис. 1.35

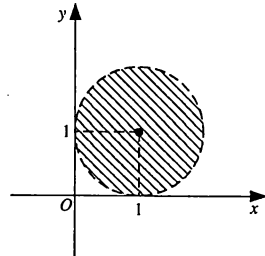


Рис. 1.36

1.205. $|z - 1 - i| < 1$.

Решение.

Если $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, то из условия имеем:

$$|z - 1 - i| < 1 \Leftrightarrow |x + yi - 1 - i| < 1 \Leftrightarrow |(x-1) + (y-1)i| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1.$$

Искомое множество представляет собой открытый круг с центром в точке (1; 1) и радиусом 1 (рис. 1.36).

1.206. $1 < |z + 2i| \leq 2$.

Решение.

Если $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, то из условия получаем:

$$1 < |z + 2i| \leq 2 \Leftrightarrow 1 < |x + (y+2)i| \leq 2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 < x^2 + (y+2)^2 \leq 4.$$

Искомое множество — это множество точек кольца с центром в точке (0; -2), внутренним радиусом 1 и внешним 2. Внутренняя граница в множество не входит, а внешняя входит (рис. 1.37).

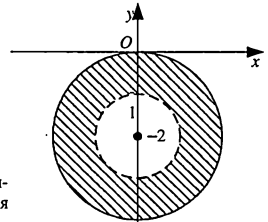


Рис. 1.37

1.207.
$$\begin{cases} 2 \operatorname{Re} z \geq z \cdot \bar{z}, \\ \arg z \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Если $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, то $\operatorname{Re} z = x$, $\bar{z} = x - yi$, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. Для $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

$\varphi = \arg z \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi \right]$. Далее, имеем:

$$x^2 + y^2 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Указанное неравенство задает замкнутый круг (с границей) с центром в точке (1; 0) и радиусом 1. Учитывая условие на φ , получаем искомое множество (рис. 1.38).

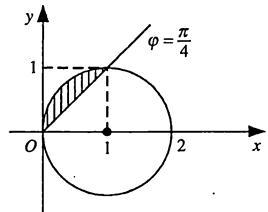


Рис. 1.38

1.208. $\begin{cases} |z-x| < |z-i|, \\ \arg z \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Решение.

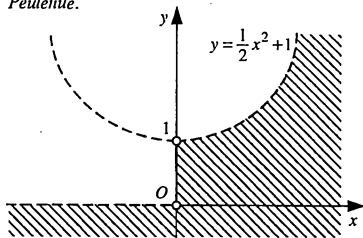


Рис. 1.39

Для $z = x + iy$, $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где

$$\begin{aligned} \varphi = \arg z \in \left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right], |z-x| < |z-i| &\Leftrightarrow |x+iy-x| < |x+iy-i| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |iy| < |x+(y-1)i| \Leftrightarrow \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 < x^2 + y^2 - 2y + 2 \Leftrightarrow y < \frac{1}{2}x^2 + 1. \end{aligned}$$

Указанное неравенство задает множество точек комплексной плоскости, расположенных ниже параболы $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ (граница не входит). Учитывая условие на φ , получаем искомое множество (рис. 1.39).

1.209. $\begin{cases} \operatorname{Re} \frac{2}{z+1} < 1, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq 0. \end{cases}$

Решение.

Для $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\varphi = \arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\bar{z} = x - yi$,

$$\frac{2}{z+1} = \frac{2}{(x+1)-iy} = \frac{2((x+1)+iy)}{(x+1)^2+y^2} \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{2}{z+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2}.$$

Получили следующее неравенство:

$$\frac{2x+2}{(x+1)^2+y^2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1+y^2 > 2x+2, \\ (x+1)^2+y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+y^2 > 1.$$

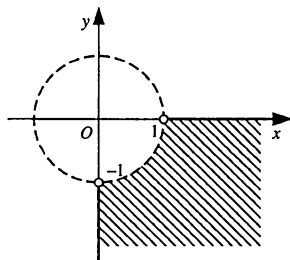


Рис. 1.40

Указанное неравенство задает множество точек комплексной плоскости, расположенных вне круга с центром в точке O и радиусом 1 (граница не входит). Учитывая условие на φ , получаем искомое множество (рис. 1.40).

1.210. $\begin{cases} 1 \leq |z+i| \leq 2, \\ \operatorname{Re} z \leq 1, \\ \arg z \geq -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Решение.

Для $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\varphi = \arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$,

$$\begin{aligned} 1 \leq |z+i| \leq 2 &\Leftrightarrow 1 \leq |x+(y+1)i| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x^2+(y+1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 \leq x^2+(y+1)^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Указанное неравенство задает множество точек кольца с центром в точке $(0; -1)$ и граничными окружностями (которые входят) радиусами 1 и 2.

$\operatorname{Re} z \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$. Учитывая условие на φ , получаем искомое множество (рис. 1.41). (Все границы входят.)

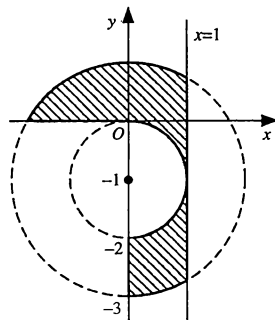


Рис. 1.41

2. АЛГЕБРА

2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

2.1.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ. СТЕПЕНИ

Алгебраическим выражением называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

Алгебраическое выражение, в котором указаны только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем, называют *целым рациональным выражением*. Если в выражение, кроме указанных действий, входит действие деления, то выражение называют *дробно-рациональным*.

Целые рациональные и дробно-рациональные выражения вместе называются *рациональными*. Если в алгебраическое выражение входит еще и действие извлечения корня, то такое выражение называют *иррациональным*.

Числовым значением алгебраического выражения при заданных числовых значениях букв называют результат, который получается после замены букв их числовыми значениями и выполнения указанных в выражении действий.

Областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраического выражения называют множество всех допустимых совокупностей значений букв, входящих в это выражение.

Тождество — это равенство, которое выполняется при всех (допустимых) значениях входящих в него букв.

Степенью с натуральным показателем n действительного

числа a называется число $b: b = a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$.

Число a называется *основанием* степени; $a^0 = 1$, если $a \neq 0$;

0^0 не определен. При $a \neq 0$ по определению $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Имеют место следующие *свойства степени* с $m, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, определяемые по формулам (2.1) — (2.5):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (2.1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (2.2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m; \quad (2.3)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0; \quad (2.5)$$

2.1.2. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Одночленом называется алгебраическое выражение, в котором числа и буквы связаны только двумя действиями — умножением и возведением в натуральную степень.

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Имеют место следующие тождества, которые называются *формулами сокращенного умножения*:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (2.6)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (2.7)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (2.8)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \quad (2.9)$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2; \quad (2.10)$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3; \quad (2.11)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3; \quad (2.12)$$

$$(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4; \quad (2.13)$$

$$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5; \quad (2.14)$$

$$(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5; \quad (2.15)$$

$$(a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) = a^6 - b^6; \quad (2.16)$$

$$(a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6) = a^7 - b^7; \quad (2.17)$$

$$(a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) = a^7 + b^7; \quad (2.18)$$

$$(a-b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n; \quad (2.19)$$

$$(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1}) = a^n + b^n; \quad (2.20)$$

где $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$;

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc; \quad (2.21)$$

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc; \quad (2.22)$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac +$$

$$+ 2ad + 2bc + 2bd + 2cd; \quad (2.23)$$

$$(a+b-c-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac -$$

$$- 2ad - 2bc - 2bd + 2cd; \quad (2.24)$$

$$a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 + bx + c, \quad (2.25)$$

где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Для доказательства тождеств (2.6 — 2.25) достаточно раскрыть скобки в левой части.

Формулы (2.6) — (2.24) остаются верными, если вместо одночленов a, b, c, d подставить любые выражения.

2.1.3. Многочлены с одной переменной

Многочленом n -й степени относительно переменной величины x называется выражение вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (2.26)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — коэффициенты (числа), $a_n \neq 0$. Число $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ называется *степенью многочлена*. Многочлен первой степени называется *линейным* многочленом, второй степени — *квадратным*, третьей степени — *кубическим*; любое ненулевое число является многочленом нулевой степени; число 0 — многочлен, степень которого не определена.

Корнями многочлена $P_n(x)$ называются такие значения переменной x , при которых $P_n(x)$ обращается в нуль (см. (2.26)).

Разделить многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ ($m \leq n$) значит найти два таких многочлена $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, чтобы

$$P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x) + R_k(x), \quad (2.27)$$

где степень k многочлена $R_k(x)$ меньше степени делителя $Q_m(x)$, т.е. $k < m$. При этом многочлен $S_{n-m}(x)$ называют *частным*, а многочлен $R_k(x)$ — *остатком*.

Для любых указанных многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x) \neq 0$ разложение (2.27) существует, и притом единственным образом, т.е. если делитель не нуль-многочлен, то действие деления всегда выполнимо.

Теорема 2.1 (теорема Безу). Если многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$ разделить на двучлен $x - a$, то в остатке получим число R , равное значению данного многочлена при $x = a$, т.е. $R = P_n(a)$.

Схема Горнера. Пусть требуется разделить многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

на двучлен $x - a$. Практически вычисление коэффициентов частного $Q_{n-1}(x)$ и остатка R проводится по следующей схеме (схема Горнера).

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$	\dots	$b_0 = a_1 + ab_1$	$R = a_0 + ab_0$

Отсюда выписываем частное

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$$

и остаток $R = a_0 + ab_0$, т.е.

$$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + R.$$

Теорема 2.2 (основная теорема алгебры). Произвольный многочлен $P_n(x)$, $n \geq 1$, с комплексными коэффициентами единственным образом представим в виде

$$P_n(x) = a_n (x-c_1)^{k_1} \cdot (x-c_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-c_l)^{k_l},$$

где c_1, c_2, \dots, c_l — различные комплексные корни $P_n(x)$, $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$.

Другими словами, любой многочлен $P_n(x)$, $n \geq 1$, с комплексными коэффициентами имеет в точности n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность (корень c многочлена $P_n(x)$ называется k -кратным, если $P_n(x)$ делится без остатка на $(x-c)^k$, но не делится на $(x-c)^{k+1}$).

Теорема 2.3. Произвольный многочлен $P_n(x)$, $n \geq 1$, с действительными коэффициентами единственным образом представим в виде

$$P_n(x) = a_n(x - c_1)^{k_1} \cdot (x - c_2)^{k_2} \dots \times$$

$$\dots \times (x - c_m)^{k_m} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_lx + q_l)^{s_l},$$

где c_1, c_2, \dots, c_m — его различные действительные корни, а квадратичные множители имеют отрицательные дискриминанты.

Теорема 2.4. Предположим, что c — рациональный корень многочлена

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

с целыми коэффициентами. Тогда c — целое число, которое является делителем a_0 .

2.2. КОРНИ И ЛОГАРИФМЫ

2.2.1. Понятие корня. Основные свойства корня

Корнем n -й степени из числа a называется такое число b , n -я степень которого равна a ($n \geq 2$), и обозначается $\sqrt[n]{a}$, где a — подкоренное выражение (или число); n — показатель корня ($n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$).

По определению $\sqrt[n]{a} = b$, если $b^n = a$, или $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Если корни рассматривать в множестве действительных чисел \mathbb{R} , то:

а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;

б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве \mathbb{R} не существует;

в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;

г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;

д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Действие, посредством которого отыскивается корень n -й степени из данного числа a , называется извлечением корня n -й степени из числа a , а результат извлечения корня в виде $\sqrt[n]{a}$ называется *радикалом*.

Таким образом, множество \mathbb{R} не замкнуто относительно извлечения корня четной степени, а результат этого действия (корень) не однозначен.

Арифметическим значением корня или арифметическим корнем степени n ($n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$) из положительного числа a называется положительное значение корня. Корень из нуля, равный нулю, также называется арифметическим корнем, т.е. $\sqrt[n]{a} = b$ есть арифметический корень, где $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $b^n = a$.

Множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен. Это означает, что для любого неотрицательного числа a и натурального числа n ($n > 1$) всегда найдется, и при том только одно, такое неотрицательное число b , что $b^n = a$.

2.2.2. Правила действий над корнями

Для любых действительных чисел a, b и c и натуральных n и k имеют место следующие правила действий над корнями:

$$2n+1\sqrt{a} \cdot 2n+1\sqrt{b} \cdot 2n+1\sqrt{c} = 2n+1\sqrt{abc};$$

$$2n+1\sqrt{abc} = 2n+1\sqrt{a} \cdot 2n+1\sqrt{b} \cdot 2n+1\sqrt{c};$$

$$\frac{2n+1\sqrt{a}}{2n+1\sqrt{b}} = 2n+1\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$2n+1\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{2n+1\sqrt{a}}{2n+1\sqrt{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$(2n+1\sqrt{a})^k = 2n+1\sqrt{a^k};$$

$$2n+1\sqrt{a^k} = (2n+1\sqrt{a})^k;$$

$$2m+1\sqrt{2n+1\sqrt{a}} = (2m+1)(2n+1)\sqrt{a};$$

$$(2m+1)(2n+1)\sqrt{a} = 2m+1\sqrt{2n+1\sqrt{a}};$$

$$2\sqrt[n]{a} \cdot 2\sqrt[n]{b} \cdot 2\sqrt[n]{c} = 2\sqrt[n]{abc} \quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0);$$

$$2\sqrt[n]{abc} = 2\sqrt[n]{a} \cdot 2\sqrt[n]{b} \cdot 2\sqrt[n]{c} \quad (abc \geq 0);$$

$$\frac{2\sqrt[n]{a}}{2\sqrt[n]{b}} = 2\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0);$$

$$2\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{2\sqrt[n]{|a|}}{2\sqrt[n]{|b|}} \quad \left(\frac{a}{b} \geq 0, b \neq 0\right);$$

$$2\sqrt[n]{k}\sqrt[n]{a} = 2\sqrt[n]{k}\sqrt[n]{a} \quad (a \geq 0);$$

$$2\sqrt[n]{k}\sqrt[n]{a} = 2\sqrt[n]{k}\sqrt[n]{a} \quad (a \geq 0);$$

$$(2\sqrt[n]{a})^k = 2\sqrt[n]{a^k} \quad (a \geq 0);$$

$$2\sqrt[n]{a^{2k}} = (2\sqrt[n]{|a|})^{2k} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

В множестве действительных чисел \mathbb{R} рассматриваются корни нечетной степени из любых действительных чисел и корни четной степени из неотрицательных чисел, причем берутся арифметические значения корней.

2.2.3. СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Рациональной степенью $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) положительного действительного числа a называется число $(\sqrt[n]{a})^m$. Рациональная степень числа $a > 0$ записывается в виде

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Действительная степень x числа $a > 0$ вводится путем предельного перехода из степеней с рациональными показателями числа a .

Имеют место следующие свойства степеней числа $a > 0$ с действительными показателями:

$$a^0 = 1; 1^x = 1;$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y;$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy};$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$a^x - a^y \Leftrightarrow x = y \text{ при } a \neq 1; \quad (2.28)$$

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y \text{ при } a > 1;$$

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y \text{ при } 0 < a < 1.$$

2.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, СТЕПЕНИ, ЧАСТНОГО

Определение 2.1. Логарифмом числа $b > 0$ по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени, в которую следует возвести a , чтобы получить b .

В этом случае записывают $\log_a b$ (логарифм b по основанию a). Коротко определение логарифма можно записать в виде основного логарифмического тождества

$$a^{\log_a b} = b, b > 0, 0 < a \neq 1. \quad (2.29)$$

Теорема 2.5. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, x, y > 0, 0 < a \neq 1.$$

Доказательство. По (2.29) $a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$.

Используя (2.28), получаем требуемое. **QED.**

Теорема 2.6. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, x, y > 0, 0 < a \neq 1.$$

Доказательство. По (2.29)

$$a^{\log_a \frac{x}{y}} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}.$$

С помощью (2.28) получаем требуемое. **QED.**

Теорема 2.7. $\log_a x^p = p \log_a x, x > 0, 0 < a \neq 1, p \in \mathbb{R}$.

Доказательство. По (2.29)

$$a^{\log_a x^p} = x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p \log_a x}.$$

Используя (2.28), получаем требуемое. **QED.**

2.2.5. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ ($0 < a \neq 1$)

Рассмотрим основные свойства логарифмов:

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1;$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a |x| + \log_a |y|, x \cdot y > 0;$$

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2| + \dots + \log_a |x_n|,$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n > 0;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, \frac{x}{y} > 0;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, 0 < b \neq 1, x > 0;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, 0 < b \neq 1;$$

$$\log_a b^n = n \log_a |b|, b^n > 0;$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y, x, y > 0;$$

$$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y, x, y > 0, a > 1;$$

$$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y, x, y > 0, 0 < a < 1.$$

2.3. УРАВНЕНИЯ

2.3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение — это равенство, которое выполняется при некоторых значениях входящих в него букв, называемых *неизвестными*.

При этом ряду с неизвестными в уравнение могут входить и другие буквы, называемые *параметрами* (*коэффициентами*) уравнения, которые могут принимать все свои допустимые значения.

Для отличия параметры обозначаются первыми буквами латинского алфавита (a, b, c и т. д.), а неизвестные — последними (x, y, z и т. д.).

В зависимости от числа неизвестных уравнение называется *уравнением с одним, двумя и т. д. неизвестными*.

Значения неизвестных, обращающие уравнение в тождество, называют *решениями* уравнения.

Решить уравнение — значит найти множество его решений (оно может быть и пустым множеством, обозначаемым \emptyset).

Если все решения уравнения $f_1 = 0$ являются решениями уравнения $f_2 = 0$, то второе уравнение называется *следствием* первого: $f_1 = 0 \Rightarrow f_2 = 0$.

Два уравнения $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ называются *равносильными*, если каждое из них есть следствие другого: $f_1 = 0 \Leftrightarrow f_2 = 0$.

Отметим, что если обе части данного уравнения возвести в одну и ту же степень, то полученное уравнение будет следствием данного, но не всегда равносильно ему.

Уравнение $f = 0$ будет равносильно двум (или нескольким) уравнениям $f_1 = 0, f_2 = 0$, если множество решений уравнения $f = 0$ совпадает с объединением множеств решений урав-

$$\text{нений } f_1 = 0 \text{ и } f_2 = 0: f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0. \end{cases}$$

Некоторые равносильные уравнения:

$$1) f_1 + f_2 = f_2 \Leftrightarrow f_1 = 0 \text{ (с учетом ОДЗ выражения } f_2);$$

$$2) \frac{f_1}{f_2} = 0 \Leftrightarrow f_1 = 0 \text{ (с учетом ОДЗ выражения } f_2 \text{ при } f_2 \neq 0);$$

$$3) f_1 \cdot f_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0; \end{cases}$$

$$4) f^n = 0 \Leftrightarrow f = 0;$$

$$5) f_1^{2k+1} = f_2^{2k+1} \Leftrightarrow f_1 = f_2; f_1^{2k} = f_2^{2k} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = f_2, \\ f_1 = -f_2. \end{cases}$$

Алгебраическим уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0.$$

2.3.2. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ($ax = b$)

Уравнение вида $ax = b$ называется *линейным*. Возможны следующие случаи:

1) $a \neq 0$; $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$ — единственный корень уравнения;

2) $a = 0, b = 0$; уравнение $0 \cdot x = 0$ имеет своим решением любое число;

3) $a = 0, b \neq 0$; уравнение $0 \cdot x = b$ решений не имеет.

2.3.3. ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

Теорема 2.8. Корни квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.30)$$

Доказательство.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}, \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad \text{QED.}$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом*. При этом, если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня; если $D = 0$, то уравнение имеет один двукратный корень; если $D < 0$, то уравнение действительных корней не имеет, хотя имеет два комплексно-сопряженных корня:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-D}}{2a}i, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{-D}}{2a}i, \quad i^2 = -1.$$

Отметим также, что формулу (2.30) можно применять для нахождения корней квадратных уравнений не только с действительными, но и с комплексными коэффициентами a, b, c .

Если $a = 1$, то квадратное уравнение называется *приведенным* и обычно записывается в виде $x^2 + px + q = 0$. Тогда из (2.30) получается следующая формула:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (2.31)$$

Для уравнения $ax^2 + 2lx + c = 0$ формула (2.30) принимает вид

$$x_{1,2} = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - ac}}{a}. \quad (2.32)$$

Формулы (2.31), (2.32) называются частными формулами вычисления корней квадратного уравнения.

2.3.4. ТЕОРЕМА ВЬЕТА (ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ)

Теорема 2.9 (прямая теорема Виета). Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Тогда

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доказательство. По формуле (2.30) получаем:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Далее имеем:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{D})(-b + \sqrt{D})}{4a^2} =$$

2.3.8. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, содержащее неизвестное (либо рациональное алгебраическое выражение от неизвестного) под знаком радикала, называется *иррациональным*.

Иррациональные уравнения путем элементарных алгебраических операций (умножения, деления, возведения в целую степень обеих частей уравнения) сводятся к рациональным алгебраическим уравнениям.

Если обе части уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ возвести в четную степень n , то корнями полученного уравнения $(f_1(x))^n = (f_2(x))^n$ будут все корни исходного уравнения $f_1(x) = f_2(x)$, а также уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$, а это означает, что могут появиться так называемые *посторонние корни* (корни уравнения

$f_1(x) = -f_2(x)$). В этом случае необходима проверка всех полученных корней.

Если обе части уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ возвести в нечетную степень k , то получим уравнение $(f_1(x))^k = (f_2(x))^k$, равносильное исходному в множестве действительных чисел \mathbf{R} .

Приступая к решению иррационального уравнения, целесообразно предварительно определить ОДЗ.

В общем случае трудно указать какой-либо универсальный метод решения произвольного иррационального уравнения, однако именно возведение обеих частей уравнения в некоторую степень является наиболее распространенной процедурой сведения иррационального уравнения к рациональному.

2.3.9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Показательным называется уравнение, содержащее неизвестное только в показателе степени.

Простейшим показательным уравнением является уравнение вида

$$a^{f(x)} = b, 0 < a \neq 1, b > 0. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.33) равносильно следующему уравнению:

$$f(x) = \log_a b.$$

Показательное уравнение вида $P_n(a^x) = 0$, где P_n — некоторый многочлен, заменой $y = a^x$ сводится к алгебраическому.

Далее, $a^{f_1(x)} = b^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) \log_c a = f_2(x) \log_c b$,

$$a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1.$$

Логарифмическим называется уравнение, содержащее неизвестные только под знаком логарифма.

Логарифмические уравнения, как и показательные, рассматриваются в множестве действительных чисел. Провер-

ка найденных значений неизвестного по условию уравнения в общем случае является обязательной.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение

$$\log_a f(x) = b \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow f(x) = a^b.$$

Далее,

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Если неизвестное в уравнении входит как в основание степени, так и в показатель, то такое уравнение называется *показательно-логарифмическим*.

Показательно-логарифмические уравнения чаще всего решают, логарифмируя обе части уравнения, приводя их к логарифмическим уравнениям.

При решении систем показательных и логарифмических уравнений в основном применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (введение новых неизвестных, операции над уравнениями системы и др.).

2.3.10. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Решением системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

с неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n называется множество значений неизвестных, обращающих одновременно все уравнения си-

стемы в тождества. Решить систему (2.34) означает найти все такие решения или доказать, что решений нет.

Две системы являются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Системой m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n называется система вида

3) $a < 0, D \geq 0$,

$$x \in \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right);$$

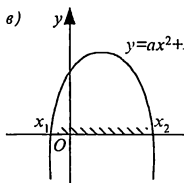
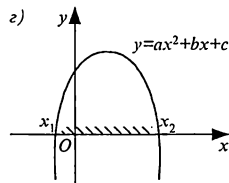
4) $a < 0, D < 0, \emptyset$.

Рис. 2.1 (продолжение)

Решение неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ сводится к решению рассмотренного выше неравенства, если обе части неравенства умножить на -1 .

2.4.4. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Предположим, что рассматривается дробно-рациональное неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ ($<, \geq, \leq$) и $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_k$ — корни многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ соответственно. Нанесем корни на числовую ось, тем самым разбивая ее на промежутки. В силу непрерывности дробно-рациональной функции $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на каждом из полученных

промежутков функция y знакопостоянна. Для нахождения знака y на данном промежутке достаточно вычислить значение функции в некоторой точке из этого промежутка. Выбрав промежутки, на которых функция y знакоположительна (знакоотрицательна), записываем ответ.

Отметим, что при определенных условиях (не всегда) знаки функции y на полученных промежутках чередуются.

2.4.5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Иррациональным неравенством называется неравенство, в котором неизвестные величины (или их рациональные функции) находятся под знаком радикала.

При решении иррационального неравенства приходится с учетом ОДЗ, как правило, возводить обе части неравенства в натуральную степень.

При возведении обеих частей неравенства в нечетную степень получается неравенство, равносильное исходному.

При возведении обеих частей неравенства в четную степень получается неравенство, равносильное исходному и имеющее тот же знак неравенства только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.

2.4.6. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решение показательных и логарифмических неравенств сводится к решению простейших:

$$1) a > 1, a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) < f_2(x);$$

$$2) 0 < a < 1, a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(x);$$

$$3) a > 1, \log_a f_1(x) < \log_a f_2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \\ f_1(x) < f_2(x); \end{cases}$$

$$4) 0 < a < 1, \log_a f_1(x) < \log_a f_2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \\ f_1(x) > f_2(x). \end{cases}$$

Аналогично рассматриваются простейшие показательные и логарифмические неравенства со знаками $>, \geq, \leq$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ТЕМА: ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ.

Вычислить (2.001—2.012).

$$2.001. \frac{\sqrt{7,2 \cdot 2,9} \left(\sqrt{\frac{7,2}{2,9}} - \sqrt{\frac{2,9}{7,2}} \right)}{\sqrt{(7,2+2,9)^2 - 4 \cdot 7,2 \cdot 2,9}}.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{7,2 \cdot 2,9} \left(\sqrt{\frac{7,2}{2,9}} - \sqrt{\frac{2,9}{7,2}} \right)}{\sqrt{(7,2+2,9)^2 - 4 \cdot 7,2 \cdot 2,9}} = \frac{\sqrt{7,2 \cdot 2,9} \frac{\sqrt{7,2^2 - 2,9^2}}{\sqrt{7,2 \cdot 2,9}}}{\sqrt{7,2^2 + 2 \cdot 7,2 \cdot 2,9 + 2,9^2 - 4 \cdot 7,2 \cdot 2,9}} = \frac{7,2 - 2,9}{\sqrt{(7,2 - 2,9)^2}} = 1.$$

Ответ: 1.

$$2.002. \left(\sqrt{\left(\sqrt{5 - \frac{5}{2}} \right)^2} - 3 \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{5} \right)^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение.

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt{5 - \frac{5}{2}} \right)^2} - 3 \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{5} \right)^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{5 - 2,5} - (1,5 - \sqrt{5}) \right)^{\frac{1}{2}} = (2,5 - \sqrt{5} - 1,5 + \sqrt{5})^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Ответ: 1.

$$2.003. \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^2 + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \\ &+ 2 - \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{4-3} = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 6.

$$2.004. \frac{2^{-2} + 5^0 + \left(\frac{4}{3} \right)^{-1}}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} - 4^1}.$$

Решение.

$$\frac{2^{-2}+5^0+\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-4^1}=\frac{\frac{1}{2^2}+1+\frac{3}{4}}{(0,5)^2-\frac{5}{(-2)^2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-4}=\frac{\frac{1}{4}+1+\frac{3}{4}}{0,25-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}-4}=\frac{2}{4+1-4}=2.$$

Ответ: 2.

2.005. $\frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{2,4}(\sqrt{15}+3).$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{2,4}(\sqrt{15}+3) &= \frac{3\sqrt{4\cdot 3}}{\sqrt{3\cdot 15}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{\frac{12}{5}}(\sqrt{15}+3)=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{15}-4\sqrt{3}}+\frac{5\sqrt{4\cdot 3}}{\sqrt{5}}(\sqrt{15}+3)= \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{15}-4)}+2\sqrt{15}(\sqrt{15}+3)=\frac{6}{\sqrt{15}-4}+30+6\sqrt{15}=\frac{6(\sqrt{15}+4)}{(\sqrt{15}-4)(\sqrt{15}+4)}+30+6\sqrt{15}=\frac{6(\sqrt{15}+4)}{15-16}+ \\ &+30+6\sqrt{15}=-6\sqrt{15}-24+30+6\sqrt{15}=6. \end{aligned}$$

Ответ: 6.

2.006. $3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}-\frac{7}{\sqrt{10}}\right).$

Решение.

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}-\frac{7}{\sqrt{10}}\right) &= 3\left(\frac{2(5-\sqrt{10})}{(5-\sqrt{10})(5+\sqrt{10})}+\frac{5(\sqrt{10}+2)}{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}-\frac{7\sqrt{10}}{10}\right)= \\ &= 3\left(\frac{2(5-\sqrt{10})}{25-10}+\frac{5(\sqrt{10}+2)}{10-4}-\frac{7\sqrt{10}}{10}\right)=3\left(\frac{4(5-\sqrt{10})}{30}+\frac{25(\sqrt{10}+2)}{30}-\frac{21\sqrt{10}}{30}\right)=\frac{20-4\sqrt{10}+25\sqrt{10}+50-21\sqrt{10}}{10}=\frac{70}{10}=7. \end{aligned}$$

Ответ: 7.

2.007. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+1).$

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+1) &= \left(\frac{15(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}+\frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}-\frac{12(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}\right)(\sqrt{6}+1)= \\ &= \left(\frac{15(\sqrt{6}-1)}{5}+\frac{4(\sqrt{6}+2)}{2}-\frac{12(3+\sqrt{6})}{3}\right)(\sqrt{6}+1)=(3\sqrt{6}-3+2\sqrt{6}+4-12-4\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)=(\sqrt{6}-11)(\sqrt{6}+1)=-115. \end{aligned}$$

Ответ: -115.

2.008. $\frac{7\sqrt{5-2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}}.$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \frac{7\sqrt{5-2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}} = \frac{7\sqrt{3-2\sqrt{3}\cdot 2+2(3+2\sqrt{3}\cdot 2+2)(49-20\sqrt{6})}}{\sqrt{9\cdot 3-3\sqrt{9}\cdot 2+3\sqrt{4}\cdot 3-\sqrt{4}\cdot 2}} = \\
 & = \frac{7\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2(49-20\sqrt{6})}}{3\sqrt{3}-9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2(49-20\sqrt{6})}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \frac{7(3-2)(\sqrt{3}+\sqrt{2})(49-20\sqrt{6})}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \\
 & = \frac{7(49\sqrt{3}-20\sqrt{18}+49\sqrt{2}-20\sqrt{12})}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \frac{7(49\sqrt{3}-60\sqrt{2}+49\sqrt{2}-40\sqrt{3})}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \frac{7(9\sqrt{3}-11\sqrt{2})}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = 7.
 \end{aligned}$$

Ответ: 7.

$$2.009. \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2} = \\
 & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{4-2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4-(2+\sqrt{3})} = \\
 & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$2.010. \left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} \right)^2.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\sqrt[3]{27+27\sqrt{2}+18+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{27-27\sqrt{2}+18-2\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\sqrt[3]{(3+\sqrt{2})^3} - \sqrt[3]{(3-\sqrt{2})^3} \right)^2 = \\
 & = (3+\sqrt{2}-3+\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8.
 \end{aligned}$$

Ответ: 8.

$$2.011. \sqrt{140\sqrt{2}-571} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{140\sqrt{2}-571} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} = -\sqrt{\left(\sqrt{140\sqrt{2}-571} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}\right)^2} = \\
 & = -\sqrt{140\sqrt{2}-571 - 2\sqrt{140\sqrt{2}-571}(40\sqrt{2}+57) + (40\sqrt{2}+57)^2} = -\sqrt{57-40\sqrt{2}-2\sqrt{(57-40\sqrt{2})(40\sqrt{2}+57)}+40\sqrt{2}+57} = \\
 & = -\sqrt{2\cdot 57-2\sqrt{57^2-2\cdot 40^2}} = -\sqrt{2\cdot 57-2\sqrt{49}} = -\sqrt{2(57-7)} = -\sqrt{100} = -10.
 \end{aligned}$$

Ответ: -10.

$$2.012. \sqrt[5]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}} + 7^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}} + 7^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} &= 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} - 3 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} - 11 \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} + \\ &+ 1 + 4 = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} (5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 11 + 2 \cdot 5) + 5 = 0 + 5 = 5. \end{aligned}$$

Ответ: 5.

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби (2.013—2.021).

$$2.013. \frac{8}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[8]{5}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{8}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[8]{5}} &= \frac{8}{\sqrt[8]{4} + \sqrt[8]{5}} = \frac{8 \left(\sqrt[8]{4^7} - \sqrt[8]{4^6 5} + \sqrt[8]{4^5 5^2} - \sqrt[8]{4^4 5^3} + \sqrt[8]{4^3 5^4} - \sqrt[8]{4^2 5^5} + \sqrt[8]{4 \cdot 5^6} - \sqrt[8]{5^7} \right)}{(\sqrt[8]{4} + \sqrt[8]{5}) \left(\sqrt[8]{4^7} - \sqrt[8]{4^6 5} + \sqrt[8]{4^5 5^2} - \sqrt[8]{4^4 5^3} + \sqrt[8]{4^3 5^4} - \sqrt[8]{4^2 5^5} + \sqrt[8]{4 \cdot 5^6} - \sqrt[8]{5^7} \right)} = \\ &= \frac{8}{4-5} \left(\sqrt[8]{4^3} - \sqrt[8]{4^2 5} + \sqrt[8]{4 \cdot 5^2} - \sqrt[8]{5^3} \right) \left(\sqrt[8]{4^4} + \sqrt[8]{5^4} \right) = -8 \left(\sqrt[8]{4} - \sqrt[8]{5} \right) \left(\sqrt[8]{4^2} + \sqrt[8]{5^2} \right) \left(\sqrt[8]{4^4} + \sqrt[8]{5^4} \right) = \\ &= 8 \left(\sqrt[8]{5} - \sqrt[8]{4} \right) \left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{5} \right) \left(2 + \sqrt{5} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 8 \left(\sqrt[8]{5} - \sqrt[8]{4} \right) \left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{5} \right) \left(2 + \sqrt{5} \right).$$

$$2.014. \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b \geq 0, a \neq b.$$

Решение.

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$$

$$2.015. \frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b \geq 0, a \neq b.$$

Решение.

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}.$$

2.016. $\frac{A}{b^{\frac{n}{k}}a^k}$, $n > k$, $a > 0$, $b \neq 0$.

Решение.

$$\frac{A}{b^{\frac{n}{k}}a^k} = \frac{A^{\frac{k}{n}}a^{\frac{n-k}{n}}}{b^{\frac{n}{k}}a^k \sqrt[n]{a^{\frac{n-k}{n}}}} = \frac{A^{\frac{k}{n}}a^{\frac{n-k}{n}}}{ba}.$$

Ответ: $\frac{A^{\frac{k}{n}}a^{\frac{n-k}{n}}}{ba}$.

2.017. $\frac{A}{\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}}$, $a+b \neq 0$.

Решение.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}.$$

Ответ: $\frac{A(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}$.

2.018. $\frac{A}{\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{b}}}$, $a \neq b$.

Решение.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{b}}} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{b}})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}.$$

Ответ: $\frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}$.

2.019. $\frac{A}{\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $(a+b-c)2-4ab \neq 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{A}{\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}} &= \frac{A(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}})(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{c})} = \frac{A(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{c})}{a+b-c+2\sqrt{ab}} = \frac{A(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c+2\sqrt{ab})(a+b-c-2\sqrt{ab})} \\ &= \frac{A(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ac}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{A(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ac}$.

2.020. $\frac{5+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{5+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{(5+\sqrt{2}+\sqrt{3})(5+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{2}-\sqrt{3})(5+\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{(5+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{25-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \frac{25+10(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{25-5-2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \\ &= \frac{25+10\sqrt{2}+10\sqrt{3}+5+2\sqrt{2}\sqrt{3}}{20-2\sqrt{6}} = \frac{(30+10\sqrt{2}+10\sqrt{3}+2\sqrt{6})(10+\sqrt{6})}{2(10-\sqrt{6})(10+\sqrt{6})} = \frac{(15+5\sqrt{2}+5\sqrt{3}+\sqrt{6})(10+\sqrt{6})}{(100-6)} = \\ &= \frac{150+50\sqrt{2}+50\sqrt{3}+10\sqrt{6}+15\sqrt{6}+10\sqrt{3}+15\sqrt{2}+6}{94} = \frac{156+65\sqrt{2}+60\sqrt{3}+25\sqrt{6}}{94}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{156+65\sqrt{2}+60\sqrt{3}+25\sqrt{6}}{94}.$

2.021. $\frac{a^2-a}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}.$

Решение.

ОДЗ: $0 < a \neq 1$.

$$\begin{aligned}\frac{a^2-a}{a^{\frac{3}{6}}-a^{\frac{2}{6}}} &= \frac{a(a-1)}{a^{\frac{1}{6}}(a^{\frac{5}{6}}-1)} = \frac{a^{\frac{2}{3}}(a-1)(a^{\frac{1}{6}}+1)}{(a^{\frac{1}{6}}-1)(a^{\frac{1}{6}}+1)} = \frac{a^{\frac{2}{3}}(a-1)(a^{\frac{1}{6}}+1)(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)}{(a^{\frac{1}{3}}-1)(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)} = \\ &= \frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{3}}}{(a+a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}})} = (\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}).\end{aligned}$$

Ответ: $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}).$

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (2.022—2.050).

2.022. $\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1}.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

$$\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1} = \frac{\left(x^2+\frac{1}{x}\right)x}{(x-1+\frac{1}{x})x} = \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} = x+1.$$

Ответ: $x+1$.

2.023. $\frac{x-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x(x-1)}{x+1}}.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq -1$.

$$\frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}} = \frac{\left(x - \frac{x-1}{x+1}\right)(x+1)}{\left(1 + \frac{x(x-1)}{x+1}\right)(x+1)} = \frac{x(x+1) - (x-1)}{x+1 + x(x-1)} = \frac{x^2 + x - x + 1}{x+1 + x^2 - x} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Ответ: 1.

$$2.024. \frac{\frac{1}{x^2+1}}{x + \frac{1}{x^2+1}} : \frac{1}{x^{1.5}-1}.$$

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

$$\frac{\frac{1}{x^2+1}}{x + \frac{1}{x^2+1}} : \frac{1}{x^{1.5}-1} = \frac{\frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)}}{\frac{1}{x+x^2+1}} = \frac{\frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)}(x+x^2+1)}{\frac{1}{x+x^2+1}} = x-1.$$

Ответ: $x-1$.

$$2.025. \frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}.$$

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

$$\frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{x^2}(x + x^2 + 1)}{\frac{1}{x^2} \frac{3}{(x^2-1)}} = \frac{x + x^2 + 1}{(x^2-1)(x + x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{(x^2-1)(\frac{1}{x^2} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x-1}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{x} + 1}{x-1}$.

$$2.026. \frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2 + (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2}{2(a-b)} : \frac{1}{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a \neq b, \\ a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2 + (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2}{2(a-b)} : \frac{1}{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} &= \frac{((a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})^2 + (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})^2)(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})}{2(a^2 - b^2)(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{(\frac{1}{a^2} + 2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}} + a^2 - 2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{2(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \frac{2(a^2 + b^2)(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{2(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})} + \\ &+ a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2. \end{aligned}$$

Ответ: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

$$2.027. \left(\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}{(x+y)^2} - \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}}.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0, y > 0, x+y \neq 0$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}{(x+y)^2} - \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} = \left(\frac{(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2})^2 - (x+y)}{(x+y)^2(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})} \right)^{-2} - \frac{x+y}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y-x-y}{(x+y)^2(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})} \right)^{-2} - \\ & - \frac{x+y}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{(x+y)^2(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} \right)^2 - \frac{x+y}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x+y)(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2}{4xy} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x+y)}{4xy} = \\ & = \frac{(x+y)(x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})}{4xy} = \frac{(x+y)^2}{4xy}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{(x+y)^2}{4xy}$.

$$2.028. \left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)^2.$$

Решение.

ОДЗ: $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} \right) (a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2 = (a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2 = \\ & = (a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2 = (a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2 = (a-b)^2. \end{aligned}$$

Ответ: $(a-b)^2$.

$$2.029. \left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2} + 2 - \frac{1-x+x^2}{2x-x^2} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{4-x^2}; \quad x = \sqrt{2,75}.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2} + 2 - \frac{1-x+x^2}{2x-x^2} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{4-x^2} = \left(\frac{1+x+x^2}{x(2+x)} + 2 - \frac{1-x+x^2}{x(2-x)} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{4-x^2} = \\
 & = \left(\frac{(2-x)(1+x+x^2) + 2x(2+x)(2-x) - (2+x)(1-x+x^2)}{x(2+x)(2-x)} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{4-x^2} = \\
 & = \left(\frac{2+2x+2x^2-x-x^2-x^3+8x-2x^3-2+2x-2x^2-x+x^2-x^3}{x(4-x^2)} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{4-x^2} = \left(\frac{10x-4x^3}{x(4-x^2)} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{4-x^2} = \\
 & = \frac{x(4-x^2)}{x(10-4x^2)} \cdot \frac{2}{4-x^2} = \frac{1}{5-2x^2}.
 \end{aligned}$$

Отсюда при $x = \sqrt{2,75}$ имеем:

$$\frac{1}{5-2 \cdot 2,75} = \frac{1}{5-5,5} = -\frac{1}{0,5} = -2.$$

Ответ: -2.

$$2.030. \frac{\sqrt{\frac{xyz+4}{x}} - 4\sqrt{\frac{yz}{x}}}{\sqrt{xyz-2}}; x=0,01.$$

Решение.

ОДЗ: $yz \geq 0, yz \neq 400$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{\frac{xyz+4}{x}} - 4\sqrt{\frac{yz}{x}}}{\sqrt{xyz-2}} &= \frac{\sqrt{\frac{xyz+4}{x}} - \frac{4\sqrt{yz}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{xyz-2}} = \frac{\sqrt{\frac{xyz-4\sqrt{xyz}+4}{x}}}{\sqrt{xyz-2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{xyz}-2)^2}}{\sqrt{x}(\sqrt{xyz}-2)} = \frac{|\sqrt{xyz}-2|}{\sqrt{0,01}(\sqrt{xyz}-2)} = 10 \cdot \frac{10,1\sqrt{yz}-21}{(0,1\sqrt{yz}-2)} = A.
 \end{aligned}$$

Возможны два случая:

1) $0 \leq yz < 400, A = -10$; 2) $yz > 400, A = 10$.Ответ: -10 при $0 \leq yz < 400$; 10 при $yz > 400$.

$$2.031. \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1} + \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}} \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4+x+2}}.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 2$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1} + \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}} \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4+x+2}} = \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1}-1} + \frac{\sqrt{x+2+2\sqrt{(x+2)(x-2)}+x-2} \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4+x+2}} = \\
 & = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1}-1} + \frac{\sqrt{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2} \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt{(x+2)(x-2)}+\sqrt{(x+2)^2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}}{\sqrt{x-1}-1} + \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})} = \frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}-1} + 1 = 2.
 \end{aligned}$$

Ответ: 2.

2.032. $\frac{2x - x|x-1| + x|x| + 5}{|x| + 1}$.

Решение.

$$\frac{2x - x|x-1| + x|x| + 5}{|x| + 1} = \begin{cases} \frac{2x + x(x-1) - x^2 + 5}{-x+1} = \frac{x+5}{1-x} & \text{при } x \in (-\infty; 0), \\ \frac{2x + x(x-1) + x^2 + 5}{x+1} = \frac{2x^2 + x + 5}{x+1} & \text{при } x \in [0; 1), \\ \frac{2x - x(x-1) + x^2 + 5}{x+1} = \frac{3x+5}{x+1} & \text{при } x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

Ответ: $\frac{x+5}{1-x}$ при $x \in (-\infty; 0)$; $\frac{2x^2 + x + 5}{x+1}$ при $x \in [0; 1)$; $\frac{3x+5}{x+1}$ при $x \in [1; +\infty)$.

2.033. $\frac{\sqrt{x}\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{|2x^2 - x - 1|}$.

Решение.

ОДЗ: $0 \leq x \neq 1$.

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{|2x^2 - x - 1|} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{|2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)|} = \frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{|(x-1)(2x+1)|} = \frac{|2x+1|}{|x-1| \cdot |2x+1|} = \frac{1}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{при } x \in [0; 1), \\ \frac{1}{x-1} & \text{при } x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{1-x}$, если $x \in [0; 1)$; $\frac{1}{x-1}$, если $x \in (1; +\infty)$.

2.034. $\left(\frac{x-9}{x+3x^{\frac{1}{2}}+9} : \frac{x^{\frac{1}{2}}+3}{x^{\frac{3}{2}}-27} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Решение.

ОДЗ: $0 \leq x \neq 9$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-9}{x+3x^{\frac{1}{2}}+9} : \frac{x^{\frac{1}{2}}+3}{x^{\frac{3}{2}}-27} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{(x-9)(x^{\frac{1}{2}}-3)(x+3x^{\frac{1}{2}}+9)}{(x+3x^{\frac{1}{2}}+9)(x^{\frac{1}{2}}+3)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(x^{\frac{1}{2}}-3)(x^{\frac{1}{2}}+3)(x^{\frac{1}{2}}-3)}{(x^{\frac{1}{2}}+3)} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{(x^{\frac{1}{2}}-3)^2} = \sqrt{x} - 3 = \begin{cases} 3 - \sqrt{x} & \text{при } x \in [0; 9), \\ \sqrt{x} - 3 & \text{при } x \in (9; +\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $3 - \sqrt{x}$ при $x \in [0; 9)$; $\sqrt{x} - 3$ при $x \in (9; +\infty)$.

2.035. $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \left(\sqrt{x^{-2}-1} - \frac{1}{x} \right), x > 0$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x < 1$.

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \left(\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x} \right) = \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)} - (\sqrt{1-x})^2} \right) \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{x} \right) = \\
 & = \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \right) \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(1+x)-(1-x)} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \\
 & = \frac{2+2\sqrt{(1+x)(1-x)}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{(1+\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2} = \frac{(1-x^2)-1}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} = -1.
 \end{aligned}$$

Ответ: -1.

2.036. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} - 2\sqrt{x-2}.$

Решение.

ОДЗ: $x \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} - 2\sqrt{x-2} = \sqrt{x-2+2\sqrt{2(x-2)}+2} + \sqrt{x-2-2\sqrt{2(x-2)}+2} - 2\sqrt{x-2} = \\
 & = \sqrt{(\sqrt{x-2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x-2} + (\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{x-2} + (\sqrt{2})^2} - 2\sqrt{x-2} = \sqrt{(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})^2} + \\
 & + \sqrt{(\sqrt{x-2} - \sqrt{2})^2} - 2\sqrt{x-2} = \sqrt{x-2} + \sqrt{2} + |\sqrt{x-2} - \sqrt{2}| - 2\sqrt{x-2} = \sqrt{x-2} + \sqrt{2} + |\sqrt{x-2} - \sqrt{2}| - \\
 & - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-2} - \sqrt{2} + |\sqrt{x-2} - \sqrt{2}| = \begin{cases} -\sqrt{x-2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{x-2} & \text{при } \sqrt{x-2} - \sqrt{2} < 0, 2 \leq x < 4; \\ \sqrt{x-2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{x-2} = 0 & \text{при } \sqrt{x-2} - \sqrt{2} \geq 0, x \geq 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{2} - 2\sqrt{x-2}$, если $x \in [2; 4)$; 0, если $x \in [4; \infty)$.

2.037. $\frac{6\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}(a+\sqrt{a^2-9})}.$

Решение.

ОДЗ: $a \geq 3$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{6\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}(a+\sqrt{a^2-9})} = \frac{6(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})}{(\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3})(a+\sqrt{a^2-9})} = \frac{6(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})^2}{(\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3})(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})(a+\sqrt{a^2-9})} = \\
 & = \frac{6(a+3+2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3)}{((a+3)-(a-3))(a+\sqrt{a^2-9})} = \frac{6(2a+2\sqrt{a^2-9})}{6(a+\sqrt{a^2-9})} = 2.
 \end{aligned}$$

Ответ: 2.

2.038. $\frac{\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}.$

Решение.

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|} = \frac{\sqrt{x^2-2x+1+4x}}{x^2+2|x|+1} = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{(|x|+1)^2} = \frac{|x+1|}{(|x|+1)^2}.$$

Раскрывая модули, получаем три случая:

$$1) \begin{cases} x < -1, \\ -(x+1) \\ (1-x)^2 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} -1 \leq x < 0, \\ x+1 \\ (1-x)^2 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x \geq 0, \\ x+1 \\ (x+1)^2 \end{cases} = \frac{1}{x+1}.$$

Ответ: $\frac{-(x+1)}{(1-x)^2}$, если $x \in (-\infty; -1)$; $\frac{x+1}{(1-x)^2}$, если $x \in [-1; 0)$; $\frac{1}{x+1}$, если $x \in [0; +\infty)$.

$$2.039. \frac{((\sqrt{x} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{2x})(x - \sqrt{2x} + 1)}{x^2 + x - \sqrt{2x} + 2}.$$

Решение.

ОДЗ: $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{((\sqrt{x} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{2x})(x - \sqrt{2x} + 1)}{x^2 + x - \sqrt{2x} + 2} &= \frac{(x + 2\sqrt{2x} + 2 - \sqrt{2x})(x - \sqrt{2x} + 1)}{(x^2 + x\sqrt{2x} + 2x) - (x\sqrt{2x} + \sqrt{2x}\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x}) + (x + \sqrt{2x} + 2)} = \\ &= \frac{(x + \sqrt{2x} + 2)(x - \sqrt{2x} + 1)}{x(x + \sqrt{2x} + 2) - \sqrt{2x}(x + \sqrt{2x} + 2) + (x + \sqrt{2x} + 2)} = \frac{x - \sqrt{2x} + 1}{x - \sqrt{2x} + 1} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$2.040. \left(\frac{\sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} \right) : \left(\frac{a - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} - 1} - \frac{a + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} + 1} \right).$$

Решение.

ОДЗ: $0 < a \neq 1, b > 0$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} \right) : \left(\frac{a - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} - 1} - \frac{a + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} + 1} \right) &= \left(\frac{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} \right) : \left(\frac{\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2} - 1)}{\sqrt[3]{a} - 1} - \frac{\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a} + 1)}{\sqrt[3]{a} + 1} \right) = \\ &= \left(a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}} + \frac{1 - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}}} \right) : \left(a^{\frac{1}{3}} (a^{\frac{1}{3}} + 1) - a^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + 1 - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}}} : (a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{7}{12}} \cdot b^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

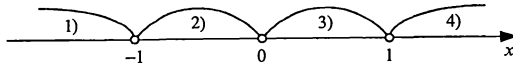
Ответ: $a^{-\frac{7}{12}} b^{-\frac{1}{4}}$.

$$1.041. \left(\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 12 \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} & \left(\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 12 \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \left(\left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \right)^2 - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 12 \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \\ & = \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^4 - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4 - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 12 \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^4 - 8 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 16 \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \\ & = \left(\left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 4 \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 4 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 4} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \\ & = \sqrt{\left(x - \frac{1}{x} \right)^2} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \left| x - \frac{1}{x} \right| \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1} \cdot \frac{x}{|x|} = A. \end{aligned}$$



Раскрывая модули с учетом ОДЗ, получаем четыре случая (см. рис.):

$$1) x < -1, A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x}{-x} = -1;$$

$$2) -1 < x < 0, A = \frac{-(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x}{-x} = 1;$$

$$3) 0 < x < 1, A = \frac{-(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x}{x} = -1;$$

$$4) x > 1, A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x}{x} = 1.$$

Ответ: -1 , если $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; 1 , если $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

$$2.042. \frac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{\frac{3}{2}}+x^2)}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x^2+2xy})} \cdot (x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{6}}+x)(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x+2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y \geq -\frac{x}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{\frac{3}{2}}+x^2)}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x^2+2xy})} \cdot (x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{6}}+x)(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})} = \frac{\sqrt{x^2(x+2y)}+\sqrt{x^3(x+2y)}-x^{\frac{3}{2}}(1+x^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x(x+2y)})} \cdot x^{\frac{2}{3}}(1-x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{6}}+1)} = \\ & = \frac{x\sqrt{x+2y}+x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+2y}-x^{\frac{3}{2}}(1+x^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x(x+2y)})} \cdot x(x^{\frac{1}{6}}+1)(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+1)} = \frac{\sqrt{x+2y}(1+x^{\frac{1}{2}})-x^{\frac{3}{2}}(1+x^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{x+2y-2\sqrt{x(x+2y)}}+x(1+x^{\frac{1}{2}})} = \\ & = \frac{\sqrt{x+2y}-x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x})^2}} = \frac{\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}}{|\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}|} = A. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ y \geq -\frac{x}{2}, \\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{x} < 0, \sqrt{x+2y} < \sqrt{x}, x+2y < x, y < 0, \\ A = \frac{\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}}{-(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x})} = -1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x > 0, \\ y \geq -\frac{x}{2}, \\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{x} > 0, \sqrt{x+2y} > \sqrt{x}, x+2y > x, y > 0, \\ A = \frac{\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}} = 1. \end{cases}$$

Ответ: 1, если $x \in (0; \infty)$, $y \in (0; \infty)$; -1, если $x \in (0; \infty)$, $y \in [-\frac{x}{2}; 0)$.

$$2.043. \frac{(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}})(x-4)}{x\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 4$.

$$\begin{aligned}
 \frac{(\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4})(x-4)}{x\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}} &= \frac{(\sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4})(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+16}} = \\
 &= \frac{(\sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4} + \sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4})(x-4)}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2})(x-4)}{|x-4|} = \\
 &= |\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| = \sqrt{x-4}+2+|\sqrt{x-4}-2| = A.
 \end{aligned}$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем два случая:

- 1) $\begin{cases} 4 < x < 8, \\ A = \sqrt{x-4} + 2 - \sqrt{x-4} + 2 = 4; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x \geq 8, \\ A = \sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2 = 2\sqrt{x-4}. \end{cases}$

Ответ: 4, при $4 < x < 8$; $2\sqrt{x-4}$ при $8 \leq x < \infty$.

$$2.044. \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pm 1$.Пусть A — искомое выражение. Имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} &= \frac{1+x+1-x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}, \quad \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2+2x^2+2-2x^2}{1-x^4} = \frac{4}{1-x^4}, \\
 \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} &= \frac{8}{1-x^8}, \quad \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{16}{1-x^{16}}, \quad \frac{16}{1-x^{16}} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{32}{1-x^{32}}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{32}{1-x^{32}}.$$

$$2.045. \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение.

ОДЗ: $a \neq b, b \neq c, c \neq a$.

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = \frac{(b-c)-(a-c)+(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0.$$

Ответ: 0.

$$2.046. \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение.

ОДЗ: $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{A}{B},$$

$$\begin{aligned} A &= a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = a^2(b-c)+(b^2c-c^2b)+(c^2a-b^2a) = a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2) = \\ &= (b-c)(a^2+bc-ab-ac) = (b-c)[(a^2-ab)+(bc-ac)] = (b-c)[a(a-b)-c(a-b)] = (a-b)(b-c)(a-c) = B. \Rightarrow \frac{A}{B} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$2.047. \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Решение.

ОДЗ: $a \neq -b$, $b \neq -c$, $c \neq -a$.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c}\right) + \left(\frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right) = \frac{(a-b)(b+c)+(b-c)(a+b)}{(a+b)(b+c)} + \frac{(c-a)[(a+b)(b+c)+(a-b)(b-c)]}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \\ &= \frac{ab-b^2+ac-bc+ab-ac+b^2-bc}{(a+b)(b+c)} + \frac{(c-a)(ab+b^2+ac+bc+ab-b^2-ac+bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2ab-2bc}{(a+b)(b+c)} + \frac{(c-a)(2ab+2bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \\ &= \frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)} + \frac{2b(a+c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)} - \frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

$$2.048. \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0, -1, -2, -3, -4, -5$.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{5}{x(x+5)}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5}{x(x+5)}.$

2.049. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}})$.

Решение.

$$1) \ x \neq 1, (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)\dots(x^{2^{n-1}}+1)}{x-1} = \\ = \frac{(x^2-1)(x^2+1)\dots(x^{2^{n-1}}+1)}{x-1} = \frac{(x^4-1)(x^4+1)\dots(x^{2^{n-1}}+1)}{x-1} = \frac{(x^{2^n}-1)(x^{2^{n-1}}+1)}{x-1} = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}.$$

2) $x=1, \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{n} = 2^n$.

Ответ: $\frac{x^{2^n}-1}{x-1}$ при $x \neq 1$; 2^n при $x=1$.

2.050. $(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\dots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n})$.

Решение.

$$1) \ x \neq a, (x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\dots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}) = \\ = \frac{(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\dots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\dots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\dots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}) = \\ = \frac{(x^3+a^3)(x^6+a^6)(x^{12}+a^{12})\dots(x^{3 \cdot 2^{n-1}}+a^{3 \cdot 2^{n-1}})}{(x^3+a^3)(x^6+a^6)(x^{12}+a^{12})\dots(x^{3 \cdot 2^{n-1}}+a^{3 \cdot 2^{n-1}})} = \frac{x^{3 \cdot 2^n}-a^{3 \cdot 2^n}}{x^3-a^3} \cdot \frac{x-a}{x^{2^n}-a^{2^n}} = \frac{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}{x^2+ax+a^2}.$$

2) $x=a$, непосредственным подсчетом получаем $3^n a^{2(2^n-1)}$;

3) $x=a$, непосредственным подсчетом имеем $a^{2(2^n-1)}$.

Ответ: $\frac{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}{x^2+ax+a^2}$ при $x \neq a$; $3^n a^{2(2^n-1)}$ при $x=-a$; $a^{2(2^n-1)}$ при $x=a$.

Разложить на множители (2.051–2.060).

2.051. x^4+4 .

Решение.

$$x^4+4=x^4+4+4x^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

Квадратные трехчлены имеют отрицательные дискриминанты и действительных корней не имеют.

Ответ: $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

2.052. $x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1$.

Решение.

$$x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1=x^4(x+1)+2x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^4+2x^2+1)=(x+1)(x^2+1)^2.$$

Ответ: $(x+1)(x^2+1)^2$.

2.053. x^5+1 .*Решение.*

$$\begin{aligned}
 x^5+1 &= (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) = (x+1)x(x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x+\frac{1}{x}\right)+1) = (x+1)x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-1 = \\
 &= (x+1)x^2\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = (x+1)\left(x^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right).
 \end{aligned}$$

Ответ: $(x+1)\left(x^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right)$.

2.054. x^3+5x^2+3x-9 .*Решение.*

$$x^3+5x^2+3x-9=x^3-1+5x^2-5+3x-3=(x-1)(x^2+x+1)+5(x-1)(x+1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+x+1+5x+5+3)=(x-1)(x^2+6x+9)=(x-1)(x+3)^2.$$

Ответ: $(x-1)(x+3)^2$.

2.055. $2x^4-7x^3+9x^2-5x+1$.*Решение.*

Легко видеть, что $x=1$ — корень многочлена. Поделим исходный многочлен $P_4(x)$ на $x-1$ по схеме Горнера:

$a_4=2$	$a_3=-7$	$a_2=9$	$a_1=-5$	$a_0=1$
$b_3=2$	$b_2=-5$	$b_1=4$	$b_0=-1$	$R=0$

Таким образом, $P_4(x)=(x-1)Q_3(x)$, где $Q_3(x)=2x^3-5x^2+4x-1$. $x=1$ — корень $Q_3(x)$. Поделим $Q_3(x)$ на $x-1$ по схеме Горнера:

$a_4=2$	$a_3=-7$	$a_2=9$	$a_1=-5$	$a_0=1$
$b_3=2$	$b_2=-5$	$b_1=4$	$b_0=-1$	$R=0$

Получили $P_4(x)=(x-1)^2(2x^2-3x+1)=(x-1)^2 \cdot 2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-1)^3(2x-1)$.

Ответ: $(x-1)^3(2x-1)$.

2.056. $x^3+9x^2+11x-21$.*Решение.*

Легко видеть, что $x=1$ — корень исходного многочлена $P_3(x)$. Поделим $P_3(x)$ на $x-1$ по схеме Горнера:

$a_3=1$	$a_2=9$	$a_1=11$	$a_0=-21$
$b_2=1$	$b_1=10$	$b_0=21$	$R=0$

Таким образом, $P_3(x)=(x-1)(x^2+10x+21)=(x-1)(x+3)(x+7)$.

Ответ: $(x-1)(x+3)(x+7)$.

2.057. $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz$.

Решение.

$$(x^2y+xy^2)+(xz^2+yz^2)+(x^2z+y^2z+2xyz)=xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2+zx+zy)=(x+y)[x(y+z)+z(y+z)]=(x+y)(y+z)(z+x).$$

Ответ: $(x+y)(y+z)(z+x)$.

2.058. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.

Решение.

$$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=[(y-x)+(x-z)]^3+(z-x)^3+(x-y)^3=(y-x)^3+3(y-x)(x-z)[(y-x)+(x-z)]+(x-z)^3-(x-z)^3-(y-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Ответ: $3(x-y)(y-z)(z-x)$.

2.059. $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$.

Решение.

$$x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz=(x^2y+xy^2+xyz)+(x^2z+xz^2+xyz)+(y^2z+yz^2+xyz)=xy(x+y+z)+xz(x+y+z)+yz(x+y+z)=(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

Ответ: $(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

2.060. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

Решение.

Заметим, что при $x=-y$, $z=-x$, $y=-z$ данное выражение обращается в нуль. Следовательно, по теореме Безу оно делится на $x+y$, $x+z$, $y+z$ без остатка. Таким образом, $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=C(x+y)(x+z)(y+z)$, где C — частное от деления данного выражения на произведение трех выделенных множителей. Рассматривая левую и правую части последнего равенства как многочлены относительно x и учитывая, что в равных многочленах коэффициенты при одинаковых степенях x равны, получаем сравнением коэффициентов при x^2 , что $C=3$.

Ответ: $3(x+y)(x+z)(y+z)$.

2.061. Выполнить деление с остатком $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ на x^2-3x+1 .

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-3x^3+4x^2-5x+6 & x^2-3x+1 \\ \underline{2x^4-6x^3+2x^2} & 2x^2+3x+1 \\ 3x^3+2x^2-5x & \\ \underline{3x^3-9x^2+3x} & \\ 11x^2-8x+6 & \\ \underline{11x^2-33x+11} & \\ 25x-5 & \end{array}$$

Таким образом, $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6=(x^2-3x+1)(2x^2+3x+1)+25x-5$.

Ответ: частное $2x^2+3x+1$, остаток $25x-5$.

2.062. Выполнить деление с остатком $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 - x - 1 \\
 \underline{-x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x} \\
 -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 \\
 \underline{-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}} \\
 -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}
 \end{array}$$

Таким образом, $x^3 - 3x^2 - x - 1 = (3x^2 - 2x + 1) \left(\frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \right) - \left(\frac{26}{9}x + \frac{2}{9} \right)$.

Ответ: частное $\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$, остаток $-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$.

2.063. При каких условиях многочлен $x^3 + px + q$ делится на многочлен $x^2 + mx - 1$?

Решение.

Требуется, чтобы выполнялось следующее тождество:

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx - 1)(Ax + B), \quad x^3 + px + q = Ax^3 + Amx^2 - Ax + Bx^2 + Bmx - B, \quad x^3 + px + q = Ax^3 + (Am + B)x^2 + (Bm - A)x - B.$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают. Таким образом, имеем:

$$A = 1, B = -q, m - q = 0, -qm - 1 = p \Rightarrow q = m, p = -m^2 - 1.$$

Ответ: $q = m, p = -m^2 - 1$.

2.064. При каких условиях многочлен $x^4 + px^2 + q$ делится на многочлен $x^2 + mx + 1$?

Решение.

Требуется, чтобы выполнялось следующее тождество:

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + mx + 1)(Ax^2 + Bx + C), \quad x^4 + px^2 + q = Ax^4 + Amx^3 + Ax^2 + Bx^3 + Bmx^2 + Bx + Cx^2 + Cmx + C,$$

$$x^4 + px^2 + q = Ax^4 + (Am + B)x^3 + (A + Bm + C)x^2 + (B + Cm)x + C.$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают. Таким образом, имеем:

$$A = 1, m + B = 0, p = 1 + Bm + C, B + Cm = 0, C = q \Rightarrow A = 1, B = -m, C = q, p = 1 - m^2 + q, -m + qm = 0 \Rightarrow m(q - 1) = 0, p = 1 - m^2 + q.$$

Возможны два случая:

а) $m = 0, p = 1 + q$; б) $m \neq 0, q = 1, p = 2 - m^2$.

Ответ: если $m = 0$, то $p = 1 + q$; если $m \neq 0$, то $p = 2 - m^2, q = 1$.

2.065. Доказать, что произведение $(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m+1}-1)$ делится на $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)$, где $m \in \mathbb{N}$.

Решение.

Среди трех последовательных целых чисел $m-1, m, m+1$ одно делится на 3 и по крайней мере одно число четное. Тот из двучленов x^k-1 ($k=m-1, m, m+1$), у которого k — четное, разделится на x^2-1 ; у которого k кратно трем, разделится на x^3-1 , оставшийся разделится на $x-1$.

Что и требовалось доказать.

2.066. Доказать, что многочлен $x^{3k}+x^{32}+x^{28}$ делится на x^2+x+1 , где $k \in \mathbb{N}$.

Решение.

Пусть x_1, x_2 — комплексно-сопряженные корни трехчлена $x^2+x+1=0$, тогда $x_i^2+x_i+1=0$ и $x_i^3=1$ ($i=1, 2$). Следовательно, по $x_i^{3k}+x_i^{32}+x_i^{28} = (x_i^3)^k + (x_i^3)^0 x_i^2 + (x_i^3)^9 x_i = 1+x_i^2+x_i=0$. По теореме Безу данный многочлен делится на $x-x_1, x-x_2$, а следовательно, и на их произведение $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+x+1$.

Что и требовалось доказать.

2.067. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок в выражении $(1+4x-4x^2)^{175}(1+2x)^5(1-3x+x^2+2x^3)^{149}$.

Решение.

После раскрытия скобок получается многочлен $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Ясно, что сумма его коэффициентов

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = P_n(1) = (1+4-4)^{175} (1+2)^5 (1-3+1+2)^{149} = 1^{175} \cdot 3^5 \cdot 1^{149} = 3^5 = 243.$$

Ответ: 243.

2.068. Доказать, что многочлен $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

Решение.

Кратный корень x_0 многочлена $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ должен быть также корнем его производной

$$f'(x) = 1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x) - \frac{x^n}{n!}. \text{ В этом случае } f'(x_0) = f(x_0) = 0 \text{ и } x_0 = 0, \text{ но } 0 \text{ не является корнем } f(x).$$

Что и требовалось доказать.

2.069. Разложить рациональную дробь $\frac{3x}{x^3-1}$ в сумму простейших.

Решение.

Имеет место тождество: $\frac{3x}{x^3-1} = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$, где A, B, C — неопределенные пока коэффициенты.

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} \Leftrightarrow Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C = 3x \quad (x \neq 1).$$

Получили тождество:

$$(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)=3x \Rightarrow \begin{cases} A+B=0, \\ A-C=0, \\ A-B+C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A, \\ C=A, \\ 3A=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=1. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1}$.

2.070. Разложить рациональную дробь $\frac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2}$ в сумму простейших.

Решение.

Имеем место тождество: $\frac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$, где A, B, C, D, E — неопределенные пока коэффициенты.

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x^4+2x^2+1) + (Bx+C)(x^3+x^2+x+1) + Dx^2 + Dx + Ex + E = 4x(x^2+1).$$

Получили тождество: $Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^3 + Bx^2 + Bx + Cx^3 + Cx^2 + Cx + C + Dx^2 + Dx + Ex + E = 4x^3 + 4x$.

$$(A+B)x^4 + (B+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (B+C+D+E)x + A+C+E = 4x \Rightarrow \begin{cases} A+B=0, \\ B+C=0, \\ 2A+B+C+D=0, \\ B+C+D+E=4, \\ A+C+E=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A, \\ C=A, \\ D=-2A, \\ E=-2A, \\ -4A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1, \\ B=1, \\ C=-1, \\ D=2, \\ E=2. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^2}$.

2.071. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$.

Решение.

$$3^3 f(x) = 3^4 x^4 + 5 \cdot 3^3 x^3 + 3 \cdot 3^2 x^2 + 5 \cdot 3 x - 3^3 \cdot 2 = (3x)^4 + 5(3x)^3 + 3(3x)^2 + 45(3x) - 54 = \begin{bmatrix} y = 3x \\ x = \frac{y}{3} \end{bmatrix} = y^4 + 5y^3 + 3y^2 + 45y - 54 = \varphi(y).$$

Будем искать рациональные корни многочлена $\varphi(y)$. Они обязательно целые (если существуют) и находятся среди делителей свободного члена. $\varphi(1) = 0$. Поделим $\varphi(y)$ на $y-1$ по схеме Горнера:

1	5	3	45	-54
1	6	9	54	0

Таким образом, $\varphi(y) = (y-1)\psi(y)$, где $\psi(y) = y^3 + 6y^2 + 9y + 54$.

Ищем целые корни многочлена $\psi(y)$ среди делителей свободного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm 54$. Заметим, что если α — целый корень, то $\psi(y) = (y-\alpha)q(y)$ и $q(1) = \frac{\psi(1)}{1-\alpha}$, $q(-1) = \frac{\psi(-1)}{-(\alpha+1)}$ — целые корни, следовательно, среди делителей нужно проверять

лишь те, для которых $\frac{\psi(1)}{\alpha-1}$ и $\frac{\psi(-1)}{\alpha+1}$ — целые числа. $\psi(1) = 70$, $\psi(-1) = 50$. Проверая делители, убеждаемся, что все они могут быть отброшены, за исключением $\alpha = -6$. Поделим $\psi(y)$ на $y+6$ по схеме Горнера:

1	6	9	54
1	0	9	0

Таким образом, $y = -6$ — второй рациональный корень, а $y^2 + 9$ — очевидно, рациональных корней не имеет. Ясно, что $\psi(3x)$ и $f(x)$ имеют одинаковые корни, следовательно, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -2$ — рациональные корни.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -2$.

2.072. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Решение.

Рациональные корни $f(x)$ обязательно целые и находятся среди делителей свободного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$. $f(1) = -4$, $f(-1) = -36$.

Если α — целый корень, то должны быть целыми числа $\frac{f(1)}{\alpha-1}$, $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ (см. 2.071). Используя это, отбрасываем возможности $-2, \pm 7, \pm 14$. Остается испытать $x=2$. Поделим $f(x)$ на $x-2$ по схеме Горнера:

1	-6	15	-14
1	-4	7	0

Остаток $R=0$, следовательно, $x=2$ — единственный рациональный корень $f(x)$.

Ответ: 2.

2.073. При каких целых значениях параметра a многочлен $x^4 + ax + 1$ имеет рациональные корни?

Решение.

Как было уже отмечено ранее, рациональные корни приведенного многочлена $f(x) = x^4 + ax + 1$ с необходимостью целые.

Если $n \in \mathbb{Z}$ — некоторый целый корень, то $n^4 + an + 1 = 0 \Leftrightarrow n^3 + a = -\frac{1}{n}$ ($n \neq 0$), следовательно, $-\frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$, т.е. $n = \pm 1$.

При $n=1$ $1^4 + a \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -2$; а при $n=-1$ $(-1)^4 - a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Ответ: при $a = \pm 2$.

2.074. Построить многочлен наименьшей степени, имеющий данные корни: двойной корень 1, простые 2 и 3.

Решение.

Искомый многочлен $f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, где коэффициенты находятся по формулам Виета:

$$a_3 = -(1+1+2+3) = -7, \quad a_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 17, \quad a_1 = -(1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3) = -17, \quad a_0 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Таким образом, $f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.

Ответ: $f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.

2.075. Построить многочлен наименьшей степени, имеющий данные корни: 2, 4, -1.

Решение.

Искомый многочлен $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, где коэффициенты находятся по формулам Виета:

$$a_2 = -(2+4-1) = -5, \quad a_1 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) = 8 - 2 - 4 = 2, \quad a_0 = -(2 \cdot 4 \cdot (-1)) = 8.$$

Таким образом, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.

Ответ: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.

ТЕМА: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.076. Не решая квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, найти $x_1^{-2}+x_2^{-2}+(x_1x_2)^{-1}$.

Решение.

По теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$, $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} x_1^{-2}+x_2^{-2}+(x_1x_2)^{-1} &= \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1x_2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2} + \frac{a}{c} = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} + \frac{a}{c} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} + \frac{a}{c} = \\ &= \frac{b^2-2ac}{a^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} + \frac{ac}{c^2} = \frac{b^2-ac}{c^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{b^2-ac}{c^2}$.

2.077. Не решая квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, найти сумму кубов его корней.

Решение.

По теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$, $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} x_1^3+x_2^3 &= (x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2) = (x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}\right) = -\frac{b(b^2-3ac)}{a^3} = \\ &= -\frac{b^3-3abc}{a^3} = \frac{3abc-b^3}{a^3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3abc-b^3}{a^3}$.

2.078. Вычислить $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$, где x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2-3ax-2=0$.

Решение.

По теореме Виета $x_1+x_2=\frac{3a}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = -1$. Используя решение предыдущей задачи, получаем, что

$$\begin{aligned} x_1^3+x_2^3 &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 3a \cdot 2 + 27a^3}{8} = \frac{36a+27a^3}{8}. \\ \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} &= \frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^3} = \frac{36a+27a^3}{-8}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{27a^3+36a}{8}$.

2.079. При каких значениях a уравнение $9x^2 - 2x + a - 6 = 0$ имеет равные корни?

Решение.

Запишем теорему Виета для квадратного уравнения $9x^2 + (a-2)x + (a-6) = 0$, учитывая, что $x_1 = x_2$, получаем:

$$x_1 + x_2 = \frac{a-2}{9}, \quad x_1 x_2 = \frac{a-6}{9} \Rightarrow 2x_1 = \frac{a-2}{9}, \quad x_1^2 = \frac{a-6}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{a-2}{18}, \quad \frac{(a-2)^2}{18^2} = \frac{a-6}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 36a - 6 \cdot 36 \Leftrightarrow a^2 - 40a + 220 = 0, D = 40^2 - 4 \cdot 220 = 40(40 - 22) = 40 \cdot 18 = 16 \cdot 9 \cdot 5, a_{1,2} = 20 \pm 6\sqrt{5}.$$

Ответ: $a_{1,2} = 20 \pm 6\sqrt{5}$.

2.080. Составить квадратное уравнение с корнями $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Решение.

Пусть $y^2 + py + q = 0$ есть искомое уравнение с корнями $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$. Из условия по теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \quad \text{Тогда} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = -p \\ y_1 y_2 = q \end{cases}$$

$$p = -(y_1 + y_2) = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = -\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c}, \quad q = y_1 y_2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a}{c}.$$

Получили уравнение $y^2 + \frac{b}{c}y + \frac{a}{c} = 0$, $a \cdot c \neq 0 \Leftrightarrow cy^2 + by + a = 0$.

Ответ: $cy^2 + by + a = 0$ при $a \cdot c \neq 0$.

2.081. При каких значениях a уравнение $(5a-1)x^2 - (5a+2)x + 3a-2 = 0$ имеет равные корни?

Решение.

Квадратный трехчлен имеет равные корни тогда и только тогда, когда дискриминант $D = 0$. Отсюда имеем:

$$(5a+2)^2 - 4(5a-1)(3a-2) = 0 \Leftrightarrow 35a^2 - 72a + 4 = 0; a_1 = 2, a_2 = \frac{2}{35}.$$

Ответ: $a_1 = 2; a_2 = \frac{2}{35}$.

2.082. Определить коэффициенты квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ так, чтобы оно имело своими корнями p и q .

Решение.

По теореме Виета $\begin{cases} p + q = -p \\ pq = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p + q = 0 \\ q(p-1) = 0. \end{cases}$

Из второго уравнения системы имеем $q = 0$ или $p - 1 = 0$. Тогда $q_1 = 0, p_1 = 0; p_2 = 1, q_2 = -2p_2 = -2$.

Ответ: $p_1 = q_1 = 0; p_2 = 1, q_2 = -2$.

2.083. Составить квадратное уравнение, корни которого были бы на единицу больше корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Решение.

Пусть $y^2+py+q=0$ — искомое уравнение с корнями $y_1=x_1+1, y_2=x_2+1$.

Из условия по теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1x_2=\frac{c}{a}, \end{cases}$ следовательно,

$$\begin{cases} y_1+y_2=x_1+1+x_2+1=x_1+x_2+2=-\frac{b}{a}+2=-p, \\ y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}+1=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\frac{b-2a}{a}, \\ q=\frac{a-b+c}{a}. \end{cases}$$

Получили уравнение $y^2+\frac{b-2a}{a}y+\frac{a-b+c}{a}=0 \Leftrightarrow ay^2+(b-2a)y+a-b+c=0$.

Ответ: $ay^2+(b-2a)y+a-b+c=0$.

2.084. При каком a уравнения $2x^2-(3a+2)x+12=0$, $4x^2-(9a-2)x+36=0$ имеют общий корень?

Решение.

Пусть x_0 — общий корень уравнений. Получаем систему:

$$\begin{cases} 2x_0^2-(3a+2)x_0+12=0, \\ 4x_0^2-(9a-2)x_0+36=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0^2-(6a+4)x_0+24=0, \\ 4x_0^2-(9a-2)x_0+36=0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем

$$(3a-6)x_0-12=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{4}{a-2}.$$

Из первого уравнения системы имеем:

$$2\frac{16}{(a-2)^2}-\frac{(3a+2)4}{a-2}+12=0 \Leftrightarrow 8-(3a+2)(a-2)+3(a-2)^2=0 \Leftrightarrow -8a+24=0; a=3.$$

Ответ: 3.

2.085. При каком a уравнения $x^2+ax+8=0$, $x^2+x+a=0$ имеют общий корень?

Решение.

Пусть x_0 — общий корень уравнений. Имеем систему:

$$\begin{cases} x_0^2+ax_0+8=0, \\ x_0^2+x_0+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow ax_0-x_0+8-a=0, x_0=\frac{a-8}{a-1}.$$

Из второго уравнения системы имеем:

$$\left(\frac{a-8}{a-1}\right)^2 + \left(\frac{a-8}{a-1}\right) + a = 0, \quad \frac{a^3 - 24a + 72}{(a-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 24a + 72 = 0, & a^3 + 216 - 216 - 24a + 72 = 0, & (a^3 + 216) - 24a - 144 = 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$$

$$(a^3 + 6^3) - 24(a+6) = 0, (a+6)(a^2 - 6a + 36) - 24(a+6) = 0, (a+6)(a^2 - 6a + 12) = 0, \text{ откуда } a = -6. \text{ Для квадратного уравнения } D < 0, \emptyset.$$

Ответ: $a = -6$.

2.086. При некоторых значениях a уравнение $x^2 + 3x + a(x^2 + x) = 0$ имеет равные корни. Составить квадратное уравнение, имеющее корнями эти значения a .

Решение.

Дискриминант D исходного уравнения должен быть равен нулю, следовательно, $D = (3+a)^2 - 4 \cdot 3(a+1) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a - 3 = 0$. Это и есть искомое уравнение.

Ответ: $a^2 - 6a - 3 = 0$.

2.087. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы $y_1 = x_1^2 + x_2^2, y_2 = x_1^3 + x_2^3$.

Решение.

$$\text{По теореме Виета } \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 - 2q, \\ y_2 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)x_1 x_2 = -p^3 + 3pq. \end{cases}$$

Коэффициенты b, c квадратного уравнения $y^2 + by + c = 0$, корнями которого являются y_1 и y_2 , равны:

$$b = -(y_1 + y_2) = p^3 - p^2 - 3pq + 2q,$$

$$c = y_1 y_2 = (p^2 - 2q)(-p^3 + 3pq).$$

Ответ: $y^2 + (p^3 - p^2 - 3pq + 2q)y + (p^2 - 2q)(-p^3 + 3pq) = 0$.

2.088. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0, x_1 < x_2$. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 1$.

Решение.

По условию $y_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - 1$, а $y_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + 1$. Пусть $y^2 + py + q = 0$ — искомое квадратное уравнение. По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - 1 + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + 1 = -\frac{b}{a}, \\ y_1 y_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - 1\right) \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + 1\right) = \frac{c}{a} - \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - 1 = \frac{c - a - \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}; \\ p = -(y_1 + y_2) = \frac{b}{a}, \\ q = y_1 y_2 = \frac{c - a - \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}, \end{cases} \text{ откуда получаем:}$$

$$y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c-a-\sqrt{b^2-4ac}}{a} = 0 \Leftrightarrow ay^2 + by + (c-a-\sqrt{b^2-4ac}) = 0.$$

Ответ: $ay^2 + by + (c-a-\sqrt{b^2-4ac}) = 0.$

2.089. Найти коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0$ при условии, что разность корней уравнения равна 1, а разность их кубов равна 7.

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ x_1^3 - x_2^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ (x_1 - x_2)((x_1 - x_2)^2 + 3x_1x_2) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 1 + 3x_1x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ x_1x_2 = 2, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

По теореме Виета имеем:

$$1) \begin{cases} p_1 = -(x_1 + x_2) = -3, \\ q_1 = x_1x_2 = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} p_2 = 3, \\ q_2 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $p_1 = -3, q_1 = 2; p_2 = 3, q_2 = 2.$

2.090. Квадрат разности корней уравнения $x^2-2x+q=0$ равен 16. Найти q .

Решение.

Из условия имеем $(x_1 - x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2, x_1x_2 = q$, откуда $4 - 4q = 16, 4q = -12, q = -3$.

Ответ: -3 .

2.091. При каких целых a корни уравнения $ax^2 + (2a-1)x + a-2 = 0$ рациональны?

Решение.

$$D = (2a-1)^2 - 4a(a-2) = 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 8a = 4a + 1 \in \mathbb{Z}.$$

Для того чтобы корни были рациональны, необходимо и достаточно, чтобы $D = 4a + 1 = n^2, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Отсюда } a = \frac{n^2 - 1}{4} = \frac{(n-1)(n+1)}{4}.$$

Так как n^2 — нечетное число, то и n — нечетное, т.е. $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Тогда } a = k(k+1) = k^2 + k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $a = k^2 + k, k \in \mathbb{Z}.$

2.092. Доказать, что при нечетных p и q уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет рациональных корней.

Решение.

Пусть $p = 2k + 1, q = 2m + 1, k, m \in \mathbb{Z}$, тогда дискриминант $D = p^2 - 4q = (2k + 1)^2 - 4(2m + 1)$ — число нечетное. Для того, чтобы уравнение имело рациональные корни необходимо и достаточно, чтобы $D = (2m + 1)^2$, т.е. $(2k + 1)^2 - 4(2m + 1) = (2m + 1)^2, m \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow (2k + 1)^2 - (2m + 1)^2 = 4(2m + 1) \Leftrightarrow 2(k + m + 1) \cdot 2(k - m) = 4(2m + 1) \Leftrightarrow (k + m + 1)(k - m) = 2m + 1$.

Но $(k + m + 1)(k - m) = 2k + 1$ — нечетное число, следовательно, одно из слагаемых обязательно четное число, поэтому $(k + m + 1)(k - m) \neq 2m + 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Что и требовалось доказать.

2.093. Найти коэффициенты p и q квадратного трехчлена x^2+px+q , если известно, что его остатки при делении на двучлены $x-p$ и $x-q$ равны соответственно p и q .

Решение.

Разделив x^2+px+q на $x-p$, имеем

$$\begin{array}{r|l} x^2+px+q & x-p \\ \underline{x^2-px} & \\ 2px+q & \\ \underline{2px-2p^2} & \\ 2p^2+q & \end{array}$$

Таким образом, $2p^2+q=p$.

Разделив x^2+px+q на $x-q$, получим

$$\begin{array}{r|l} x^2+px+q & x-q \\ \underline{x^2-qx} & \\ (p+q)x+q & \\ \underline{(p+q)x-q(p+q)} & \\ q+q(p+q) & \end{array}$$

Отсюда имеем $q+q(p+q)=q$.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 2p^2+q=p, \\ q+q(p+q)=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p^2-p+q=0, \\ q(p+q)=0 \end{cases} \Rightarrow q=0 \text{ или } p+q=0.$$

$$1) q=0, 2p^2-p=0, p_1=0, p_2=\frac{1}{2}, \quad 2) q=-p, 2p^2-2p=0, p_3=1, q_3=-1.$$

Ответ: $(0; 0), \left(\frac{1}{2}; 0\right), (1; -1)$.

2.094. Составить биквадратное уравнение, сумма квадратов корней которого 12, а произведение корней равно 10.

Решение.

Биквадратное уравнение всегда имеет две пары корней, равных по модулю и противоположных по знаку. Если $x_3=-x_1$, а $x_4=-x_2$, то по основной теореме алгебры биквадратное уравнение записывается в виде

$$(x-x_1)(x-x_2)(x+x_1)(x+x_2)=0 \Leftrightarrow (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)=0 \Leftrightarrow x^4-(x_1^2+x_2^2)x^2+x_1^2x_2^2=0.$$

По условию имеем $x_1^2+x_2^2+(-x_1)^2+(-x_2)^2=2(x_1^2+x_2^2)=12 \Rightarrow x_1^2+x_2^2=6$; $x_1x_2(-x_1)(-x_2)=x_1^2x_2^2=10$.

Получаем уравнение $x^4-6x^2+10=0$.

Ответ: $x^4-6x^2+10=0$.

2.095. Доказать, что если уравнение $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_1x+a_0=0$ с целыми коэффициентами $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ имеет рациональный корень c , то этот корень есть целое число, которое является делителем a_0 .

Решение.

Пусть корень $c = \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа и $q \neq 1$. Тогда

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

или после умножения на q^{n-1} $\frac{p^n}{q} + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 p \cdot q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0$.

Получили, что $\frac{p^n}{q}$ — целое число, т.е. $q \mid p^n$. Полученное противоречие показывает, что корень c — обязательно целое число. Далее имеем $c^n + a_{n-1} c^{n-1} + a_{n-2} c^{n-2} + \dots + a_1 c = -a_0$, то есть $a_0 = ct$, $c, t \in \mathbb{Z}$, следовательно, c — делитель a_0 .

Что и требовалось доказать.

2.096. Составить уравнение с целыми коэффициентами возможно более низкой степени, одним из корней которого было бы число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Решение.

Уравнение $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ имеет корни $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Значит, уравнение $(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)(x^2 + 2\sqrt{3}x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ имеет корень $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

1) Пусть $ax^2 + bx + c = 0$ — квадратное уравнение с целыми коэффициентами и $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ — его корень.

Тогда

$$a(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + b(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + c = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + b + c(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} + (ac)\sqrt{2} + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0, \\ a - c = 0, \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Получается противоречие.

2) Пусть $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ — кубическое уравнение с рациональными коэффициентами. Нетрудно убедиться, что заменой $y = x - \frac{a}{3}$ оно приводится к уравнению $x^3 + px + q = 0$, где p, q — рациональные числа. Если $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ — корень последнего уравнения, то получаем

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 + p(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + q = 0 &\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + p + q(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0, \\ \sqrt{3} + \sqrt{2} + p(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + q(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5 + 2\sqrt{6})q + pq + q^2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0, \\ (5 - 2\sqrt{6})q + \sqrt{3} + \sqrt{2} + p(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow 10q + pq + (q^2 + p + 1)\sqrt{3} + (1 - p - q^2)\sqrt{2} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} q^2 + p + 1 = 0, \\ -q^2 - p + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Получается противоречие.

Таким образом, не существует уравнений второй и третьей степеней с целыми коэффициентами, имеющих корень $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Ответ: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

2.097. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Составить новое кубическое уравнение, корнями которого были бы числа $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_1$, $y_3 = x_1 + x_2$.

Решение.

По формулам Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0, \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2, \\ y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = (1-x_1)(1-x_2) + (1-x_2)(1-x_3) + (1-x_3)(1-x_1) = \\ = 3 - 2(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1, \\ y_1y_2y_3 = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = -1. \end{cases}$$

Таким образом, новое кубическое уравнение имеет вид $y^3 - 2y^2 + y + 1 = 0$.

Ответ: $y^3 - 2y^2 + y + 1 = 0$.

2.098. Найти произведение суммы корней уравнения $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ на сумму их обратных величин.

Решение.

По формулам Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1x_2x_3} = -b \Leftrightarrow \frac{x_1x_2}{x_1x_2x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1x_2x_3} + \frac{x_1x_3}{x_1x_2x_3} =$$

$$= -b \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -b \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = (-a)(-b) = ab.$$

Ответ: ab .

2.099. При каких значениях a уравнения $ax^3 - x^2 - x - (a+1) = 0$, $ax^2 - x - (a+1) = 0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

Решение.

Если $a=0$, то уравнения общих корней не имеют. Пусть $a \neq 0$ и x_0 — общий корень уравнений. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} ax_0^3 - x_0^2 - x_0 - (a+1) = 0, \\ ax_0^2 - x_0 - (a+1) = 0. \end{cases}$$

Умножая второе равенство на x_0 и вычитая его из первого, имеем:

$$x_0 = \frac{a+1}{a}.$$

Проверкой убеждаемся, что это действительно корень обоих уравнений.

Ответ: при $a \neq 0$ $x_0 = \frac{a+1}{a}$.

2.100. Найти коэффициенты a и b уравнения $x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b = 0$, если известно, что среди его корней имеются три равных целых числа.

Решение.

Пусть $x_1 = x_2 = x_3 \in \mathbb{Z}$ и x_4 — корни уравнения. По формулам Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = -18, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -a, \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = b. \end{cases}$$

Учитывая, что $x_1 = x_2 = x_3$, получаем:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 = -1, \\ 3x_1^2 + 3x_1 x_4 = -18, \\ x_1^3 + 3x_1^2 x_4 = -a, \\ x_1^3 x_4 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -1 - 3x_1, \\ x_1(x_1 + x_4) = -6, \\ x_1^2(x_1 + 3x_4) = -a, \\ x_1^3 x_4 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -1 - 3x_1, \\ x_1(x_1 - 1 - 3x_1) = -6, \\ x_1^2(x_1 - 3 - 9x_1) = -a, \\ x_1^3(-1 - 3x_1) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -1 - 3x_1, \\ 2x_1^2 + x_1 - 6 = 0, \\ 8x_1^3 + 3x_1^2 = a, \\ 3x_1^4 + x_1^3 = -b. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x_1' = -2$ или $x_1'' = \frac{3}{2}$. По условию $x_1 \in \mathbb{Z}$, следовательно, $x_1 = -2$. Тогда $a = -52$; $b = -40$.

Ответ: $a = -52$; $b = -40$.

Решить уравнения (2.101–2.170):

2.101. $|x+2|=2(3-x)$.

Решение.

Рассмотрим два случая:

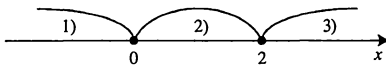
1) $x < -2$, $-x-2=6-2x$, $x=8$ — не подходит;

$x \geq -2$, $x+2=6-2x$, $3x=4$, $x = \frac{4}{3}$.

Ответ: $x = \frac{4}{3}$.

2.102. $|x|-|x-2|=2$.

Решение.



Рассмотрим три случая (см. рис.):

1) $x \in (-\infty; 0)$, $-x+x-2=2$, \emptyset ;

2) $x \in [0; 2)$, $x+x-2=2$, $x=2$ — не подходит;

3) $x \in [2; +\infty)$, $x-x+2=2$, $2=2$ — истинное равенство.

Ответ: $x \in [2; +\infty)$.

2.103. $x^2+|x-1|=1$.

Решение.

Рассмотрим два случая:

- 1) $x < 1$, $x^2 - x + 1 = 1$, $x(x-1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ — не подходит;
 2) $x \geq 1$, $x^2 + x - 1 = 1$, $x^2 + x - 2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$ — не подходит.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2.104. $|x^2+4x+2| = \frac{1}{3}(5x+16)$.

Решение.

Рассмотрим два случая:

- 1) $\begin{cases} x^2 + 4x + 2 \geq 0, \\ x^2 + 4x + 2 = \frac{1}{3}(5x+16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 2 \geq 0, \\ 3x^2 + 7x - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ (} x = -\frac{10}{3} \text{ — не подходит);}$
 2) $\begin{cases} x^2 + 4x + 2 < 0, \\ x^2 + 4x + 2 = -\frac{1}{3}(5x+16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 2 < 0, \\ 3x^2 + 17x + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -2 \text{ (} x = -\frac{11}{3} \text{ — не подходит).}$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

2.105. $|x|x-2|+a=0$.

Решение.

Рассмотрим два случая:

1) $x < 2$, $-x^2 + 2x + a = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = a + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = a + 1$, $x_1 = 1 - \sqrt{a+1}$, $x_2 = 1 + \sqrt{a+1} < 2$ при $a \geq -1$.

$1 + \sqrt{a+1} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{a+1} < 1 \Leftrightarrow -1 \leq a < 0$;

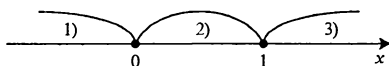
2) $x \geq 2$, $x^2 - 2x + a = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 - a \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - a \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{1-a}$, $x_3 = 1 + \sqrt{1-a}$ при $a \leq 1$.

$1 + \sqrt{1-a} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-a} \geq 1 \Leftrightarrow a \leq 0$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1)$ $x = 1 + \sqrt{1-a}$; при $a \in [-1; 0)$ $x_1 = 1 - \sqrt{a+1}$, $x_2 = 1 + \sqrt{a+1}$, $x_3 = 1 + \sqrt{1-a}$; при $a = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; при $a \in (0; +\infty)$ $x = 1 - \sqrt{a+1}$.

2.106. $|x|^3 + |x - 1|^3 = 9$.

Решение.



Рассмотрим три случая (см. рис.):

1) $x \in (-\infty; 0)$, $-x^3 - (x-1)^3 = 9 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 3x + 8 = 0$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = -1$, так как $-2 - 3 - 3 + 8 = 0$. Делим левую часть уравнения на $x + 1$ (по схеме Горнера или «уголком»): $\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 8}{x + 1} = 2x^2 - 5x + 8$. Таким образом, уравнение можно записать в виде: $(x+1)(2x^2 - 5x + 8) = 0$. Для уравнения $2x^2 - 5x + 8 = 0$ $D < 0$ и корней нет.

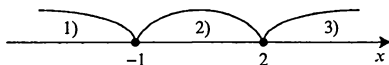
2) $x \in [0; 1]$, $x^3 - (x-1)^3 = 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 8 = 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{6}$. На втором промежутке решений нет, так как ни $x_1 = \frac{3 - \sqrt{105}}{6}$, ни $x_2 = \frac{3 + \sqrt{105}}{6}$ не принадлежат $[0; 1]$.

3) $x \in [1; +\infty)$, $x^3 + (x-1)^3 = 9 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 0$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 2$, так как $16 - 12 + 6 - 10 = 0$. Делим левую часть уравнения на $x - 2$: $\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 10}{x - 2} = 2x^2 + x + 5$. Уравнение можно представить в виде: $(x-2)(2x^2 + x + 5) = 0$. Для уравнения $2x^2 + x + 5 = 0$ $D < 0$ и корней нет.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

2.107. $|x+1| + a|x-2| = 3$.

Решение.



Рассмотрим три случая (см. рис.):

1) $x \in (-\infty; -1)$, $-x-1 - ax+2a=3$, $(a+1)x=2a-4$, $x = \frac{2a-4}{a+1} < -1$ ($a \neq -1$).

$$\frac{2a-4}{a+1} < -1 \Leftrightarrow \frac{2a-4+a+1}{a+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{3(a-1)}{a+1} < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 1;$$

2) $x \in [-1; 2]$, $x+1 - ax+2a=3$, $(1-a)x=2-2a$ при $a=1$, $x \in [-1; 2]$, а при $a \neq 1$ $x = \frac{2-2a}{1-a} = 2$ — не подходит;

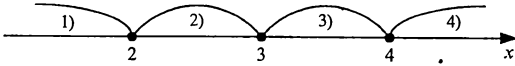
3) $x \in [2; +\infty)$, $x+1 + ax-2a=3$, $(a+1)x=2+2a$ при $a=-1$, $x \in [2; +\infty)$, а при $a \neq -1$ $x = \frac{2(1+a)}{1+a} = 2$.

Ответ: если $a < -1$, то $x=2$;
если $a = -1$, то $x \geq 2$;

если $-1 < a < 1$, то $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{2a-4}{a+1}$;
если $a = 1$, то $-1 \leq x \leq 2$;
если $a > 1$, то $x=2$.

2.108. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$.

Решение.



Рассмотрим четыре случая (см. рис.):

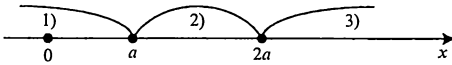
- 1) $x \in (-\infty; -2)$, $2-x+3-x+8-2x=9$, $4x=4$, $x_1=1$;
- 2) $x \in [2; 3]$, $x-2+3-x+8-2x=9$, $x=0$ — не подходит;
- 3) $x \in [3; 4]$, $x-2+x-3+8-2x=9$, $3 \neq 9$, \emptyset ;
- 4) $x \in [4; +\infty)$, $x-2+x-3+2x-8=9$, $4x=22$, $x_2 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2 = \frac{11}{2}$.

2.109. $|x-a|+|x-2a|=3a$.

Решение.

Очевидно, что при $a < 0$ решений нет, а при $a=0$ $x=0$. Пусть $a > 0$.



Рассмотрим три случая (см. рис.):

- 1) $x \in (-\infty; a)$, $a-x+2a-x=3a$, $x=0$;
- 2) $x \in [a; 2a]$, $x-a+2a-x=3a$, \emptyset ;
- 3) $x \in [2a; +\infty)$, $x-a+x-2a=3a$, $x=3a$.

Ответ: если $a < 0$, то решений нет;

если $a=0$, то $x=0$;

если $a > 0$, то $x=0$, $x=3a$.

2.110. $|x^3+x+2|=|x^2+5x-2|$.

Решение.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$(x^3+x+2)^2 - (x^2+5x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^3+x+2-x^2-5x-2)(x^3+x+2+x^2+5x-2) = 0 \Leftrightarrow (x^3-x^2-4x+4)(x^3+x^2+6x) = 0 \Leftrightarrow (x^2(x-1)-4(x-1))x(x^2+x+6) = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x-1)x(x^2+x+6) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-1)x(x^2+x+6) = 0.$$

Отсюда получаем четыре корня: $x_1=-2$; $x_2=0$; $x_3=1$; $x_4=2$.

Ответ: $x_1=-2$; $x_2=0$; $x_3=1$; $x_4=2$.

$$2.111. \quad x - \frac{13x-21}{5} = 3 - \frac{2x-5}{3}.$$

Решение.

Из условия получаем:

$$15x - 3(13x-21) = 45 - 10x + 25 \Leftrightarrow 25x - 70 = 3(13x-21). \text{ Так как } 25x - 70 \geq 0, \text{ то } x \geq \frac{70}{25} = \frac{14}{5}, \text{ следовательно, } 25x - 70 = 3(13x-21) \Leftrightarrow 16x = 64, x = 4.$$

Ответ: $x=4$.

$$2.112. \quad \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = 2.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 2, 3$.

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = 2 \Leftrightarrow \frac{2(x-2) + 3(x-3)}{(x-3)(x-2)} = 2 \Leftrightarrow 5x - 13 = 2(x^2 - 5x + 6) \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 25 = 0, D = 15^2 - 8 \cdot 25 = 25.$$

$$x_1 = \frac{15+5}{4} = 5, \quad x_2 = \frac{15-5}{4} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $x_1=5, x_2=\frac{5}{2}$.

$$2.113. \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{2x+a} = 0.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq -a, -\frac{a}{2}$.

Из условия имеем:

$$\frac{(x+a)(2x+a) + a(2x+a) + a(x+a)}{a(x+a)(2x+a)} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3ax + a^2 + 2ax + a^2 + ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6ax + 3a^2 = 0;$$

$$D = 36a^2 - 24a^2 = 12a^2.$$

$$x_1 = \frac{-6a + 2\sqrt{3}a}{4} = \frac{a(\sqrt{3}-3)}{2}, \quad x_2 = \frac{-6a - 2\sqrt{3}a}{4} = -\frac{a(\sqrt{3}+3)}{2}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{a(\sqrt{3}-3)}{2}, x_2 = -\frac{a(\sqrt{3}+3)}{2}$.

$$2.114. \quad \frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0, -\frac{1}{2}$.

Пусть $y = \frac{2x+1}{x}$, тогда из условия имеем:

$$y + \frac{4}{y} = 5 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0, y_1 = 1, y_2 = 4.$$

Получили два случая:

$$1) \frac{2x+1}{x} = 1 \Leftrightarrow 2x+1 = x, x_1 = -1;$$

$$2) \frac{2x+1}{x} = 4 \Leftrightarrow 2x+1 = 4x, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$.

$$2.115. x^2 + x^{-2} = x + x^{-1}.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

Из условия имеем:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Пусть $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2$, т.е. $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Наше уравнение принимает вид:

$$y^2 - 2 - y = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0, y_1 = -1, y_2 = 2.$$

Получили два случая:

$$1) x + \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0, D < 0, \emptyset;$$

$$2) x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0, x = 1.$$

Ответ: $x=1$.

$$2.116. \frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0, -2, -1$.

$$\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2x} - \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{2}.$$

Пусть $u = x^2 + 2x$, тогда получаем:

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{y+1-y}{y^2+y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0, y_1 = -2, y_2 = 1. \text{ Отсюда имеем два случая:}$$

$$1) x^2 + 2x = -2, x^2 + 2x + 2 = 0, D < 0, \emptyset;$$

$$2) x^2 + 2x = 1, x^2 + 2x - 1 = 0, D = 4 + 4 = 8.$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}, x_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

Ответ: $x_1 = -1 + \sqrt{2}, x_2 = -1 - \sqrt{2}$.

$$2.117. \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Группируя дроби с одинаковыми числителями, получим:

$$3 \cdot \frac{2x-5}{x^2-5x} + \frac{2x-5}{x^2-5x+4} + 4 \cdot \frac{2x-5}{x^2-5x+6} = 0,$$

откуда $2x-5=0$, $x_1 = \frac{5}{2}$ или

$$\frac{3}{x^2-5x} + \frac{1}{x^2-5x+4} + \frac{4}{x^2-5x+6} = 0.$$

Пусть $y = x^2 - 5x$, тогда получаем:

$$\frac{3}{y} + \frac{1}{y+4} + \frac{4}{y+6} = 0 \Leftrightarrow \frac{3(y+4)(y+6) + y(y+6) + 4y(y+4)}{y(y+4)(y+6)} = 0 \Leftrightarrow 3(y^2+10y+24) + (y^2+6y) + (4y^2+16y) = 0 \Leftrightarrow 8y^2+52y+72=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^2+13y+18=0, D=13^2-8 \cdot 18=169-144=25.$$

$$y_1 = \frac{-13+5}{4} = -2, \quad y_2 = \frac{-13-5}{4} = -\frac{9}{2}.$$

Отсюда имеем два случая:

$$1) \quad x^2-5x=-2, x^2-5x+2=0, D=25-8=17, \quad x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2};$$

$$2) \quad x^2-5x=-\frac{9}{2}, 2x^2-10x+9=0, D=100-72=28, \quad x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$2.118. \frac{x^2+1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} = 3.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

Пусть $y = \frac{x^2+1}{x}$, тогда получаем уравнение

$$y + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2.$$

Отсюда имеем два случая:

$$1) \frac{x^2+1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0, D < 0, \emptyset;$$

$$2) \frac{x^2+1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0, x = 1.$$

Ответ: $x=1$.

$$2.119. (x+5)^3 - (x+2)^3 = 279.$$

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$(x+5)^3 - (x+2)^3 = (x+5-x-2)((x+5)^2 + (x+5)(x+2) + (x+2)^2) = 3(x^2 + 10x + 25 + x^2 + 7x + 10 + x^2 + 4x + 4) = 3(3x^2 + 21x + 39) = 9(x^2 + 7x + 13).$$

Получили следующее уравнение:

$$9(x^2 + 7x + 13) = 9 \cdot 31 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 18 = 0, x_1 = -9, x_2 = 2.$$

Ответ: $x_1 = -9, x_2 = 2$.

$$2.120. (x+3)(x^2+1) + (x+1)(x^2+3) = 4.$$

Решение.

Из условия имеем:

$$(x^3 + 3x^2 + x + 3) + (x^3 + x^2 + 3x + 3) = 4 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 4x + 6 = 4 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ — симметрическое уравнение третьей степени. Далее}$$

$$\text{получаем: } (x^3 + 1) + (2x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) + 2x(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Ответ: $x = -1$.

$$2.121. \frac{2}{x^2+3} + \frac{3}{x^2+2} = 1.$$

Решение.

$$\text{Из условия имеем: } \frac{2(x^2+2) + 3(x^2+3)}{(x^2+3)(x^2+2)} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 4 + 3x^2 + 6 = x^4 + 5x^2 + 5 \Leftrightarrow x^4 = 5, x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{5}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{5}$.

$$2.122. \frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq -a, a$.

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} \frac{x(x-a) + 2x(x+a)}{(x+a)(x-a)} &= \frac{5a^2}{4(x^2-a^2)} \Leftrightarrow 4(x^2 - xa + 2x^2 + 2xa) = 5a^2 \Leftrightarrow 12x^2 + 4ax - 5a^2 = 0, D = 16a^2 + 4 \cdot 12 \cdot 5a^2 = \\ &= 16(a^2 + 15a^2) = 16^2 a^2. \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-4a-16a}{24} = -\frac{5a}{6}, \quad x_2 = \frac{-4a+16a}{24} = \frac{a}{2}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{5a}{6}, \quad x_2 = \frac{a}{2}.$

2.123. $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6.$

Решение.

Перепишем исходное уравнение в виде $(6x+7)^2 \frac{1}{12}(6x+8)(6x+6) = 6$ и возьмем $y=6x+7$. Тогда имеем: $y^2(y+1)(y-1)=72$; $y^4-y^2-72=0, y^2=9, y^2=-8$ — не подходит.

Получили два случая:

1) $6x+7=-3, x_1=-\frac{5}{3};$

2) $6x+7=3, x_2=-\frac{2}{3}.$

Ответ: $x_1 = -\frac{5}{3}, \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$

2.124. $2(x-1)^2-7(x-1)(x-a)+3(x-a)^2=0.$

Решение.

Разделив обе части уравнения на $(x-a)^2 \neq 0$, имеем:

$$2\left(\frac{x-1}{x-a}\right)^2 - 7\left(\frac{x-1}{x-a}\right) + 3 = 0.$$

Пусть $y = \frac{x-1}{x-a}.$

Относительно y уравнение принимает вид $2y^2-7y+3=0$, откуда $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 3.$

Тогда $\frac{x-1}{x-a} = \frac{1}{2}, x_1=2-a; \frac{x-1}{x-a} = 3, x_2 = \frac{3a-1}{2}.$

Если $x-a=0$, то $a-1=0$ и $x=a=1.$

Ответ: $x_1=2-a, \quad x_2 = \frac{3a-1}{2}.$

2.125. $x(x+1)(x-1)(x+2)=24.$

Решение.

Из условия имеем:

$$(x^2+x)(x^2+x-2)=24.$$

Пусть $y=x^2+x$, тогда получаем $y(y-2)=24 \Leftrightarrow y^2-2y-24=0, y_1=-4, y_2=6.$

Отсюда:

$$1) x^2 + x = -4 \Leftrightarrow x^2 + x + 4 = 0, D < 0, \emptyset;$$

$$2) x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0, x_1 = -3, x_2 = 2.$$

Ответ: $x_1 = -3, x_2 = 2$.

$$2.126. (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15.$$

Решение.

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15 \Leftrightarrow [(x-1)(x-4)] \cdot [(x-2)(x-3)] = 15 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 15.$$

Пусть $y = x^2 - 5x + 4$, тогда имеем:

$$y(y+2) = 15 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 15 = 0, y_1 = -5, y_2 = 3.$$

Получаем два случая:

$$1) x^2 - 5x + 4 = -5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 9 = 0, D < 0, \emptyset;$$

$$2) x^2 - 5x + 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0, D = 21, x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}.$$

$$2.127. x^3 - 21x^2 + 140x - 300 = 0.$$

Решение.

Будем искать целые корни среди делителей свободного члена. Нетрудно убедиться, что $x_1 = 10$. Поделим левую часть уравнения на $x - 10$ по схеме Горнера:

1	-21	140	-300
1	-11	30	0

Таким образом, получаем уравнение $(x-10)(x^2 - 11x + 30) = 0 \Leftrightarrow (x-10)(x-6)(x-5) = 0, x_1 = 10, x_2 = 6, x_3 = 5$.

Ответ: $x_1 = 10, x_2 = 6, x_3 = 5$.

$$2.128. \frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{18}{x^2 + 2x + 2} = \frac{18}{x^2 + 2x + 1}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x \neq -3, -1, 1.$$

Если $y = x^2 + 2x - 3$, то исходное уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{y} = \frac{18}{y+4} - \frac{18}{y+5} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{18(y+5 - y-4)}{(y+4)(y+5)} \Leftrightarrow y^2 + 9y + 20 = 18y \Leftrightarrow y^2 - 9y + 20 = 0, y_1 = 4, y_2 = 5.$$

Получаем два случая:

$$1) x^2 + 2x - 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = 0, x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{8};$$

$$2) x^2 + 2x - 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0, x_3 = -4, x_4 = 2.$$

Ответ: $x_1 = -1 - \sqrt{8}, x_2 = -1 + \sqrt{8}, x_3 = -4, x_4 = 2$.

2.129. $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

Решение.

Из условия получаем $x^4 - 4x^3 + \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$.

Рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$ —

корни уравнения. Делим $x^4 - 4x^3 + \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}$ на $x - \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 4x^3 + \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4} & x - \frac{1}{2} \\
 \underline{x^4 - \frac{1}{2}x^3} & x^3 - \frac{7}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \\
 -\frac{7}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 & \\
 \underline{-\frac{7}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2} & \\
 -x^2 + x & \\
 \underline{-x^2 + \frac{1}{2}x} & \\
 \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} & \\
 \underline{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Приходим к уравнению $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^3 - \frac{7}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = 0$.

Делим $x^3 - \frac{7}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ на $x + \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - \frac{7}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} & x + \frac{1}{2} \\
 \underline{x^3 + \frac{1}{2}x^2} & x^2 - 4x + 1 \\
 -4x^2 - x & \\
 \underline{-4x^2 - 2x} & \\
 x + \frac{1}{2} & \\
 \underline{x + \frac{1}{2}} & \\
 0 &
 \end{array}$$

(Делить можно и по схеме Горнера.)

Уравнение принимает вид:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - 4x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 2 - \sqrt{3}, x_4 = 2 + \sqrt{3}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 2 - \sqrt{3}, x_4 = 2 + \sqrt{3}.$

2.130. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0.$

Решение.

Указанное уравнение является симметрическим (возвратным с $\lambda=1$). Разделив левую и правую часть уравнения на $x^2 \neq 0$, получим:

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Пусть $y = x + \frac{1}{x}$, тогда:

$$y^2 - 5y + 6 = 0, y_1 = 2, y_2 = 3.$$

Имеем два случая:

$$1) x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0, x_1 = 1;$$

$$2) x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0, x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$

2.131. $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде: $\left[\left(x - \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]^4 + \left[\left(x - \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2}\right]^4 = 1.$ Пусть $y = x - \frac{5}{2}$. Имеем:

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 2y^4 + 3y^2 - \frac{7}{8} = 0, y^2 = \frac{1}{4} \text{ или } y^2 = -\frac{7}{4} \text{ — не подходит.}$$

Отсюда:

$$1) y_1 = -\frac{1}{2}, x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}, x_1 = 2;$$

$$2) y_2 = \frac{1}{2}, x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}, x_2 = 3.$$

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 3.$

2.132. $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$.

Решение.

Пусть $y = x - \frac{a+b}{2}$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$(y+d)^4 + (y-d)^4 = c, \text{ где } d = \frac{a-b}{2}.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные в левой части полученного уравнения, имеем:

$$y^4 + 6d^2y^2 + d^4 - \frac{c}{2} = 0.$$

Далее, если $t = y^2 \geq 0$, то приходим к уравнению

$$t^2 + 6d^2t + d^4 - \frac{c}{2} = 0.$$

$$t_1 = -3d^2 - \sqrt{8d^4 + \frac{c}{2}} < 0 \text{ — не подходит;}$$

$$t_2 = -3d^2 + \sqrt{8d^4 + \frac{c}{2}} \geq 0 \text{ при } c \geq \frac{(a-b)^4}{8}.$$

Таким образом, имеем:

$$y^2 = -\frac{3}{4}(a-b)^2 + \sqrt{\frac{c+(a-b)^4}{2}} \Rightarrow y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c+(a-b)^4}{2} - \frac{3}{4}(a-b)^2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{c+(a-b)^4}{2} - \frac{3}{4}(a-b)^2}.$$

При $c < \frac{(a-b)^4}{8}$ уравнение решений не имеет.

Ответ: при $c \geq \frac{(a-b)^4}{8}$ уравнение имеет решения:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{c+(a-b)^4}{2} - \frac{3}{4}(a-b)^2};$$

$$x_2 = \frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{c+(a-b)^4}{2} - \frac{3}{4}(a-b)^2}.$$

2.133. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) = b^4$.

Решение.

Исходное уравнение подстановкой $y = x + \frac{5}{2}a$ приводится к биквадратному уравнению $y^4 - \frac{5}{2}a^2y^2 + \frac{9}{16}a^4 - b^4 = 0$,

откуда получаем $y_{1,2}^2 = \frac{5}{4}a^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4}$.

Таким образом:

$$1) \text{ при } a=b=0 \quad x=0; \text{ при } \frac{5}{4}a^2 - \sqrt{a^4 + b^4} < 0 \Leftrightarrow 9a^4 < 16b^4 \quad x_{1,2} = -\frac{5}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + \sqrt{a^4 + b^4}};$$

$$2) \text{ при } 9a^4 = 16b^4 \quad x_1 = -\frac{5}{2}a, \quad x_{2,3} = -\frac{5}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + \sqrt{a^4 + b^4}} = -\frac{5}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{2}}|a|;$$

$$3) \text{ при } 9a^4 > 16b^4 \quad x_{1,2,3,4} = -\frac{5}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4}}.$$

Ответ: если $a=b=0$, то $x=0$;

$$\text{если } |a| < \frac{2}{\sqrt{3}}|b|, \text{ то } x_1 = -\frac{5}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + \sqrt{a^4 + b^4}}, \quad x_2 = -\frac{5}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + \sqrt{a^4 + b^4}};$$

$$\text{если } |a| = \frac{2}{\sqrt{3}}|b|, \text{ то } x_1 = -\frac{5}{2}a, \quad x_2 = -\frac{5}{2}a + \sqrt{\frac{5}{2}}|a|, \quad x_3 = -\frac{5}{2}a - \sqrt{\frac{5}{2}}|a|;$$

$$\text{если } |a| > \frac{2}{\sqrt{3}}|b|, \text{ то}$$

$$x_1 = -\frac{5}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + \sqrt{a^4 + b^4}}, \quad x_2 = -\frac{5}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \sqrt{a^4 + b^4}},$$

$$x_3 = -\frac{5}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + \sqrt{a^4 + b^4}}, \quad x_4 = -\frac{5}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \sqrt{a^4 + b^4}}.$$

$$2.134. x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0.$$

Решение.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$2a^2 - (3x^2 + 2x)a + x^4 + x^3 = 0.$$

Решаем полученное уравнение как квадратное относительно a .

$$D = (3x^2 + 2x)^2 - 8(x^4 + x^3) = 9x^4 + 12x^3 + 4x^2 - 8x^4 - 8x^3 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = (x^2 + 2x)^2.$$

$$a_1 = \frac{3x^2 + 2x - x^2 - 2x}{4} = \frac{x^2}{2}, \quad a_2 = \frac{3x^2 + 2x + x^2 + 2x}{4} = x^2 + x.$$

Осталось решить два уравнения:

$$1) x^2 + x - a = 0, D = 4a + 1, x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2};$$

$$2) x^2 = 2a, x_{3,4} = \pm \sqrt{2a}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4a + 1}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4a + 1}}{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2a}, \quad x_4 = \sqrt{2a}.$$

$$2.135. x^3 - (a^2 - a + 7)x - 3(a^2 - a - 2) = 0.$$

Решение.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$\begin{aligned} x^3 - a^2x + ax - 7x - 3a^2 + 3a + 6 = 0 &\Leftrightarrow x^3 + 27 - a^2x + ax - 7x - 3a^2 + 3a + 6 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 27) - (a^2x + 3a^2) + (ax + 3a) - (7x + 21) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 3x + 9) - a^2(x+3) + a(x+3) - 7(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 3x - a^2 + a + 2) = 0 \Rightarrow x+3=0 \text{ или } x^2 - 3x - a^2 + a + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2-a, \\ &x_3 = a+1. \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = -3, x_2 = 2-a, x_3 = a+1$.

$$2.136. y^3 + ay^2 + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Решение.

Пусть $y = x - \frac{a}{3}$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$x^3 - 3x^2 \cdot \frac{a}{3} + 3x \frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + ax^2 - 2\frac{a^2}{3}x + \frac{a^3}{9} + bx - \frac{ab}{3} + c = 0. \quad (1)$$

Приводя подобные, приходим к уравнению

$$x^3 + px + q = 0, \quad (2)$$

Мы знаем, что уравнение (2) обладает тремя комплексными корнями. Пусть x_0 — корень (2). Рассмотрим многочлен

$f(u) = u^2 - x_0u - \frac{p}{3}$, обладающий двумя комплексными корнями α и β , причем по теореме Виета

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0, \\ \alpha\beta = -\frac{p}{3}. \end{cases} \quad (3)$$

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}. \quad (4)$$

Подставляя в (2) вместо x_0 выражение (3), получаем:

$$(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + p(\alpha + \beta) + q = \alpha^3 + \beta^3 + (\alpha + \beta)(3\alpha\beta + p) + q = \alpha^3 + \beta^3 + q = 0$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ \alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}. \end{cases} \quad (5)$$

$$\alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}. \quad (6)$$

Равенства (5), (6) показывают, что α^3, β^3 являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (7)$$

Решая (7), получаем $z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, откуда

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (8)$$

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (9)$$

Формула (9) называется *формулой Кардано*.

В множестве чисел \mathbb{C} формулы (8) дают три значения для α и три для β . Для данного α берется то значение β , которое удовлетворяет (4).

Практическое значение формулы Кардано невелико, так как нахождение точных кубических корней из комплексных чисел — достаточно трудная задача.

Ответ: формула Кардано.

$$2.137. y^3 + 3y^2 - 3y - 14 = 0.$$

Решение.

Пусть $y = x - 1$, тогда исходное уравнение принимает вид

$$(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 3(x-1) - 14 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 - 3x + 3 - 14 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x - 9 = 0.$$

Полученное уравнение будем решать по формуле Кардано, где $p = -6$, $q = -9$.

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} > 0, \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8}, \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1}.$$

В множестве комплексных чисел $\sqrt[3]{1}$ имеет три значения: $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Получаем три значения для α и β :

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha_3 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Для данного α берем то значение β , для которого $\alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3} = 2$.

$$\alpha_1 = 2 \Rightarrow \beta_1 = 1 \text{ и } x_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 3, y_1 = 2;$$

$$\alpha_2 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \beta_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad y_2 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\alpha_3 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \beta_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad y_3 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ответ: $y_1=2$, $y_2=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $y_3=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2.138. $\sqrt{x+2}=x$.

Решение.

ОДЗ: $x+2 \geq 0$.

Возведем обе части исходного уравнения в квадрат и получим:

$$x+2=x^2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0, x_1=-1, x_2=2.$$

Проверкой, подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что подходит лишь корень $x_2=2$, $x_1=-1$ — «посторонний корень».

Ответ: $x=2$.

2.139. $(x^2-25)\sqrt{3-x}=0$,

Решение.

ОДЗ: $3-x \geq 0$, $x \leq 3$.

Перепишем исходное уравнение в виде $(x-5)(x+5)\sqrt{3-x}=0 \Rightarrow x_1=-5$, $x_2=3$, $x=5$ — не подходит по ОДЗ.

Ответ: $x_1=-5$, $x_2=3$.

2.140. $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

Перепишем исходное уравнение в виде $\sqrt{x+2}=1+\sqrt{2x-3}$, а затем, возведя обе части полученного уравнения в квадрат, получим: $x+2=1+2\sqrt{2x-3}+2x-3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3}=4-x$.

Возведя еще раз в квадрат, найдем:

$$4(2x-3)=16-8x+x^2 \Leftrightarrow x^2-16x+28=0, x_1=2, x_2=14.$$

Подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что подходит лишь корень $x_1=2$, $x_2=14$ — «посторонний корень».

Ответ: $x=2$.

2.141. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 9-x \geq 0, \\ 2x-12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 9, \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 6 \leq x \leq 9$.

Возведя обе части уравнения в квадрат и приводя подобные члены, получаем: $\sqrt{(x+1)(9-x)}=|1-x|$, откуда $(x+1)(9-x)=121-22x+x^2 \Leftrightarrow x^2-15x+56=0$; $x_1=7$, $x_2=8$.

Проверкой убеждаемся, что это корни заданного уравнения.

Ответ: $x_1=7$, $x_2=8$.

2.142. $\sqrt{x+\sqrt{x+6}}+\sqrt{x-\sqrt{x+6}}=4$.

Решение.

Пусть $\sqrt{x+6}=y \geq 0$ или $x+6=y^2$, т.е. $x=y^2-6$. Тогда $\sqrt{y^2+y-6}+\sqrt{y^2-y-6}=4$ или $\sqrt{y^2+y-6}=4-\sqrt{y^2-y-6}$.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$y^2 + y - 6 = 16 - 8\sqrt{y^2 - y - 6} + y^2 - y - 6, \quad 8\sqrt{y^2 - y - 6} = 16 - 2y, \quad 4\sqrt{y^2 - y - 6} = 8 - y.$$

И снова возведя обе части последнего уравнения в квадрат, найдем

$$16y^2 - 16y - 96 = 64 - 16y + y^2, \quad 0 < y \leq 8 \Rightarrow \begin{cases} 15y^2 = 160 \\ 0 < y \leq 8, \end{cases} \text{ или } y = \sqrt{\frac{32}{3}}.$$

Отсюда получаем $\sqrt{x+6} = \sqrt{\frac{32}{3}}$ или $x+6 = \frac{32}{3}$, $x = \frac{14}{3}$.

Сделаем проверку.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{14}{3} + \sqrt{\frac{32}{3}}} + \sqrt{\frac{14}{3} - \sqrt{\frac{32}{3}}} \right)^2 &= \frac{14}{3} + \sqrt{\frac{32}{3}} + 2\sqrt{\left(\frac{14}{3} + \sqrt{\frac{32}{3}}\right)\left(\frac{14}{3} - \sqrt{\frac{32}{3}}\right)} + \frac{14}{3} - \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{28}{3} + 2\sqrt{\frac{196}{9} - \frac{32}{3}} = \\ &= \frac{28}{3} + 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{48}{3} = 16. \end{aligned}$$

Таким образом, $x = \frac{14}{3}$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{14}{3}$.

$$2.143. \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \frac{2x+1}{x-1} > 0.$$

Пусть $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} > 0$, тогда имеем: $y - \frac{2}{y} = 1$, $y^2 - y - 2 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = -1$ — не подходит. Таким образом, получаем:

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x+1 = 4x-4, \quad x = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{5}{2}$.

$$2.144. \quad x^2 + 3x - 8 + 4\sqrt{x^2 + 3x + 4} = 0.$$

Решение.

Пусть $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4} \geq 0$, тогда $y^2 = x^2 + 3x + 4$ и уравнение принимает вид:

$$(y^2 - 12) + 4y = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 12 = 0, \quad y_1 = -6 \text{ (не подходит)}, \quad y_2 = 2.$$

Тогда $\sqrt{x^2 + 3x + 4} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 0$.

Ответ: $x_1 = -3, x_2 = 0$.

2.145. $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде:

$$x^2 + 2x + 8 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 20 = 0.$$

Пусть $y = \sqrt{x^2 + 2x + 8} > 0$, тогда имеем:

$$y^2 + y - 20 = 0, y_1 = 4, y_2 = -5 \text{ — не подходит.}$$

Таким образом, получаем

$$\sqrt{x^2 + 2x + 8} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 8 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0, x_1 = -4, x_2 = 2.$$

Ответ: $x_1 = -4, x_2 = 2$.

2.146. $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0$.

Решение.

Пусть $y = \sqrt[3]{x}$, тогда $x = y^3, x^2 = y^6$. Относительно y получаем уравнение

$$y^3 \cdot y - 4y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow y^4 - 4y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2,$$

откуда $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Тогда $\sqrt[3]{x} = -\sqrt{2}, x_1 = -2\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{x} = \sqrt{2}, x_2 = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $x_1 = -2\sqrt{2}, x_2 = 2\sqrt{2}$.

2.147. $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 4x+13 \geq 0, \\ 3x+12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Запишем уравнение в виде $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x+12} = -\sqrt{4x+13}$ и возведем обе части в квадрат:

$x+1 - 2\sqrt{(x+1)(3x+12)} + 3x+12 = 4x+13 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(3x+12)} = 0$, откуда $x+1=0, x_1=-1$, или $3x+12=0, x_2=-4$ — не подходит по ОДЗ.

Проверкой убеждаемся, что $x=-1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=-1$.

2.148. $\sqrt[5]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[5]{\frac{x+3}{5-x}} = 2$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq -3, 5$.

Пусть $y = \sqrt{\frac{5-x}{x+3}}$. Относительно y уравнение принимает вид $y + \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0, y = 1$.

Таким образом, имеем:

$$\sqrt{\frac{5-x}{x+3}} = 1 \Leftrightarrow \frac{5-x}{x+3} = 1, x = 1.$$

Ответ: $x=1$.

2.149. $4x^2 + 5x\sqrt{x+5} = 44(x+5)$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq -5$.

Пусть $y = \sqrt{x+5} > 0$, тогда получаем $4x^2 + 5xy - 44y^2 = 0$.

Делим обе части полученного уравнения на $y^2 \neq 0$. Имеем: $4\frac{x^2}{y^2} + 5\frac{x}{y} - 44 = 0$.

Если $t = \frac{x}{y}$, то тогда $4t^2 + 5t - 44 = 0, D = 729, t_1 = -4, t_2 = \frac{11}{4}$.

Рассмотрим два случая:

$$1) \frac{x}{\sqrt{x+5}} = -4 \Leftrightarrow x = -4\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x < 0, \\ x^2 - 16x - 80 = 0, \end{cases} \quad x_1 = -4;$$

$$2) \frac{x}{\sqrt{x+5}} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 - 121x - 605 = 0, \\ x > 0, \end{cases} \quad x_2 = 11.$$

Ответ: $x_1 = -4, x_2 = 11$.

2.150. $\frac{3}{\sqrt{x+1}+1} + 2\sqrt{x+1} = 5$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq -1$.

Пусть $y = \sqrt{x+1} \geq 0$, тогда получаем уравнение

$$\frac{3}{y+1} + 2y = 5 \Leftrightarrow 3 + 2y(y+1) = 5(y+1) \Leftrightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0, y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = 2, y_1 = -\frac{1}{2} \text{ — не подходит.}$$

Получаем $\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 4, x = 3$.

Ответ: $x=3$.

2.151. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x-5-\sqrt{x+1}} = 4.$

Решение.

Пусть $y = \sqrt{x+1} \geq 0$, $x+1=y^2$, $x=y^2-1$.

Относительно y уравнение принимает вид

$$\sqrt{y^2+2y+1} + \sqrt{y^2-y-6} = 4, \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{y^2-y-6} = 4, |y+1| + \sqrt{y^2-y-6} = 4.$$

Так как $y \geq 0$, то $y+1 + \sqrt{y^2-y-6} = 4$, $\sqrt{y^2-y-6} = 3-y$, где $3-y \geq 0$, $y \leq 3$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $y^2-y-6=9-6y+y^2$, $y=3$.

Тогда $\sqrt{x+1}=3$, $x+1=9$, $x=8$.

Ответ: $x=8$.

2.152. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}.$

Решение.

Пусть $y = \sqrt{2x-5} \geq 0$, $2x-5 = y^2$, $x = \frac{1}{2}(y^2+5)$.

Относительно y уравнение принимает вид

$$\sqrt{\frac{1}{2}(y^2+5)-2+y} + \sqrt{\frac{1}{2}(y^2+5)+2+3y} = 7\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{y^2+5-4+2y} + \sqrt{y^2+5+4+6y} = 14 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y+3)^2} = 14, y+1+y+3=14, y=5.$$

Тогда $\sqrt{2x-5}=5 \Leftrightarrow 2x-5=25$, $x=15$.

Ответ: $x=15$.

2.153. $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \frac{x}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $x \geq 2$.

Домножив и разделив левую часть уравнения на выражение, сопряженное числителю, будем иметь:

$$\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})^2}{(x+2)-(x-2)} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x+2-2+x-2=2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=0 \Leftrightarrow |x|=2, x=2 \quad (x=-2 \text{ — не подходит по ОДЗ}).$$

Ответ: $x=2$.

$$2.154. \sqrt{x+2} + 3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} + \sqrt{5x-1} = 10.$$

Решение.

ОДЗ: $x \geq 1$.

Пусть $y=f(x)$ — левая часть исходного уравнения. Легко видеть, что y — возрастающая функция, так как

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{3}{2\sqrt{x-1}} + \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} + \frac{5}{2\sqrt{5x-1}} > 0 \text{ при } x > 1. \text{ Таким образом, система уравнений } \begin{cases} y = f(x), \\ y = 10 \end{cases} \text{ имеет}$$

единственное решение $x=2$, найденное подбором.

Ответ: $x=2$.

$$2.155. \sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{17-x}.$$

Решение.

ОДЗ: $\frac{1}{2} \leq x \leq 17$.

Пусть $y = \sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{x}$, тогда $y' = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} > 0$ для $x \in (\frac{1}{2}; 17]$, следовательно, y — возрастающая функция.

Если $z = \sqrt[4]{17-x}$, то $z' = -\frac{1}{4}(17-x)^{-\frac{3}{4}} < 0$ для $x \in (\frac{1}{2}; 17]$, поэтому z — убывающая функция.

Таким образом, равенство $y=z$ возможно только при одном значении x . Легко видеть, что $x=1$ — подходит.

Ответ: $x=1$.

$$2.156. \sqrt{3x^2-5x+7} + \sqrt{3x^2-7x+2} = 3.$$

Решение.

$$\begin{aligned} (\sqrt{3x^2-5x+7})^2 - (\sqrt{3x^2-7x+2})^2 &= (\sqrt{3x^2-5x+7} - \sqrt{3x^2-7x+2})(\sqrt{3x^2-5x+7} + \sqrt{3x^2-7x+2}) = \\ &= 3(\sqrt{3x^2-5x+7} - \sqrt{3x^2-7x+2}) = (3x^2-5x+7) - (3x^2-7x+2) = 2x+5. \end{aligned}$$

Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2-5x+7} + \sqrt{3x^2-7x+2} = 3, \\ \sqrt{3x^2-5x+7} - \sqrt{3x^2-7x+2} = \frac{2x+5}{3} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{3x^2-5x+7} = 3 + \frac{2x+5}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2-5x+7} = \frac{2x+14}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x^2-5x+7) = \frac{x^2+14x+49}{3}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{7}{26}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что это корни исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{7}{26}$.

2.157. $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^2+5x+4 - \sqrt{x^2+5x+2} = 6 \Leftrightarrow x^2+5x-2 - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 0$.

Пусть $y = \sqrt{x^2+5x+2} \geq 0$, $x^2+5x+2 = y^2 \Rightarrow x^2+5x = y^2 - 2$.

Относительно y уравнение имеет вид

$y^2 - 3y - 4 = 0$, откуда $y_1 = 4$, $y_2 = -1 < 0$ — не подходит.

Тогда $\sqrt{x^2+5x+2} = 4$, $x^2+5x+2 = 16$, $x^2+5x-14 = 0$, $x_1 = -7$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = -7$, $x_2 = 2$.

2.158. $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{x} \geq 0. \end{cases}$

Перепишем данное уравнение: $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}} \left(\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) = 0$.

Отсюда имеем два случая:

1) $\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0$, $\frac{x-1}{x} = 0$, $x_1 = 1$;

2) $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{\frac{x-1}{x}} \Rightarrow (\sqrt{x+1} - 1)^2 = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{x+1} + x+1 = 0$.

$(x - \sqrt{x+1})^2 = 0$, $x = \sqrt{x+1} \Rightarrow x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ — не подходит, так как $x > 0$.

Проверкой убеждаемся, что x_2 — действительно корень исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$2.159. \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Решение.

Домножив обе части уравнения на $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, получим:

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2} \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - x} = \frac{1}{2} \sqrt{x} \text{ и } x > 1.$$

$$\begin{cases} 2(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\sqrt{x-1} = \sqrt{x}, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x-1}, \\ x > 1. \end{cases}$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$4x - 4\sqrt{x} + 1 = 4x - 4 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 5, \quad x = \frac{25}{16}.$$

Проверкой убеждаемся, что это действительно корень нашего уравнения.

Ответ: $x = \frac{25}{16}$.

$$2.160. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$$

Решение.

Возведем в куб обе части уравнения:

$$\begin{aligned} x + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x-3} + \sqrt[3]{2x-3} + 2x - 3 &= 12(x-1) \Leftrightarrow x - 1 + \sqrt[3]{x(2x-3)12(x-1)} = 4(x-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{12x(x-1)(2x-3)} &= 3(x-1) \Leftrightarrow 12x(x-1)(2x-3) = 27(x-1)^3 \Leftrightarrow (x-1)[4x(2x-3) - 9(x-1)^2] = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)(-x^2 + 6x - 9) &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)^2 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3. \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 3$.

$$2.161. \sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1} + \sqrt[3]{x+a+2} = 0.$$

Решение.

Перепишав уравнение в виде $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1} = -\sqrt[3]{x+a+2}$ и возведя обе части в куб, получим:

$$\begin{aligned} x + a + 3\sqrt[3]{(x+a)^2(x+a+1)} + 3\sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)^2} + x + a + 1 &= -(x+a+2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)}(\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1}) &= -(x+a+1). \end{aligned}$$

Так как $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1} = -\sqrt[3]{x+a+2}$, то имеем:

$$\begin{aligned} -\sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)(x+a+2)} &= -(x+a+1) \Leftrightarrow (x+a)(x+a+1)(x+a+2) = (x+a+1)^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+a+1)((x+a)(x+a+2) - (x+a+1)^2) &= 0 \Leftrightarrow (x+a+1)(-1) = 0, \text{ откуда } x = -(a+1). \end{aligned}$$

Ответ: $x = -(a+1)$.

$$2.162. \sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2 - x^2}.$$

Решение.

При $a \neq 0$ $x=a$ не является корнем уравнения. Поделим обе его части на $\sqrt[3]{(a-x)^2}$ и получим уравнение

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2} + 4 = 5\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Пусть $y = \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$, тогда имеем уравнение $y^3 - 5y + 4 = 0$, $y_1 = 4, y_2 = 1$.

$$1) \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{a+x}{a-x} = 64 \Leftrightarrow a+x = 64a - 64x, x_1 = \frac{63}{65}a;$$

$$2) \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{a+x}{a-x} = 1 \Leftrightarrow a+x = a, x_2 = 0.$$

При $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Ответ: при $a=0$ $x=0$;

$$\text{при } a \neq 0 \quad x_1 = \frac{63}{65}a, x_2 = 0.$$

$$2.163. \sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a+x \geq 0, \\ a \geq \sqrt{a+x}, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x \leq a^2 - a. \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат. Имеем $a - \sqrt{a+x} = x^2$. Пусть $y = \sqrt{a+x} \geq 0$, тогда получаем систему

$$\begin{cases} a-y = x^2, \\ a+x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = a, \\ y^2 - x = a \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + y + x = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) + x + y = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0, \\ x-y+1 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем:

$$1) x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \text{ при } a=0, \text{ т.е. } x=0 \text{ при } a=0;$$

$$2) x-y+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{a+x}+1=0 \Leftrightarrow x+1=\sqrt{a+x} \Leftrightarrow x^2+2x+1=a+x \Leftrightarrow x^2+x+1-a=0,$$

$$D=1+4a-4=4a-3 \geq 0 \text{ при } a \geq \frac{3}{4}.$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2} \text{ — не подходит, так как } x \geq 0.$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}.$$

Учитывая ОДЗ, получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} a \geq \frac{3}{4}, \\ \sqrt{4a-3}-1 \geq 0, \\ \frac{2}{\sqrt{4a-3}-1} \leq a^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{3}{4}, \\ \sqrt{4a-3} \geq 1, \\ \sqrt{4a-3}-1 \leq 2a^2 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1, \\ \sqrt{4a-3} \leq 2a^2 - 2a + 1. \end{cases}$$

Покажем, что второе неравенство истинно. Пусть $t = \sqrt{4a-3} \geq 1$, тогда $a = \frac{t^2+3}{4}$ и имеем:

$$t \leq 2 \cdot \left(\frac{t^2+3}{4} \right)^2 - 2 \cdot \frac{t^2+3}{4} + 1 \Leftrightarrow 8t \leq t^4 + 2t^2 - 8t + 5 \geq 0.$$

Если $f(t) = t^4 + 2t^2 - 8t + 5$, $t \in [1; +\infty)$, то $f'(t) = 4t^3 + 4t - 8 > 0$ при $t > 1$, следовательно, функция $f(t)$ — возрастающая на $[1; +\infty)$. Так как $f(1) = 1$, то $t^4 + 2t^2 - 8t + 5 > 0$ при $t > 1$ и неравенство $\sqrt{4a-3} \leq 2a^2 - 2a + 1$ — истинно при $a \geq 1$.

Ответ: при $a=0$ $x=0$;

при $a \geq 1$ $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$;

при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$ решений нет.

2.164. $\sqrt{2x+a} - \sqrt{x-1} = 2$.

Решение.

Пусть $y = \sqrt{x-1} \geq 0$, $x = y^2 + 1 \geq 1$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$\sqrt{2y^2+a+2} = y+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+a+2 = y^2+4y+4, \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y+(a-2) = 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

$$y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6-a} \Rightarrow a \leq 6.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $a=6, y_1=y_2=2 \Rightarrow x_1=5$;

2) $2 - \sqrt{6-a} \geq 0, \begin{cases} 6-a > 0, \\ 6-a \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq a < 6, x_{1,2} = 11 - a + 4\sqrt{6-a}$;

3) $2 - \sqrt{6-a} < 0, a < 2, x = 11 - a + 4\sqrt{6-a}$.

Ответ: если $a < 2$, то $x_1 = 11 - a + 4\sqrt{6-a}$;

если $2 \leq a < 6$, то $x_{1,2} = 11 - a \pm 4\sqrt{6-a}$;

если $a=6$, то $x=5$;

если $a > 6$, то решений нет.

2.165. $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+8 \geq 0, \\ x-8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 8$.

Пусть $\begin{cases} y = \sqrt[4]{x+8} \geq 0, \\ z = \sqrt[4]{x-8} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+8 = y^4, \\ x-8 = z^4. \end{cases}$

Приходим к системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} y-z=2, \\ y^4-z^4=16 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y-z=2, \\ (y^2-z^2)(y^2+z^2)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-z=2, \\ (y-z)(y+z)((y-z)^2+2yz)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y-z=2, \\ 2(y+z)(4+2yz)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2+z, \\ (y+z)(2+yz)=4 \end{cases} \Rightarrow (2+z+z)(2+(2+z)z)=4 \Leftrightarrow z(z^2+3z+4)=0. \end{aligned}$$

Отсюда $z=0$, $z^2+3z+4 \neq 0$, так как $D < 0$.Тогда $y=2$, $x=y^4-8=8$.*Ответ:* $x=8$.

2.166. $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{b-x} = \sqrt[4]{a+b-2x}$.

Решение.

ОДЗ: $x \leq a$, $x \leq b$.

Если $u = \sqrt[4]{a-x}$, $v = \sqrt[4]{b-x}$, то $a+b-2x=u^4+v^4$ и исходное уравнение принимает вид: $u+v = \sqrt[4]{u^4+v^4}$.

Возведя обе части этого уравнения в четвертую степень и приведя подобные, получаем уравнение

$$uv(2u^2+3uv+2v^2)=0, \quad u=0 \text{ или } v=0.$$

Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

Ответ: если $a \geq b$, то $x=b$;если $a < b$, то $x=a$.

2.167. $\sqrt[5]{16+\sqrt{x}} + \sqrt[5]{16-\sqrt{x}} = 2$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq 0$.

Пусть $u = \sqrt[5]{16+\sqrt{x}}$, $v = \sqrt[5]{16-\sqrt{x}}$, тогда уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} u+v=2 &\Rightarrow (u+v)^5=32 \Leftrightarrow u^5+v^5+5uv(u^3+v^3)+10u^2v^2(u+v)=32 \Leftrightarrow u^5+v^5+5uv(u+v)(u^2-v^2)+10u^2v^2(u+v)=32 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u^5+v^5+5uv \cdot 2[(u+v)^2-3uv]+20u^2v^2=32 \Leftrightarrow (u^5+v^5=32) \Leftrightarrow 32+10uv(4-3uv)+20u^2v^2=32 \Leftrightarrow uv(4-uv)=0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

- 1) $u = 0, 16 + \sqrt{x} = 0, \emptyset$;
- 2) $v = 0, 16 - \sqrt{x} = 0, x_1 = 256$;
- 3) $\begin{cases} uv = 4, \\ u + v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 - u, \\ u(2 - u) = 4 \end{cases} \Rightarrow u^2 - 2u + 4 = 0, D < 0, \emptyset.$

Ответ: $x=256$.

$$2.168. \sqrt[n]{(1+x)^2} - \sqrt[n]{(1-x)^2} = \sqrt[n]{1-x^2}.$$

Решение.

Так как $x \neq 1$, то, поделив обе части уравнения на $\sqrt[n]{(1-x)^2}$, получаем

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - 1 = \sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Если $t = \sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}$, то имеем $t^2 - t - 1 = 0$, $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ — не подходит, если $n=2k$, так как в этом случае $t \geq 0$.

$$\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 1}.$$

Если $n=2k+1$, то имеем два корня:

$$x_{1,2} = \frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n + 1}.$$

Ответ: если $n=2k$, то $x = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 1}$;

если $n=2k+1$, то $x_{1,2} = \frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n + 1}.$

$$2.169. \frac{\sqrt[n]{a-x}}{x^2} - \frac{\sqrt[n]{a-x}}{a^2} = \sqrt[n]{\frac{x^2}{a+x}}.$$

Решение.

Домножив обе части уравнения на $\sqrt[n]{\frac{a+x}{x^2}}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}} - \frac{1}{a^2} \sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}} &= 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2} \frac{a^2-x^2}{a^2 x^2}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a^2-x^2}{x^2} \right)^{\frac{n+1}{n}} = a^2 \Rightarrow \frac{a^2-x^2}{x^2} = a^{\frac{2n}{n+1}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 &= \left(1 + a^{\frac{2n}{n+1}} \right) x^2, \quad x_{1,2} = \pm \frac{a}{\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}}}. \end{aligned}$$

Оба найденных значения являются корнями данного уравнения при $a \neq 0$. В случае $n=2k$ имеем $-a < x \leq a$, где $a > 0$. Это условие выполняется, так как $\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}} > 1$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm \frac{a}{\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}}}$ при $a \neq 0$, если $n=2k+1$; при $a > 0$, если $n=2k$.

$$2.170. \sqrt{x-\sqrt{3}} + a^2 x^2 + 2ax(\sqrt{6}-\sqrt{3}) = 6\sqrt{2}-9.$$

Решение.

Так как $x \neq 0$, то уравнение можно переписать в виде

$$a^2 + 2a \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x} \right) + \frac{\sqrt{x-\sqrt{3}} + 9 - 6\sqrt{2}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x} \right)^2 + \frac{\sqrt{x-\sqrt{3}}}{x^2} = 0.$$

Так как оба слагаемых в левой части полученного уравнения неотрицательны, то это уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x}, \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1-\sqrt{2}.$$

Ответ: если $a = 1-\sqrt{2}$, то $x = \sqrt{3}$;

если $a \neq 1-\sqrt{2}$, то решений нет.

Решить системы уравнений (2.171–2.203).

$$2.171. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 4, \\ -2x_1 + 6x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение.

К обеим частям второго уравнения прибавим соответствующие части первого уравнения, умноженные на 2, и получим:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 4, \\ 8x_1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = \frac{1}{3}(5x_1 - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(1; \frac{1}{3}\right)$

$$2.172. \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \begin{vmatrix} a_{21} & - \\ a_{11} & \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Пусть $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, $\Delta_x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$, $\Delta_y = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$. (*)

Если $\Delta \neq 0$, то из второго уравнения системы $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. Подставляя найденное значение y в первое уравнение, после преобразований получаем $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_y \neq 0$ ($\Delta_x \neq 0$), то система решений не имеет. Если $\Delta = 0$, $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечное множество решений.

Ответ: если $\Delta \neq 0$, то $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, где Δ , Δ_x , Δ_y определяются (*);

если $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ ($\Delta_y \neq 0$), то система решений не имеет;

если $\Delta = 0$, $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечное множество решений.

$$2.173. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение.

Раскроем суть алгоритма метода Гаусса, дав описание очередного k -го шага ($k=1, 2, \dots$). Таким образом, k -й шаг состоит в следующем.

- 1) Из системы, полученной ранее, удаляем уравнения вида $0=0$. Если в системе имеется хотя бы одно противоречивое уравнение, то система решений не имеет и процесс заканчивается.
- 2) Если противоречивых уравнений нет, то одно из уравнений выбирается за разрешающее уравнение, а одно из неизвестных — за разрешающее неизвестное. При этом требуется, чтобы:
 - а) на предыдущих шагах это уравнение не было разрешающим;
 - б) в разрешающем уравнении коэффициент при разрешающем неизвестном был отличен от нуля.

3) Из всех уравнений, кроме разрешающего, исключаем разрешающее неизвестное. Для этого к каждому из таких уравнений прибавляем разрешающее уравнение, умноженное на подходящее число.

Процесс заканчивается, если ни одно из уравнений уже нельзя выбрать за разрешающее, т.е. все уравнения перебивали в этой роли. Из полученной системы находим общее решение.

Процесс решения нашего примера запишем в виде вертикальной последовательности таблиц. При этом каждому шагу метода Гаусса соответствует переход от очередной таблицы к следующей. Разрешающие элементы обводятся, а действия по исключению неизвестных поясняются стрелками.

x_1	x_2	x_3			
①	2	3	2	①	①
1	-1	-1	-2	←	
1	3	-1	-2	←	
1	2	3	2	←	
0	-3	-4	-4	←	
0	①	-4	-4		③ ②
1	0	11	10		
0	0	①6	-16		
0	1	-4	-4		
1	0	11	10	←	
0	0	①	1		④ ①1
0	1	-4	-4	←	
1	0	0	-1		
0	0	1	1		
0	1	0	0		

Последняя таблица записывается в виде системы

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_3 = 1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

2.174.
$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y - 3z = -7, \\ 3x + 3y - 7z = 2. \end{cases}$$

Решение.

Пояснения к решению по методу Гаусса см. в 2.173.

x	y	z			
①	-1	1	0	②	③
2	1	-3	-7	←	
3	3	-7	2	←	
1	-1	1	0		
0	3	-5	-7	②	
0	①	-10	2	←	
1	-1	1	0		
0	3	-5	-7		
0	0	0	-16		

Получили противоречивое уравнение $0x+0y+0z=16, \emptyset$.

Ответ: решений нет.

2.175.
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение.

Пояснения к решению по методу Гаусса см. в 2.173.

x_1	x_2	x_3	x_4				
①	-3	2	2	1	①	①	①
3	-8	8	7	3	←		
2	-4	8	8	0	←		
2	-3	10	8	1	←		
1	-3	2	2	1	←		
0	①	2	1	0	③	②	③
0	2	4	4	-2	←		
0	3	6	4	-1	←		
1	0	8	5	1	←		
0	1	2	1	0	←		
0	0	0	2	-2	←		
0	0	0	①	-1	②	①	⑤
1	0	8	0	6			
0	1	2	0	1			
0	0	0	0	0			
0	0	0	1	-1			

Последнюю таблицу запишем в виде системы

$$\begin{cases} x_1 + 8x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - 8x_3, \\ x_2 = 1 - 2x_3, \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

Система имеет бесконечное множество решений.

Ответ: $x_1 = 6 - 8x_3$, $x_2 = 1 - 2x_3$, $x_4 = -1$, где x_3 — любое число.

2.176.
$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2. \end{cases}$$

Решение.

Складывая все уравнения системы, находим $(a+2)(x+y+z) = 1+a+a^2$.

Если $a = -2$, то система решений не имеет. Если $a = 1$, то система имеет бесконечное множество решений $z = 1 - x - y$. При $a \neq -2, 1$

решаем полученное уравнение совместно с каждым из уравнений системы. Имеем: $x = -\frac{1+a}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$.

Ответ: если $a \neq -2, 1$, то $x = -\frac{1+a}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$;

если $a = -2$, то решений нет;

если $a = 1$, то $z = 1 - x - y$, где x, y — любые числа.

2.177.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 10, \\ mx + (m-1)y = 3m+1, \\ 2mx + 4y = 7m-1. \end{cases}$$

Решение.

Используя формулы (*) из задачи 2.172, для системы $\begin{cases} 3x + 2y = 10, \\ mx + (m-1)y = 3m+1 \end{cases}$ имеем:

$$\Delta = 3(m-1) - 2m = m-3; \Delta_x = 10(m-1) - 2(3m+1) = 4m - 12 = 4(m-3); \Delta_y = 3(3m+1) - 10m = 3 - m.$$

Рассмотрим два случая:

1) $m = 3$, тогда исходная система принимает вид $\begin{cases} 3x + 2y = 10, \\ 3x + 2y = 10, \\ 6x + 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow 3x + 2y = 10$. Система имеет бесчисленное множество решений;

2) $m \neq 3$, тогда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 4$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1$, а из последнего уравнения исходной системы получаем, что $8m - 4 = 7m - 1$, $m = 3$.

Противоречие. Система решений не имеет.

Ответ: если $m \neq 3$, то система решений не имеет;

если $m = 3$, то $y = 5 - \frac{3}{2}x$, где x — любое число.

$$2.178. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \dots, \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Складывая все уравнения системы, после деления на три имеем:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) + \dots + (x_{97} + x_{98} + x_{99}) + x_{100} = 0 \Rightarrow x_{100} = 0.$$

Далее, $(x_{100} + x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + x_5) + \dots + (x_{96} + x_{97} + x_{98}) + x_{99} = 0 \Rightarrow x_{99} = 0$. Из предпоследнего уравнения исходной системы $x_1 = 0$, из последнего — $x_2 = 0$. Тогда из первого — $x_3 = 0$, из второго — $x_4 = 0$, из третьего — $x_5 = 0$ и т.д. Получаем $x_1 = x_2 = \dots = x_{100} = 0$.

Ответ: $x_1 = x_2 = \dots = x_{100} = 0$.

$$2.179. \begin{cases} |x| + 3y = 7, \\ 2x + 2|y - 1| = 3. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим следующие четыре случая:

$$1) \ x \geq 0; y \geq 1, \begin{cases} x + 3y = 7, \\ 2x + 2y = 5, \end{cases} \Delta = -4, \Delta_x = -1, \Delta_y = -9, x = \frac{1}{4}, y = \frac{9}{4} \text{ (см. 2.172);}$$

$$2) \ x \geq 0; y < 1, \begin{cases} x + 3y = 7, \\ 2x - 2y = 1, \end{cases} \Delta = -8, \Delta_y = -13, y = \frac{13}{8} > 1 \text{ — не подходит;}$$

$$3) \ x < 0; y \geq 1, \begin{cases} -x + 3y = 7, \\ 2x + 2y = 5, \end{cases} \Delta = -8, \Delta_x = -1, x = \frac{1}{8} > 0 \text{ — не подходит;}$$

$$4) \ x < 0; y < 0, \begin{cases} -x + 3y = 7, \\ 2x - 2y = 1, \end{cases} \Delta = -4, \Delta_y = -15, y = \frac{15}{4} > 1 \text{ — не подходит.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{4}, y = \frac{9}{4}.$$

$$2.180. \begin{cases} |x + y| = 3, \\ |x| + |y| = 3. \end{cases}$$

Решение.

Из условия имеем $|x+y| = |x|+|y|$, что возможно только тогда, когда x, y — одинаковых знаков. Таким образом, возможны два случая:

$$1) \ x < 0, y < 0, x+y = -3, y = -x-3;$$

$$2) \ x \geq 0, y \geq 0, x+y = 3, y = 3-x.$$

Ответ: система имеет бесчисленное множество решений;

если $x < 0, y < 0$, то $y = -x-3$, где $x \in (-3; 0)$;

если $x \geq 0, y \geq 0$, то $y = 3-x$, где $x \in [0; 3]$.

$$2.181. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ |x + y| = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы.

$$\sqrt{\frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+y)^2}}{\sqrt{xy}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|x+y|}{\sqrt{xy}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} \frac{|x+y|}{\sqrt{xy}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ |x+y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{xy}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ |x+y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2, \\ |x+y| = 3. \end{cases}$$

Получаем два случая:

$$1) \begin{cases} xy = 2, \\ x + y = -3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

По теореме Виета имеем $\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1. \end{cases}$

Ответ: $(-2; -1), (-1; -2), (1; 2), (2; 1)$.

$$2.182. \begin{cases} |x+y| = x-y+a, \\ |x-y| = x+y+b. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим следующие четыре случая:

$$1) \begin{cases} x+y \geq 0, \\ x-y \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x+y = x-y+a, \\ x-y = x+y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{2}, \\ y = -\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow a = -b, x \geq |y|;$$

$$2) \begin{cases} x+y \geq 0, \\ x-y < 0; \end{cases} \begin{cases} x+y = x-y+a, \\ x-y = x+y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{2}, \\ x = -\frac{b}{2}, \end{cases} \text{ при этом } \begin{cases} a-b \geq 0, \\ -a-b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b \geq 0, \\ a+b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq |b|;$$

$$3) \begin{cases} x+y < 0, \\ x-y < 0; \end{cases} \begin{cases} -x-y = x-y+a, \\ -x+y = x+y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2}, \\ x = -\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow a = b, |y| \leq -x;$$

$$4) \begin{cases} x+y < 0, \\ x-y \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -x-y = x-y+a, \\ x-y = x+y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{a}{2}, \\ y = -\frac{b}{2}, \end{cases} \text{ при этом } \begin{cases} a+b > 0, \\ b-a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow b \geq |a|.$$

Ответ: $y = \frac{a}{2} = -\frac{b}{2}$ при $a = -b$, x — любое, $x \geq |y|$;

$$x = -\frac{b}{2}, y = \frac{a}{2} \text{ при } |a| \geq b;$$

$$x = -\frac{a}{2} = -\frac{b}{2} \text{ при } a = b, y \text{ — любое, } |y| \leq -x;$$

$$x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{b}{2} \text{ при } b \geq |a|.$$

$$2.183. \begin{cases} x+xy+y=5, \\ x^2y+xy^2=6. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $\begin{cases} u = xy, \\ v = x+y, \end{cases}$ тогда система принимает вид $\begin{cases} u+v=5, \\ uv=6. \end{cases}$ По теореме Виета получим $\begin{cases} u_1=2, \\ v_1=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} u_2=3, \\ v_2=2. \end{cases}$

Далее, имеем два случая:

$$1) \begin{cases} xy=2, \\ x+y=3, \end{cases} \text{ откуда по теореме Виета } \begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} xy=3, \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=3, \\ y=2-x \end{cases} \Rightarrow x^2-2x+3=0, D < 0, \emptyset.$$

Ответ: (1; 2), (2; 1).

$$2.184. \begin{cases} y^2-xy=-3, \\ x^2-xy=4. \end{cases}$$

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} y(y-x)=-3, \\ x(x-y)=4. \end{cases}$

Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{y(y-x)}{x(x-y)} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{4}, \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x, \\ x(x-y)=4 \end{cases} \Rightarrow x(x-\frac{3}{4}x)=4, x^2=16, |x|=4.$$

Таким образом, имеем:

$$1) \begin{cases} x_1=-4, \\ y_1=-3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=3. \end{cases}$$

Ответ: (-4; -3), (4; 3).

$$2.185. \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Решение.

По формуле суммы кубов имеем: $\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 35, \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5((x+y)^2 - 3xy) = 35, \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 3xy = 7, \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6, \\ x+y=5. \end{cases}$

По теореме Виета возможны следующие варианты:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 3), (3; 2).

$$2.186. \begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 12, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 24. \end{cases}$$

Решение.

Так как левые части уравнений однородные относительно x и y , то введем замену $y = tx$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} x^2(2 - 3t + t^2) = 12, \\ x^2(1 + 2t - 2t^2) = 24. \end{cases}$$

Разделив левые и правые части уравнений на x^2 ($x \neq 0$), получаем уравнение

$$\frac{2 - 3t + t^2}{1 + 2t - 2t^2} = \frac{1}{2} \left(t \neq \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \right), \quad 4t^2 - 8t + 3 = 0, \text{ откуда } t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим два случая:

1) $t_1 = \frac{1}{2}$. Из уравнения $x^2(1 + 2t - 2t^2) = 24 \Rightarrow x^2 \left(1 + 1 - \frac{1}{2} \right) = 24, x^2 = 16$, откуда $x_1 = 4, x_2 = -4$; тогда $y_1 = 2, y_2 = -2$;

2) $t_2 = \frac{3}{2}$. Имеем: $x^2 \left(1 + 3 - \frac{9}{2} \right) = 24, x^2 = -48$, решений нет.

Ответ: (4; 2), (-4; -2).

$$2.187. \begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

Решение.

Так как левые части уравнений однородные относительно x и y , то разделим второе уравнение системы на первое и получим:

$$\frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(x+y)xy} = \frac{35}{30} \Leftrightarrow 6x^2 - 6xy + 6y^2 = 7xy \Leftrightarrow 6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0.$$

Так как $y \neq 0$, то, разделив обе части полученного уравнения на y^2 и введя переменную $t = \frac{x}{y}$, имеем $6t^2 - 13t + 6 = 0$,

$$D = 169 - 144 = 25, \quad t = \frac{13 \pm 5}{12}, \quad t_1 = \frac{2}{3}, \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

Далее, рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases} \Rightarrow x^3 + \frac{27}{8}x^3 = 35, x^3 = 8, x_1 = 2, y_1 = 3;$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases} \Rightarrow \frac{27}{8}y^3 + y^3 = 35, y^3 = 8, y_2 = 2, x_2 = 3.$$

Ответ: (2; 3), (3; 2).

$$2.188. \begin{cases} x^2 + y = y^2 + x, \\ y^2 + x = 6. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{Из условия имеем: } \begin{cases} x^2 - y^2 - x + y = 0, \\ y^2 + x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) - (x-y) = 0, \\ y^2 + x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0, \\ y^2 + x = 6. \end{cases}$$

Полученная система уравнений равносильна совокупности двух систем уравнений: 1) $\begin{cases} x-y=0, \\ y^2+x=6 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} x+y-1=0, \\ y^2+x=6; \end{cases}$

$$\text{решив их, найдем } \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_3 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}, \\ y_3 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}, \\ y_4 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2), (-3; -3), \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \frac{1-\sqrt{21}}{2} \right), \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right).$$

$$2.189. \begin{cases} x^4 + \frac{1}{y^4} = y^4 + \frac{1}{x^4}, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 16. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0, y \neq 0$.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$\frac{x^4 y^4 + 1}{y^4} = \frac{y^4 x^4 + 1}{x^4} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 = x^4, \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = |x|, \\ x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} y = x, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 = 16, |x| = 2, x_1 = y_1 = -2, x_2 = y_2 = 2;$$

$$2) \begin{cases} y = -x, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 8, |x| = 2\sqrt{2}, x_3 = -2\sqrt{2}, y_3 = 2\sqrt{2}; x_4 = 2\sqrt{2}, y_4 = -2\sqrt{2}.$$

Ответ: $(-2; -2), (2; 2), (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}), (2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.

$$2.190. \begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x + y + z) + 3 = 3 - 6 + 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Ответ: (1; 1; 1).

$$2.191. \begin{cases} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ xz + yz = (xy + 1)^2. \end{cases}$$

Решение.

$$(x + y + z)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 36.$$

Вычтем из полученного уравнения второе уравнение системы. Имеем:

$$2xy + 2xz + 2yz = 22 \Leftrightarrow xy + xz + yz = 11 \Leftrightarrow xz + yz = 11 - xy.$$

Подставляя полученное выражение в третье уравнение системы, получим:

$$11 - xy = (xy + 1)^2 \Leftrightarrow (xy)^2 + 3xy - 10 = 0, (xy)_1 = -5, (xy)_2 = 2.$$

Рассмотрим два случая:

1) $xy = -5$. Из первого и третьего уравнений исходной системы получаем:

$$\begin{cases} (x + y) + z = 6, \\ (x + y)z = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 - z, \\ (x + y)z = 16 \end{cases} \Rightarrow (6 - z)z = 16, z^2 - 6z + 16 = 0, D < 0, \emptyset;$$

2) $xy = 2$. Как и в первом случае, рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} (x + y) + z = 6, \\ (x + y)z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 - z, \\ (x + y)z = 9 \end{cases} \Rightarrow (6 - z)z = 9, z^2 - 6z + 9 = 0, z = 3.$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Отсюда по теореме Виета находим два решения

$$x_1 = 1, y_1 = 2; x_2 = 2, y_2 = 1.$$

Делая проверку подстановкой в исходную систему, убеждаемся, что (1; 2; 3) и (2; 1; 3) действительно решения.

Ответ: (1; 2; 3), (2; 1; 3).

$$2.192. \begin{cases} y + z + yz = a, \\ z + x + zx = b, \\ x + y + xy = c, \end{cases} \quad a > -1, b > -1, c > -1.$$

Решение.

Добавив по единице в левую и правую части каждого из уравнений системы, получим:

$$\begin{cases} y + z + yz + 1 = a + 1, \\ z + x + zx + 1 = b + 1, \\ x + y + xy + 1 = c + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 + z(y + 1) = a + 1, \\ z + 1 + x(z + 1) = b + 1, \\ x + 1 + y(x + 1) = c + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 1)(z + 1) = a + 1, \\ (z + 1)(x + 1) = b + 1, \\ (x + 1)(y + 1) = c + 1. \end{cases}$$

Перемножая каждые два уравнения системы и разделив полученный результат на оставшееся уравнение системы, имеем:

$$\begin{cases} (x+1)^2 = \frac{(b+1)(c+1)}{(a+1)}, \\ (y+1)^2 = \frac{(a+1)(c+1)}{(b+1)}, \\ (z+1)^2 = \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = \sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}, \\ |y+1| = \sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}}, \\ |z+1| = \sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}. \end{cases}$$

Учитывая, что $a+1>0$, $b+1>0$, $c+1>0$, заключаем, что $x+1$, $y+1$, $z+1$ должны быть одинаковых знаков. Следовательно, возможны только два решения.

$$\text{Ответ: } \left(-\sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}} - 1; -\sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}} - 1; -\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}} - 1 \right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}} - 1; \sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}} - 1; \sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}} - 1 \right).$$

$$2.193. \begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

Решение.

Так как $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, то $xy+xz+yz=0$.

Далее, $a^3 = (x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+3y^2z+3yz^2 = x^3+y^3+z^3+3x(xy+xz+yz) + 3y(xy+yz+xz) + 3z^2(x+y) = x^3+y^3+z^3+3z^2(x+y) = a^3+3z^2(x+y) \Rightarrow 3z^2(x+y)=0$.

Рассмотрим два случая:

- 1) $z=0$, тогда $xy=0$ и получаем два решения: $x_1=0, y_1=a, z_1=0$ или $x_2=a, y_2=0, z_2=0$;
- 2) $z \neq 0$, тогда $x+y=0 \Rightarrow z_3=a, x^2+y^2=0, x_3=y_3=0$.

Ответ: если $a \neq 0$, то $(0; a; 0)$, $(a; 0; 0)$, $(0; 0; a)$;

если $a=0$, то $(0; 0; 0)$.

$$2.194. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \sqrt{x} = u \geq 0, \\ \sqrt[4]{y} = v \geq 0, \end{cases}$ $\sqrt{x} = u^2$, $\sqrt{y} = v^2$. Относительно u и v система имеет вид: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 5, \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 5, \\ u+v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 2, \\ u+v = 3 \end{cases}$

откуда по теореме Виета $\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 2, \end{cases} \begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = 1. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} \sqrt[4]{x_1} = 1, \\ \sqrt[4]{y_1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 16; \end{cases} \begin{cases} \sqrt[4]{x_2} = 2, \\ \sqrt[4]{y_2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 16, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: (1; 16), (16; 1).

$$2.195. \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 4, \\ x^2y + y^2x = 10. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} x\sqrt{y} = u \geq 0, \\ y\sqrt{x} = v \geq 0. \end{cases}$ Относительно u и v система принимает вид:

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ u^2 + v^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4, \\ (u + v)^2 - 2uv = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4, \\ 16 - 2uv = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 3, \end{cases}$$

откуда по теореме Виета $\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} u_2 = 3, \\ v_2 = 1. \end{cases}$

Тогда:

$$1) \begin{cases} x\sqrt{y} = 1, \\ y\sqrt{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = 1, \\ y^2x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2}, \\ \frac{1}{x^4} \cdot x = 9, \end{cases} x^3 = \frac{1}{9}, x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}, y_1 = \sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3};$$

$$2) \begin{cases} x\sqrt{y} = 3, \\ y\sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = 3, \\ y^2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{x^2}, \\ \frac{9}{x^4} \cdot x = 1, \end{cases} x^3 = 9, x_2 = \sqrt[3]{9}, y_2 = \frac{3}{\sqrt[3]{81}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; 3\sqrt[3]{3} \right), \left(\sqrt[3]{9}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right).$$

$$2.196. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений в следующем виде $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} = 6. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{x} + \sqrt{y} = u \geq 0, \sqrt{xy} = v \geq 0$.

Тогда получаем: $\begin{cases} u = 2v, \\ u^2 - 2v = 6 \end{cases} \Rightarrow u^2 - u - 6 = 0, u_1 = 3, u_2 = -2$ — не подходит. $u = 3 \Rightarrow v = \frac{3}{2}$. Следовательно, имеем систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{xy} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2\sqrt{xy} + y = 9, \\ xy = \frac{9}{4}, \end{cases} \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = \frac{9}{4}, \end{cases} \begin{cases} y = 6 - x, \\ xy = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow 6x - x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow 4x^2 - 24x + 9 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 12^2 - 36 = 6 \cdot 18 = 6^2 \cdot 3, \quad x_1 = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{4} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{4} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2};$$

$$y_1 = 6 - \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}, \quad y_2 = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}; \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}; \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}\right).$

2.197. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $xy > 0$.

Пусть $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$, тогда первое уравнение системы принимает вид:

$$t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -\frac{1}{2} \text{ — не подходит.}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 2, \\ x + xy + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y, \\ x + xy + y = 9 \Rightarrow 4y^2 + 5y - 9 = 0; \end{cases} y_1 = 1, \quad y_2 = -\frac{9}{4}; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -9.$$

Ответ: $(4; 1), (-9; -\frac{9}{4}).$

2.198. $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x}}{y} = \frac{3}{8}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $y > 0, x \geq 0$.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$\frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x+y} - \sqrt{x})(\sqrt{x+y} + \sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x}}{y} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x} - \sqrt{x+y} + \sqrt{x}}{y} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{16}y. \text{ Имеем систему уравнений:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{3}{16}y, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{16}y + \sqrt{y} = 7, \quad 3(\sqrt{y})^2 + 16\sqrt{y} - 112 = 0, \quad \sqrt{y} = \frac{-8 \pm 20}{3} \Rightarrow \sqrt{y} = 4, \quad y = 16, \quad x = 9.$$

Ответ: (9; 16).

$$2.199. \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$$

Решение.

Возведем первое уравнение системы в куб, имеем:

$$\begin{aligned} x+2y+3\sqrt[3]{(x+2y)^2(x-y+2)}+3\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)^2}+x-y+2 &= 27 \Leftrightarrow 2x+y+ \\ +3\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)}(\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}) &= 25 \Leftrightarrow 7+3\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)} \cdot 3 = 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)} = 2 &\Leftrightarrow (x+2y)(x-y+2) = 8. \end{aligned}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (x+2y)(x-y+2) = 8, \\ 2x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7-2x, \\ (x+2y)(x-y+2) = 8 \end{cases} \Rightarrow (7+2(7-2x))(x-7+2x+2) = 8,$$

$$9x^2 - 57x + 78 = 0, \quad 3x^2 - 19x + 26 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{13}{3}; \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -\frac{5}{3}.$$

Ответ: (2; 3), $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

$$2.200. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt{\frac{z}{x}} = 3, \\ \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{z}{y}} + \sqrt{\frac{x}{z}} = 3, \\ \sqrt{xyz} = 1. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0, y > 0, z > 0$.

Складывая первое и второе уравнения системы, находим:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt{\frac{z}{y}} + \sqrt{\frac{z}{x}} + \sqrt{\frac{x}{z}} &= 6 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + 2 + \left(\sqrt{\frac{y}{z}} - \sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2 + 2 + \left(\sqrt{\frac{z}{x}} - \sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2 + 2 = 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{y}{z}} - \sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{z}{x}} - \sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2 &= 0 \Leftrightarrow x = y = z. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения системы имеем $x=1$, тогда $y=1$ и $z=1$.

Ответ: (1; 1; 1).

$$2.201. \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = a, \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a^2, \quad a > 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-y \geq 0, \\ x+y \geq 0. \end{cases}$$

Возведя первое уравнение в квадрат, получим: $x+y-2\sqrt{(x+y)(x-y)}+x-y=a^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2}=x-\frac{a^2}{2}$.

Подставляя во второе уравнение системы, найдем: $\sqrt{x^2+y^2}=a^2-x+\frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\frac{3a^2}{2}-x$.

Теперь возведем в квадрат обе части второго уравнения исходной системы. Получаем:

$$x^2+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2-y^2}+x^2-y^2=a^4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2-y^2}=\frac{a^4}{2}-x^2.$$

Таким образом, имеем:

$$\left(\frac{3a^2}{2}-x\right)\left(x-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^4}{2}-x^2 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{2}x-x^2-\frac{3a^4}{4}+\frac{a^2}{2}x=\frac{a^4}{2}-x^2 \Leftrightarrow 2a^2x=\frac{5a^4}{4}, \quad x=\frac{5a^2}{8}.$$

$$\sqrt{\frac{25a^4}{64}-y^2}=\frac{5a^2}{8}-\frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{25a^4}{64}-y^2}=\frac{a^2}{8} \Rightarrow \frac{25a^4}{64}-y^2=\frac{a^4}{64} \Leftrightarrow y^2=\frac{3}{8}a^4 \Rightarrow y_1=a^2\sqrt{\frac{3}{8}},$$

$$y_2=-a^2\sqrt{\frac{3}{8}}=-\frac{2\sqrt{6}}{8}a^2.$$

Так как $x+y_2 < x-y_2$, то $\sqrt{x+y_2}-\sqrt{x-y_2} < 0$, следовательно, y_2 — не подходит. Проверкой убеждаемся, что

$x=\frac{5a^2}{8}$, $y=\frac{2\sqrt{6}}{8}a^2$ действительно решения исходной системы.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5a^2}{8}; \frac{2\sqrt{6}}{8}a^2\right).$$

$$2.202. \begin{cases} x+y=a, \\ \sqrt{y-x}+\sqrt{y-x}=x. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 0 \leq x \leq y.$$

По ОДЗ, если $a < 0$, то система решений не имеет. Пусть $t = \sqrt{y-x} \geq 0$, тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{y-t}=x, \\ \sqrt{y-x}=t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y-t}-\sqrt{y-x}=x-t.$$

Домножая обе части полученного уравнения на $\sqrt{y-t}+\sqrt{y-x}$, имеем:

$$(y-t)-(y-x)=(x-t)(\sqrt{y-t}+\sqrt{y-x}) \Leftrightarrow (x-t)(\sqrt{y-t}+\sqrt{y-x}-1)=0.$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \ x=y, \begin{cases} x+y=a, \\ \sqrt{y-x}=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a, \\ x^2+x=y \end{cases} \Rightarrow x^2+2x-a=0. \ x_1=-1+\sqrt{a+1}, \ x_2=-1-\sqrt{a+1} \text{ — не подходит, так как } x \geq 0. \text{ Таким образом, } x=\sqrt{a+1}-1, \ y=a+1-\sqrt{a+1}, \text{ где } a \geq 0;$$

$$2) \ \begin{cases} \sqrt{y-t}+\sqrt{y-x}=1, \\ t=\sqrt{y-x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y-\sqrt{y-x}}=1-\sqrt{y-x} \Rightarrow y-\sqrt{y-x}=1-2\sqrt{y-x}+y-x \Leftrightarrow \sqrt{y-x}=1-x \Rightarrow \\ \Rightarrow y=x^2-x+1.$$

Итак, имеем: $\begin{cases} x+y=a, \\ y=x^2-x+1 \end{cases} \Rightarrow x^2+1=a, x=\sqrt{a-1}, y=a-\sqrt{a-1}, a \geq 1$. Сделаем проверку на посторонние корни. Подставляя полученные значения x и y в первое уравнение исходной системы, получаем тождество. Из второго уравнения находим:

$$y-x^2=\sqrt{y-x}, \ a-\sqrt{a-1}-(a-1)=\sqrt{a-2\sqrt{a-1}} \Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{a-1}=\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}, \Leftrightarrow \\ 1-\sqrt{a-1} \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{a-1}=\sqrt{a-1}-1, \Leftrightarrow \\ 1 \leq a \leq 2 \end{cases}$$

Таким образом, $x=\sqrt{a-1}, y=a-\sqrt{a-1}$ при $1 \leq a \leq 2$.

Ответ: если $a < 0$, то решений нет;

если $a \geq 0$, то $x_1=\sqrt{a+1}-1, y_1=a+1-\sqrt{a+1}$;

если $1 \leq a \leq 2$, то $x_2=\sqrt{a-1}, y_2=a-\sqrt{a-1}$.

$$2.203. \ \begin{cases} \sqrt{x+a}-\sqrt{y+b}=1, \\ \sqrt{y+a}-\sqrt{x+b}=1. \end{cases}$$

Решение.

Возведя обе части обоих уравнений системы в квадрат, получаем

$$\begin{cases} x+a+y+b-1=2\sqrt{(x+a)(y+b)}, \\ y+a+x+b-1=2\sqrt{(y+a)(x+b)} \end{cases} \Rightarrow (x+a)(y+b)=(y+a)(x+b) \Rightarrow (a-b)(y-x)=0.$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \ a=b, \ \begin{cases} \sqrt{x+a}-\sqrt{y+a}=1, \\ \sqrt{y+a}-\sqrt{x+a}=1 \end{cases} \Rightarrow 0=2, \emptyset;$$

$$2) \ x=y, \ \sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+a}=1+\sqrt{x+b} \Rightarrow x+a=1+2\sqrt{x+b}+x+b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+b}=\frac{a-b-1}{2} \geq 0, \ \begin{cases} x+b=\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2 \\ a-b \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{(a-b)^2-2(a+b)+1}{4}, \\ a-b \geq 1. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что это действительно решения системы.

Ответ: если $a-b < 1$, то решений нет;

$$\text{если } a-b \geq 1, \text{ то } x = y = \frac{(a-b)^2 - 2(a+b) + 1}{4}.$$

2.204. При каком значении a система уравнений $\begin{cases} 2x + (a-1)y = 3, \\ (a+1)x + 4y = -3 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений? Не имеет решений?

Решение.

Используя уравнения (*) из задачи 2.172, имеем:

$$\Delta = 8 - (a+1)(a-1) = 8 - (a^2 - 1) = 9 - a^2 = (3-a)(3+a) = 0 \Rightarrow a_1 = -3, a_2 = 3.$$

$\Delta_x = 3 \cdot 4 + 3(a-1) = 3(a+3)$, $\Delta_y = -6 - 3(a+1) = -3(a+3)$, следовательно, при $a = -3$ система имеет бесчисленное множество решений, при $a = 3$ — решений нет.

Ответ: нет решений при $a = 3$;

бесчисленное множество решений при $a = -3$.

2.205. При каких значениях параметра a система уравнений: $\begin{cases} ax^2 + 2ax + y + 3a - 3 = 0, \\ ay^2 + x - 6ay + 11a + 1 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение.

Пусть $u = x + 1$, $v = y - 3$, тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} au^2 + v + 2a = 0, \\ u + av^2 + 2a = 0, \end{cases} \quad (*)$$

для которой выполняется следующее условие:

если (u, v_1) — решение системы, то и (v_1, u_1) — также решение системы, поэтому для того чтобы система имела единственное решение, необходимо $u = v$.

Имеем уравнение $au^2 + u + 2a = 0$, $D = 1 - 8a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$, либо $a = 0$, $u = v = 0$.

Подставляя найденные значения параметра в систему (*), проверяем, что при этих значениях параметра система действительно имеет единственное решение.

Ответ: $a = 0$, $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$.

2.206. В зависимости от значений параметров a и b определить количество решений системы уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = a, \\ x^2 - y^2 = b. \end{cases}$

Решение.

Пусть $x = z + t$, $y = z - t$, тогда $x^2 - y^2 = 4zt$, $x^2 + y^2 = 2(z^2 + t^2)$, $xy = z^2 - t^2$ и исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} 3z^2 + t^2 = a, \\ 4zt = b. \end{cases} \quad (*)$$

Ясно, что при $a < 0$ система (*) решений не имеет. Если $a = b = 0$, то решение одно: $z = t = 0$. При $a = 0$, $b \neq 0$ решений система (*) не имеет. Если $a > 0$, $b = 0$, то из исходной системы $y = \pm x$ и очевидно, что эта система имеет четыре решения. Далее,

пусть $a > 0$, $b \neq 0$, тогда $t \neq 0$ и $z = \frac{b}{4t}$. $3 \frac{b^2}{16t^2} + t^2 = a \Leftrightarrow 16t^4 - 16at^2 + 3b^2 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 3b^2}}{4}$.

При $4a^2 - 3b^2 = 0$ система (*), а значит и исходная имеют два решения. Если $4a^2 - 3b^2 > 0$, то таких решений будет четыре. При $4a^2 - 3b^2 < 0$ решений нет.

Ответ: если $a < 0$, то решений нет;

если $a = b = 0$, то одно решение;

если $a = 0, b \neq 0$, то решений нет;

если $4a^2 - 3b^2 = 0, a > 0$, то два решения;

если $4a^2 - 3b^2 > 0, a > 0$, то четыре решения;

если $4a^2 - 3b^2 < 0, a > 0$, то решений нет.

ТЕМЫ: ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Упростить (2.207 – 2.220).

2.207. $-\log_5 \log_5 \sqrt[5]{5}$.

Решение.

$$-\log_5 \log_5 \sqrt[5]{5} = -\log_5 \log_5 (5)^{\frac{1}{25}} = -\log_5 \left(\frac{1}{25} \log_5 5 \right) = -\log_5 5^{-2} = 2.$$

Ответ: 2.

2.208. $\sqrt{\frac{1}{2}(49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4})}$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{1}{2}(49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4})} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{7^2}{7^{2\log_7 2}} + 5^{\log_5 \frac{1}{4}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{49}{7^{\log_7 4}} + \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{49}{4} + \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

2.209. $\sqrt{\frac{\log_3 \sqrt[5]{27}}{\log_{25} \sqrt{3}}}$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{\log_3 \sqrt[5]{27}}{\log_{25} \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\log_3 3^{\frac{3}{5}}}{\log_5 (5)^{\frac{1}{3}} \cdot \log_5 5^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\frac{6 \log_5 3}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \log_5 3}} = \sqrt{36} = 6.$$

Ответ: 6.

2.210. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

Решение.

Переходя к основанию 4, получим $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = \log_4 5 \cdot \frac{\log_4 6}{\log_4 5} \cdot \frac{\log_4 7}{\log_4 6} \cdot \frac{\log_4 8}{\log_4 7} = \log_4 8 = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

$$2.211. \frac{(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49})(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9})}{81^{\frac{1}{\log_3 9}} + 3^{\frac{1}{\log_3 3}}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49})(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9})}{81^{\frac{1}{\log_3 9}} + 3^{\frac{1}{\log_3 3}}} &= \frac{(3^{3 \log_3 2} + 5^{\frac{\log_3 7^2}{\log_3 5^2}})(9^{2 \log_3 4} - 4^{2 \log_3 9})}{9^{2 \log_3 5} + 3^{\log_3 5}} = \\ &= \frac{(3^{\log_3 2^3} + 5^{\log_3 7})(9^{\log_3 16} - 4^{\log_3 9^2})}{9^{\log_3 25} + 5} = \frac{(8+7)(16-27)}{25+5} = \frac{15 \cdot (-11)}{15 \cdot 2} = -\frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $-5,5$.

$$2.212. a^{\frac{\lg \lg a}{\lg a}}.$$

Решение.

$$\frac{\lg \lg a}{a^{\lg a}} = a^{\log_a (\lg a)} = \lg a.$$

Ответ: $\lg a$.

$$2.213. \frac{\log_a^{-1} b (1 - \log_a^2 b)}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \frac{a}{b}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\log_a^{-1} b (1 - \log_a^2 b)}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \frac{a}{b}} &= \frac{\log_a^{-1} b (1 - \log_a b)(1 + \log_a b + \log_a^2 b)}{(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 1)(\log_a a - \log_a b)} = \\ &= \frac{\log_a^{-1} b (1 - \log_a b)(1 + \log_a b + \log_a^2 b) \log_a b}{(\log_a^2 b + 1 + \log_a b)(1 - \log_a b)} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$2.214. \frac{(25^{\frac{1}{2 \log_4 25}} + 2 \log_2 \log_2 \log_2 a^{2 \log_4 4}) \cdot 4^{\frac{2}{\log_3 4}} - a^2}{1 - a^3}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \frac{(25^{\frac{1}{2\log_2 25}} + 2\log_2 \log_2 \log_2 a^{2\log_2 4}) \cdot 4^{\frac{1}{\log_2 4}} - a^2}{1 - a^3} = \frac{((25^{\log_2 49})^{\frac{1}{2}} + 2\log_2 \log_2 \log_2 a^{2\log_2 4})(4^{2\log_2 3})^{-1} - a^2}{1 - a^3} = \\
 & = \frac{(7 + 2\log_2 \log_2 \log_2 a^{\log_2 16})(4^{\log_2 9})^{-1} - a^2}{1 - a^3} = \frac{(7 + 2\log_2 \log_2 \log_2 2^4) \cdot 9^{-1} - a^2}{1 - a^3} = \frac{(7 + 2\log_2 \log_2 4) \cdot \frac{1}{9} - a^2}{1 - a^3} = \\
 & = \frac{(7 + 2\log_2 2) \cdot \frac{1}{9} - a^2}{1 - a^3} = \frac{\frac{1 - a^2}{9}}{1 - a^3} = \frac{(1 - a)(1 + a)}{(1 - a)(1 + a + a^2)} = \frac{a + 1}{a^2 + a + 1} \text{ при } a \neq 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a+1}{a^2+a+1}$ при $a \neq 1$.

2.215. $(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a} \cdot \frac{\log_{100} b}{\lg b}})^{2\log_{ab}(a+b)}$.

Решение.

$$(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a} \cdot \frac{\log_{100} b}{\lg b}})^{2\log_{ab}(a+b)} = (b^{\frac{\lg a}{2\lg a} \cdot \frac{\lg b}{2\lg b}})^{2\log_{ab}(a+b)} = ((ab)^{\frac{1}{2}})^{2\log_{ab}(a+b)} = a + b.$$

Ответ: $a + b$.

2.216. $\sqrt{(\log_b^2 a + \log_a^2 b + 2)} - (\log_b a + \log_a b)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(\log_b^2 a + \log_a^2 b + 2)} - (\log_b a + \log_a b) = \sqrt{(\log_b^2 a + \frac{1}{\log_b^2 a} + 2)} - (\log_b a + \frac{1}{\log_b a}) = \\
 & = \sqrt{\frac{\log_b^4 a + 2\log_b^2 a + 1}{\log_b^2 a}} - \frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} = \frac{\sqrt{(\log_b^2 a + 1)^2}}{|\log_b a|} - \frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} = (\log_b^2 a + 1) \left(\frac{1}{|\log_b a|} - \frac{1}{\log_b a} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем два случая:

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} 0 < b < 1, \\ a > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} b > 1, \\ 0 < a < 1; \end{cases} \quad (\log_b^2 a + 1) \left(\frac{1}{|\log_b a|} - \frac{1}{\log_b a} \right) = -\frac{2(\log_b^2 a + 1)}{\log_b a} = -2(\log_b a + \log_a b); \\
 2) & \begin{cases} 0 < b < 1, \\ 0 < a < 1; \end{cases} \cup \begin{cases} b > 1, \\ a > 1; \end{cases} \quad (\log_b^2 a + 1) \left(\frac{1}{|\log_b a|} - \frac{1}{\log_b a} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: $-2(\log_b a + \log_a b)$, если $\begin{cases} a > 1, \\ 0 < b < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < a < 1, \\ b > 1; \end{cases}$

0, если $\begin{cases} 0 < b < 1, \\ 0 < a < 1; \end{cases} \cup \begin{cases} a > 1, \\ b > 1. \end{cases}$

$$2.217. \frac{\left(\log_a b - \log \frac{\sqrt{a}}{b^3} \right) \log_b a}{\left(\log \frac{a}{b^4} - \log \frac{a}{b^6} \right) \log_b (a^3 b^{-12})}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\left(\log_a b - \log \frac{\sqrt{a}}{b^3} \right) \log_b a}{\left(\log \frac{a}{b^4} - \log \frac{a}{b^6} \right) \log_b (a^3 b^{-12})} &= \frac{\log_a b - \frac{\log_a \sqrt{a}}{\log_a b^3}}{\frac{\log_a b}{\log_a \frac{a}{b^4}} - \frac{\log_a b}{\log_a \frac{a}{b^6}}} \cdot \frac{\log_a b \cdot \log_b a}{\log_a (a^3 b^{-12})} = \frac{\log_a b - \frac{\frac{1}{2} \log_a a}{\frac{1}{2} - 3 \log_a b}}{\frac{\log_a b}{1 - 4 \log_a b} - \frac{\log_a b}{1 - 6 \log_a b}} \cdot \frac{1}{3 - 12 \log_a b} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{1 - 6 \log_a b}}{\left(\frac{1}{1 - 4 \log_a b} - \frac{1}{1 - 6 \log_a b} \right) 3(1 - 4 \log_a b)} = \frac{(1 - 6 \log_a b - 1)}{(1 - 6 \log_a b) \left(1 - \frac{1 - 4 \log_a b}{1 - 6 \log_a b} \right) \cdot 3} = \frac{-2 \log_a b}{1 - 6 \log_a b - 1 + 4 \log_a b} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$2.218. \left(\frac{8}{3} (\log_b a \cdot \log_a^2 b + 1) + \log_a b^4 + \log_a^2 b \right)^{1/2} + \log_a b \text{ при } a > 1.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{3} (\log_b a \cdot \log_a^2 b + 1) + \log_a b^4 + \log_a^2 b \right)^{1/2} + \log_a b &= \left(\frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + 4 \log_a b + \log_a^2 b \right)^{1/2} + \log_a b = \\ &= \sqrt{4 + 4 \log_a b + \log_a^2 b} + \log_a b = \sqrt{(2 + \log_a b)^2} + \log_a b = |2 + \log_a b| + \log_a b. \end{aligned}$$

Раскрывая модуль, получаем два случая:

$$1) \quad |2 + \log_a b| + \log_a b = \begin{cases} 2 + \log_a b < 0, \\ -2 - \log_a b + \log_a b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < b < \frac{1}{a^2}, \\ |2 + \log_a b| + \log_a b = -2; \end{cases}$$

$$2) \quad |2 + \log_a b| + \log_a b = \begin{cases} 2 + \log_a b \geq 0, \\ 2 + 2 \log_a b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq \frac{1}{a^2}, \\ |2 + \log_a b| + \log_a b = 2(1 + \log_a b). \end{cases}$$

Ответ: -2 , если $0 < b < \frac{1}{a^2}$; $2(1 + \log_a b)$, если $b \geq \frac{1}{a^2}$.

$$2.219. \frac{\left(\lg a \cdot 2^{\lg_2 \lg a} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lg a^2}}{\sqrt{\frac{\lg^2 a + 1}{2 \lg a} + 1 - 10^{0.5 \lg \lg a^{\frac{1}{2}}}}}.$$

Решение.

ОДЗ: $\lg a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

$$\begin{aligned} \frac{(\lg a \cdot 2^{\log_2 \lg a})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lg a^2}}{\sqrt{\frac{\lg^2 a + 1}{2 \lg a} + 1 - 10^{0.5 \lg a^{\frac{1}{2}}}}} &= \frac{(\lg a \cdot \lg a)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2 \lg^2 a}}{\sqrt{\frac{\lg^2 a + 2 \lg a + 1}{2 \lg a} - 10^{\lg(\lg a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}}} = \frac{\sqrt{2 \lg^2 a}}{\sqrt{\frac{(\lg a + 1)^2}{2 \lg a} - (\lg a^{\frac{1}{2}})^2}} = \frac{\sqrt{2 \lg^2 a}}{\sqrt{2 \lg^2 a} - \left(\frac{1}{2} \lg a\right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{\sqrt{2 \lg^2 a}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\lg a + 1 - \lg a}} = \frac{2 \lg^2 a}{\lg a + 1 - \lg a} = 2 \lg^2 a. \\ \frac{\lg a + 1}{\sqrt{2 \lg^2 a}} - \frac{\lg^2 a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ответ: $2 \lg^2 a$, где $a > 1$.

$$2.220. \log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}) \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \log_{2\sqrt{6}+7}(2\sqrt{6}+5).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}) \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \log_{2\sqrt{6}+7}(2\sqrt{6}+5) &= \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}) \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1} + \\ + \log_{(\sqrt{6}+1)^2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 &= -\frac{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})}{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(\sqrt{6}+1)} + \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = -\log_{\sqrt{6}+1}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}) + \\ + \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1} &= -(\log_{\sqrt{6}+1}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}) + \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2})) = -\log_{\sqrt{6}+1}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \\ = -\log_{\sqrt{6}+1}(4\sqrt{6}+9-8-3\sqrt{6}) &= -\log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{6}+1) = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1 .

$$2.221. \text{Найти } \log_8 9, \text{ если известно, что } \log_{12} 18 = a.$$

Решение.

$$\log_8 9 = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^3} = \frac{2}{3} \log_2 3; \log_{12} 18 = \frac{\log_2(2 \cdot 3^2)}{\log_2(3 \cdot 2^2)} = \frac{\log_2 2 + 2 \log_2 3}{\log_2 3 + 2 \log_2 2} = \frac{1 + 2 \log_2 3}{\log_2 3 + 2} = a.$$

$$\text{Пусть } x = \log_2 3, \text{ тогда имеем уравнение } \frac{1+2x}{x+2} = a \Leftrightarrow 1+2x = ax+2a \Leftrightarrow (a-2)x = 1-2a \Leftrightarrow x = \frac{1-2a}{a-2}.$$

$$\log_8 9 = \frac{2}{3} x = \frac{2}{3} \left(\frac{1-2a}{a-2} \right).$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3} \left(\frac{1-2a}{a-2} \right).$$

$$2.222. \text{Вычислить } \log_{\sqrt{3}} 8, \text{ если известно, что } \log_{12} 3 = a.$$

Решение.

$$\log_{\sqrt{3}} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 \sqrt{3}} = 2 \log_3 8 = 2 \log_3 2^3 = 3 \log_3 4 = 3 \log_3 \frac{12}{3} = 3(\log_3 12 - \log_3 3) = 3 \left(\frac{1}{\log_{12} 3} - 1 \right) = 3 \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = \frac{3-3a}{a}.$$

Ответ: $\frac{3-3a}{a}$.

2.223. Вычислить $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

Решение.

$$\log_{30} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 30} = \frac{\lg 2^3}{\lg(3 \cdot 10)} = \frac{3 \lg 2}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{3 \lg \frac{10}{5}}{b+1} = \frac{3(\lg 10 - \lg 5)}{b+1} = \frac{3(1-a)}{b+1}.$$

Ответ: $\frac{3(1-a)}{b+1}$.

2.224. Доказать, что $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$.

Решение.

$$\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = \frac{\log_a c}{\frac{\log_a c}{\log_a(ab)}} = \log_a(ab) = \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a b.$$

QED.

2.225. Доказать, что $\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$.

Решение.

$$\log_{ab} c = \frac{\log_a c}{\log_a ab} = \frac{\log_a c}{1 + \log_a b} = \frac{\log_a c \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b}}{(1 + \log_a b) \frac{\log_a c}{\log_a b}} = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\frac{\log_a c}{\log_a b} + \log_a c} = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_b c + \log_a c}.$$

QED.

2.226. Доказать, что $\log_b a = \log_{b^n} a^n$.

Решение.

Пусть $c = \log_b a$, тогда $b^{\log_b a} = a \Rightarrow (b^c)^n = a^n \Leftrightarrow (b^n)^c = a^n \Leftrightarrow c = \log_{b^n} a^n$. Получили $\log_b a = \log_{b^n} a^n$. QED.

2.227. Пусть $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$, $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$. Доказать, что $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

Решение.

Прологарифмировав данные равенства, получим

$$\lg y = \frac{1}{1-\lg x}, \lg z = \frac{1}{1-\lg y} \Rightarrow 1-\lg x = \frac{1}{\lg y}, 1-\lg y = \frac{1}{\lg z} \Rightarrow \lg x = 1 - \frac{1}{\lg y}, \lg y = 1 - \frac{1}{\lg z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg x = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\lg z}} = 1 - \frac{\lg z}{\lg z - 1} = \frac{\lg z - 1 - \lg z}{\lg z - 1} = \frac{-1}{\lg z - 1} = \frac{1}{1 - \lg z} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}.$$

QED.

2.228. Доказать, что $\log_a x \log_b x + \log_b x \log_c x + \log_c x \log_a x = \frac{\log_a x \log_b x \log_c x}{\log_{abc} x}$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_{abc} x} &= \frac{\log_a x \log_b x}{\log_a x \log_b x \log_c x} + \frac{\log_b x \log_c x}{\log_a x \log_b x \log_c x} + \frac{\log_c x \log_a x}{\log_a x \log_b x \log_c x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} = \\ &= \log_x a + \log_x b + \log_x c \Leftrightarrow \log_x (abc) = \log_x a + \log_x b + \log_x c. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется при $0 < a, b, c \neq 1$.

QED.

2.229. Доказать, что $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \log_{c-b} a$, если $a^2 + b^2 = c^2$ и $a > 0, b > 0, c > 0$.

Решение.

Логарифмируя обе части тождества $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$, имеем:

$$\begin{aligned} \log_a a^2 = \log_a (c-b)(c+b) &\Leftrightarrow 2 = \log_a (c-b) + \log_a (c+b) = \frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = \log_{c+b} a + \log_{c-b} a. \end{aligned}$$

QED.

2.230. Доказать, что $\log_{a_1 a_2 \dots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

$$\log_{a_1 a_2 \dots a_n} x = \frac{1}{\log_x (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)} = \frac{1}{\log_x a_1 + \log_x a_2 + \dots + \log_x a_n} = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

QED.

2.231. Доказать, что если a, b, c — три последовательных члена геометрической прогрессии, неравные между собой, то

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

$$\text{Так как } b = \sqrt{ac}, \text{ то } \log_b x = \frac{1}{\log_x b} = \frac{1}{\log_x \sqrt{ac}} = \frac{2}{\log_x a + \log_x c} = \frac{2}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x}} = \frac{2 \log_a x \log_c x}{\log_a x + \log_c x}.$$

Подставляя полученное значение $\log_b x$ в левую часть доказываемого равенства, получим

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x - \frac{2 \log_a x \log_c x}{\log_a x + \log_c x}}{\frac{2 \log_a x \log_c x}{\log_a x + \log_c x} - \log_c x} = \frac{\log_a x (\log_a x + \log_c x - 2 \log_c x)}{\log_c x (2 \log_a x - \log_a x - \log_c x)} = \frac{\log_a x (\log_a x - \log_c x)}{\log_c x (\log_a x - \log_c x)} = \frac{\log_a x}{\log_c x}. \quad \text{QED.}$$

Решить уравнения (2.232 – 2.270).

2.232. $2^{x^2+x-2} = 1$.

Решение.

$$2^{x^2+x-2} = 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+x-2} = 2^0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0, x_1 = -2, x_2 = 1.$$

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = 1$.

2.233. $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-|x|-2} = 1$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-|x|-2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-|x|-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^0 \Leftrightarrow x^2 - |x| - 2 = 0 \Rightarrow |x| = 2, |x| = -1 \text{ — не подходит.}$$

$$|x| = 2 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = 2$.

2.234. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}$.

Решение.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3(x-1)} = \frac{\lg 2^2}{\lg 2^3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3x+3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3-x=1, x=2.$$

Ответ: $x = 2$.

2.235. $\sqrt[3]{3^{5\sqrt{x}}} = 3^{\sqrt{x}-4}$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

$$\sqrt[3]{3^{5\sqrt{x}}} = 3^{\sqrt{x}-4} \Leftrightarrow 3^{\frac{5\sqrt{x}}{3}} = 3^{\sqrt{x}-4} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}-4.$$

Пусть $t = \sqrt{x} > 0$, тогда имеем $\frac{5}{t} = t - 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0, t_1 = 5, t_2 = -1$ — не подходит.

$$\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25.$$

Ответ: $x = 25$.

2.236. $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq 0$.

Пусть $t = 3^{\sqrt{x}} > 0$, тогда уравнение принимает вид: $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Имеем два случая:

1) $t_1 = 1$, $3^{\sqrt{x}} = 3^0$, $x_1 = 0$;

2) $t_2 = 3$, $3^{\sqrt{x}} = 3$, $x_2 = 1$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2.237. $\lg(x-1)^2 = 0$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 1$.

$$\lg(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lg(x-1)^2 = \lg 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow |x-1| = 1, x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

2.238. $\log_2(9-2^x) = 3-x$.

Решение.

ОДЗ: $2^x < 9$.

$$\log_2(9-2^x) = 3-x \Leftrightarrow \log_2(9-2^x) = \log_2 2^{3-x} \Leftrightarrow 9-2^x = 2^{3-x} \Leftrightarrow 9-2^x = \frac{8}{2^x}.$$

Пусть $t = 2^x > 0$, тогда получаем уравнение $9-t = \frac{8}{t} \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 8$.

Имеем два случая:

1) $t_1 = 1$, $2^x = 1$, $x_1 = 0$;

2) $t_2 = 8$, $2^x = 2^3$, $x_2 = 3$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

2.239. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$.

Решение.

ОДЗ: $3^x - 5^{2-x} > 0$.

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} \log_5 8 + \log_5 5^{2-x} &= \log_5(3^x - 5^{2-x}) \Leftrightarrow \log_5(8 \cdot 5^{2-x}) = \log_5(3^x - 5^{2-x}) \Leftrightarrow 8 \cdot 5^{2-x} = 3^x - 5^{2-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9 \cdot 5^{2-x} = 3^x \Leftrightarrow \frac{3^2 \cdot 5^2}{5^x} = 3^x \Leftrightarrow 15^x = 15^2 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $x = 2$.

2.240. $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 1 = 0$:

Решение.

ОДЗ: $\log_2 x \geq 0, x \geq 1$.

$$3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 x - \log_2 8 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 x - 3\sqrt{\log_2 x} + 2 = 0.$$

Если $y = \sqrt{\log_2 x} \geq 0$, то получаем уравнение: $y^2 - 3y + 2 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2$.

Имеем два случая:

1). $y_1 = 1, \sqrt{\log_2 x} = 1, \log_2 x = 1, x_1 = 2$;

2) $y_2 = 2, \sqrt{\log_2 x} = 2, \log_2 x = 4, x_2 = 16$.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 16$.

2.241. $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg \frac{1}{x}$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

$$\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg \frac{1}{x} \Leftrightarrow (\lg 10^2 + \lg x)^2 + (\lg 10 + \lg x)^2 = 14 - \lg x \Leftrightarrow (\lg x + 2)^2 + (\lg x + 1)^2 = 14 - \lg x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lg^2 x + 4\lg x + 4 + \lg^2 x + 2\lg x + 1 = 14 - \lg x \Leftrightarrow 2\lg^2 x + 7\lg x - 9 = 0, (\lg x)_1 = -\frac{9}{2}, (\lg x)_2 = 1.$$

Рассмотрим два случая:

1) $\lg x = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \lg x = \lg 10^{-\frac{9}{2}} \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{10^{-9}}$;

2) $\lg x = 1 \Leftrightarrow x_2 = 10$.

Ответ: $x_1 = \sqrt{10^{-9}}, x_2 = 10$.

2.242. $x^{2\log_3 x} = 3x$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 3, имеем:

$$\log_3 x^{2\log_3 x} = \log_3 3x \Leftrightarrow 2\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 3 + \log_3 x \Leftrightarrow 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0.$$

Если $t = \log_3 x$, то получаем уравнение $2t^2 - t - 1 = 0, t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = 1$.

Рассмотрим два случая:

1) $t_1 = -\frac{1}{2}, \log_3 x = \log_3 3^{-\frac{1}{2}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$$2) \iota_2 = 1, \log_3 x = 1, x_2 = 3.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = 3.$$

$$2.243. x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{100}} = 0.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Записывая уравнение в виде $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$ и логарифмируя обе части по основанию 10, получаем

$$\lg x^{1-\frac{2}{3}\lg x} = \lg \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{3}\lg x\right) \lg x = \lg 10^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \lg x - \frac{2}{3}\lg^2 x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\lg^2 x - 3\lg x - 2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, находим:

$$1) (\lg x)_1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$2) (\lg x)_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 10^2 = 100.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, x_2 = 100.$$

$$2.244. |x-2|^{2x^2-5x+2} = 1.$$

Решение.

Очевидно, что $x \neq 2$, следовательно $|x-2| > 0$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, имеем

$$\lg |x-2|^{2x^2-5x+2} = \lg 1 \Leftrightarrow (2x^2-5x+2) \lg |x-2| = 0 \Rightarrow$$

$$1) 2x_2 - 5x + 2 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2 \text{ — не подходит;}$$

$$2) \lg |x-2| = 0, x_3 = 1, x_4 = 3.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = 3.$$

$$2.245. \sqrt[3]{|x-5|^{x+3}} = \sqrt[4]{|x-5|^{x+4}}.$$

Решение.

При $x = 5$ имеем $0 = 0$, т.е. $x_1 = 5$. Пусть $x \neq 5$, тогда $|x-5| > 0$. Перепишем уравнение в виде $|x-5|^{\frac{x+3}{3}} = |x-5|^{\frac{x+4}{4}}$.

Получаем два случая:

$$1) |x-5| = 1 \Rightarrow x_2 = 4, x_3 = 6;$$

$$2) |x-5| \neq 1 \Rightarrow \frac{x+3}{3} = \frac{x+4}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{x}{4}, x_4 = 0.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 0.$$

$$2.246. x^{3\log_2 x - \log_2^2 x} = x^{-4}.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 2, имеем:

$$\begin{aligned} \log_2 x^{3\log_2 x - \log_2^2 x} &= \log_2 x^{-4} \Leftrightarrow (3\log_2 x - \log_2^2 x) \log_2 x = -4\log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x (\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow \text{или } \log_2 x = -1, \log_2 x = 4. \end{aligned}$$

Получаем три случая:

$$1) \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1;$$

$$2) \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2};$$

$$3) \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x_3 = 2^4 = 16.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 16.$$

$$2.247. \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 2.5.$$

Решение.

Так как $(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})=1$, то, сделав подстановку $y = (\sqrt[3]{3-\sqrt{8}})^x$, имеем:

$$y + \frac{1}{y} = 2.5 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 2.$$

Получаем два случая:

$$1) (3-\sqrt{8})^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \log_{3-\sqrt{8}} \frac{1}{2}, x_1 = 3\log_{3-\sqrt{8}} \frac{1}{2};$$

$$2) (3-\sqrt{8})^{\frac{x}{3}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \log_{3-\sqrt{8}} 2, x_2 = 3\log_{3-\sqrt{8}} 2.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 3\log_{3-\sqrt{8}} \frac{1}{2}, x_2 = 3\log_{3-\sqrt{8}} 2.$$

$$2.248. 3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $81 \cdot 3^{2x} + 45 \cdot 3^x \cdot 2^x - 36 \cdot 2^{2x} = 0$ и разделив обе части полученного уравнения на $9 \cdot 2^{2x} \neq 0$,

$$\text{имеем } 9\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 5\left(\frac{3}{2}\right)^x - 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = -1 \text{ (нет решений) или } \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}, \text{ откуда } x = -2.$$

Ответ: $x = -2$.

2.249. $2 \cdot 4^{\lg x} + 5 \cdot 25^{\lg x} = 7x.$

*Решение.*ОДЗ: $x > 0.$

Из условия имеем: $2(2^{\lg x})^2 + 5(5^{\lg x})^2 - 7 \cdot 10^{\lg x} = 0 \Leftrightarrow 2(2^{\lg x})^2 - 7 \cdot 2^{\lg x} \cdot 5^{\lg x} + 5(5^{\lg x})^2 = 0.$

Разделив обе части полученного уравнения на $(5^{\lg x})^2 > 0$, найдем $2\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg x}\right)^2 - 7\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg x} + 5 = 0.$

Пусть $t = \left(\frac{2}{5}\right)^{\lg x} > 0$, тогда запишем $2t^2 - 7t + 5 = 0$, $t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}$, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{5}{2}.$

Имеем два случая:

1) $t_1 = 1, \left(\frac{2}{5}\right)^{\lg x} = 1 \Leftrightarrow \lg x = 0, x_1 = 1;$

2) $t_2 = \frac{5}{2}, \left(\frac{2}{5}\right)^{\lg x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow \lg x = -1, x_2 = \frac{1}{10}.$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{10}.$

2.250. $3\lg x^2 - (\lg(-x))^2 = 9.$

*Решение.*ОДЗ: $x < 0.$ Учитывая, что $x < 0$, имеем:

$$6\lg |x| - (\lg(-x))^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lg^2(-x) - 6\lg(-x) + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lg(-x) - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lg(-x) = 3, x = -10^3 = -1000.$$

Ответ: $x = -1000.$

2.251. $125^x + 20^x = 2 \cdot 8^x.$

Решение.

Разделив обе части исходного уравнения на $8^x > 0$, получаем $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{5}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{5}{2}\right)^x\right)^3 + \left(\frac{5}{2}\right)^x - 2 = 0.$

Если $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x > 0$, то имеем:

$$y^3 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 1 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + y + 2) = 0 \Rightarrow y = 1; y^2 + y + 2 > 0, \text{ так как } D < 0.$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0.$

2.252. $3^x + 4^x = 7^x$.

Решение.

Разделив обе части исходного уравнения на $7^x > 0$, получаем $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ y=\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x. \end{cases}$

Функция $y = 1$ — постоянная, а функция $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x$ — убывающая как сумма двух убывающих $y_1 = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ и $y_2 = \left(\frac{4}{7}\right)^x$, следовательно, их графики могут пересекаться не более чем в одной точке и исходное уравнение имеет не более одного решения. Очевидно, что $x = 1$ — решение уравнения.

Ответ: $x = 1$.

2.253. $x^x = 27, x > 0$.

Решение.

Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 3, получаем $\log_3 x^x = \log_3 3^3 \Leftrightarrow x \log_3 x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \log_3 x, \\ y = 3. \end{cases}$

Если $x \in (0; 1]$, то $x \log_3 x \leq 0$ и система решений не имеет.

Пусть $x \in (1; +\infty)$, тогда $y' = (x \log_3 x)' = \log_3 x + x \frac{1}{x \ln 3} = \log_3 x + \frac{1}{\ln 3} > 0$, следовательно, функция $y = x \log_3 x$ — возрастающая и система не может иметь более одного решения. Очевидно, что $x = 3$ является решением.

Ответ: $x = 3$.

2.254. $x \log_2(x+1) = \log_{\frac{1}{3}} x + 7$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} y = x \log_2(x+1), \\ y = \log_{\frac{1}{3}} x + 7. \end{cases}$

1) $y' = (x \log_2(x+1))' = \log_2(x+1) + \frac{x}{(x+1) \ln 2} > 0$, при $x > 0$, следовательно, функция $y = x \log_2(x+1)$ — возрастающая при $x \in (0; +\infty)$;

2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 7$ — функция убывающая при $x \in (0; +\infty)$.

Таким образом, графики указанных функций не могут пересекаться более чем в одной точке и уравнение имеет не более одного решения. Очевидно, что $x = 3$ — решение нашего уравнения.

Ответ: $x = 3$.

2.255. $2 \lg_x 3 + \lg_{3x} 3 + 3 \lg_{9x} 3 = 0$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0, x \neq \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1$.

$$2\lg_x 3 + \lg_{3x} 3 + 3\lg_{9x} 3 \Leftrightarrow \frac{2}{\lg_3 x} + \frac{\log_3 3}{\log_3 3x} + 3 \frac{\log_3 3}{\log_3 9x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\lg_3 x} + \frac{1}{\lg_3 3 + \lg_3 x} + \frac{3}{\lg_3 3^2 + \lg_3 x} = 0.$$

Пусть $y = \lg_3 x$, тогда получаем уравнение

$$\frac{2}{y} + \frac{1}{1+y} + \frac{3}{2+y} = 0 \Leftrightarrow 2(1+y)(2+y) + y(2+y) + 3(1+y)y = 0 \Leftrightarrow 6y^2 + 11y + 4 = 0,$$

$$y = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{12} = \frac{-11 \pm 5}{12}; y_1 = -\frac{4}{3}, y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Имеем два случая:

$$1) \lg_3 x = -\frac{4}{3}, x_1 = 3^{-\frac{4}{3}};$$

$$2) \lg_3 x = -\frac{1}{2}, x_2 = 3^{-\frac{1}{2}}.$$

Ответ: $x_1 = 3^{-\frac{4}{3}}, x_2 = 3^{-\frac{1}{2}}.$

2.256. $\sqrt{\log_x \sqrt{7x}} = -\log_x 7.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \log_x \sqrt{7x} \geq 0, \\ -\log_x 7 \geq 0, \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{7}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$$\log_x \sqrt{7x} = \log_x^2 7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\log_x 7 + \log_x x) = \log_x^2 7 \Leftrightarrow 2\log_x^2 7 - \log_x 7 - 1 = 0, (\log_x 7)_1 = -\frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{49}; (\log_x 7)^2 = 1, x_2 = 7 \text{ — не подходит по ОДЗ.}$$

Проверкой убеждаемся, что $x = \frac{1}{49}$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{49}.$

2.257. $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6} \log_x \sqrt{5}.$

Решение.

ОДЗ: $0 < x < 1.$

Возведем в квадрат обе части исходного уравнения:

$$\frac{3}{2}\log_x 5 + 3 = \frac{3}{2}\log_x^2 5 \Leftrightarrow \log_x^2 5 - \log_x 5 - 2 = 0, (\log_x 5)_1 = -1, x_1 = \frac{1}{5}; (\log_x 5)_2 = 2, x_2 = \sqrt{5} \text{ — не подходит по ОДЗ.}$$

Проверкой убеждаемся, что $x = \frac{1}{5}$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{5}.$

2.258. $\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right) \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1 \quad (x > 1)$

Решение.

Переходя в уравнении к логарифмам по основанию 2, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\log_2\left(\frac{2}{x}\right)}{\log_2(2x)} \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1 &\Leftrightarrow \frac{1 - \log_2 x}{1 + \log_2 x} \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1 \Leftrightarrow (1 - \log_2 x) \log_2^2 x = \\ &= (1 + \log_2 x)(1 - \log_2^4 x) \Leftrightarrow (1 - \log_2 x)((1 + \log_2 x)^2(1 + \log_2^2 x) - \log_2^2 x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \log_2 x)(\log_2^4 x + 2\log_2^3 x + \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Так как при $x > 1$ $\log_2 x > 0$, то второй множитель в левой части уравнения заведомо больше нуля, следовательно, $\log_2 x = 1$, $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

2.259. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$.

Решение.

ОДЗ: $x > 2$.

Прологарифмировав обе части уравнения по основанию x , получим:

$$\log_x x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = \log_x 9 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{x}}(x-2) = \log_x 9 \Leftrightarrow \frac{\log_x(x-2)}{\log_x \sqrt{x}} = \log_x 3^2 \Leftrightarrow \log_x(x-2) = \log_x 3 \Leftrightarrow x-2 = 3, x = 5.$$

Ответ: $x = 5$.

2.260. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 1250$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} (5^{\log_5 x})^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} = 1250 &\Leftrightarrow x^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} = 1250 \Leftrightarrow x^{\log_5 x} = 625 \Leftrightarrow \log_5(x^{\log_5 x}) = \log_5 5^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_5^2 x = 4 \Leftrightarrow \log_5 x = 2. \end{aligned}$$

Тогда получаем два случая:

1) $\log_5 x = -2$, $x_1 = \frac{1}{25}$;

2) $\log_5 x = 2$, $x_2 = 25$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{25}$, $x_2 = 25$.

$$2.261. |\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-2x) - 1|.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}.$$

Корнями уравнений $\log_2(3x-1) - \log_2 3 = 0$ и $\log_2(5-2x) - 1 = 0$ являются числа $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{2}$. Учитывая ОДЗ, рассмотрим следующие три случая:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{3} < x < \frac{4}{3}, \\ -\log_2(3x-1) + \log_2 3 = \log_2(5-2x) - 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1;$$

$$2) \begin{cases} \frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}, \\ \log_2(3x-1) - \log_2 3 = \log_2(5-2x) - 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{17}{12};$$

$$3) \begin{cases} \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}, \\ \log_2(3x-1) - \log_2 3 = -\log_2(5-2x) + 1 \end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{11}{6}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 1, x_2 = \frac{17}{12}, x_3 = \frac{11}{6}.$$

$$2.262. \log_n x + \log \sqrt[n]{x} + \log_3 \sqrt[n]{x} + \dots + \log_{\sqrt[n]{n}} x = \frac{n+1}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} n \neq 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Перейдем в логарифмах к основанию n . Получаем:

$$\log_n x + \frac{\log_n x}{\frac{1}{\log_n n^2}} + \frac{\log_n x}{\frac{1}{\log_n n^3}} + \dots + \frac{\log_n x}{\frac{1}{\log_n n^n}} = \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow \log_n x(1+2+3+\dots+n) = \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_n x) \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot n = \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow \log_n x = \frac{1}{n}, x = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}.$$

$$\text{Ответ: } x = \sqrt[n]{n}, n = 2; 3; 4; \dots$$

$$2.263. \lg x + \lg(1-x) = \lg \lg a.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x < 1, \\ a > 1. \end{cases}$$

Из условия получаем $\lg x(1-x) = \lg \lg a \Leftrightarrow x-x^2 = \lg a \Leftrightarrow x^2 - x + \lg a = 0$. Отсюда $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lg a}}{2}$ при

$$1-4\lg a \geq 0 \Leftrightarrow 4\lg a \leq 1, a \leq 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}.$$

Учитывая ОДЗ, имеем $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lg a}}{2}$, где $1 < a \leq \sqrt[4]{10}$.

Ответ: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4\lg a}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4\lg a}}{2}$, где $a \in (1; \sqrt[4]{10}]$;
если $a \notin (1; \sqrt[4]{10}]$, то решений нет.

2.264. $\frac{\log_2(ax)}{\log_2(x+2)} = 2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} ax > 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1. \end{cases}$

Из условия получаем $\log_2(ax) = 2\log_2(x+2) \Leftrightarrow \log_2(ax) = \log_2(x+2)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = ax \Leftrightarrow x^2 + (4-a)x + 4 = 0$,

$$D = (4-a)^2 - 4^2 = -a(8-a) = a^2 - 8a \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 0) \cup [8; +\infty).$$

Рассмотрим два случая:

1) $a \in (-\infty; 0) \Rightarrow x \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$, $x_1 = \frac{a-4-\sqrt{a^2-8a}}{2} < -2$ — не подходит, $x_2 = \frac{a-4+\sqrt{a^2-8a}}{2}$.

Решим неравенства:

$$a) -2 < \frac{a-4+\sqrt{a^2-8a}}{2} < -1 \Leftrightarrow -4 < a-4+\sqrt{a^2-8a} < -2 \Leftrightarrow -a < \sqrt{a^2-8a} < 2-a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 < a^2 - 8a < 4 - 4a + a^2 \Leftrightarrow 0 < -8a < 4 - 4a \Leftrightarrow 4a > -4 \Leftrightarrow a > -1, \text{ т.е. } a \in (-1; 0);$$

$$б) -1 < \frac{a-4+\sqrt{a^2-8a}}{2} < 0 \Leftrightarrow -2 < a-4+\sqrt{a^2-8a} < 0 \Leftrightarrow 2-a < \sqrt{a^2-8a} < 4-a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-4a+a^2 < a^2 - 8a < 16-8a+a^2 \Leftrightarrow 4-4a < -8a < 16-8a \Leftrightarrow 4a < -4 \Leftrightarrow a < -1.$$

Таким образом, $x = \frac{a-4+\sqrt{a^2-8a}}{2}$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

2) $a \in [8; +\infty) \Rightarrow x > 0$. В этом случае оба корня подходят $x_{1,2} = \frac{a-4 \pm \sqrt{a^2-8a}}{2}$.

Ответ: если $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$, то $x = \frac{a-4+\sqrt{a^2-8a}}{2}$;

если $a = -1$, $a \in [0; 8]$, то решений нет;

если $a \in [8; +\infty)$, то $x_{1,2} = \frac{a-4 \pm \sqrt{a^2-8a}}{2}$.

2.265. $a^{\lg x^2 - \lg(2-x)} = 1, a > 0.$

Решение.

ОДЗ: $x < 2.$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим $\lg a^{\lg x^2 - \lg(2-x)} = \lg 1 \Leftrightarrow (2\lg|x| - \lg(2-x))\lg a = 0 \Rightarrow \lg a$ при $a = 1, x < 2$, или $\lg x^2 = \lg(2-x) \Leftrightarrow x^2 = 2-x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0, x_1 = -2, x_2 = 1$ при $a \neq 1$.

Ответ: если $0 < a \neq 1$, то $x_1 = -2, x_2 = 1$;

если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 2).$

2.266. $1 + \log_b(2\lg a - x)\log_x b = \frac{2}{\log_b x}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < b \neq 1, \\ 2\lg a - x > 0. \end{cases}$

Из условия имеем:

$$1 + \log_b(2\lg a - x) \frac{1}{\log_b x} = \frac{2}{\log_b x} \Leftrightarrow \log_b x + \log_b(2\lg a - x) = 2 \Leftrightarrow \log_b[x(2\lg a - x)] = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2\lg a - x) = b^2 \Leftrightarrow x^2 - 2\lg a \cdot x + b^2 = 0, x_{1,2} = \lg a \pm \sqrt{\lg^2 a - b^2}.$$

Оба корня $x_1, x_2 \neq 1$ положительные и удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: если $a \geq 10^b$, то $x_{1,2} = \lg a \pm \sqrt{\lg^2 a - b^2}$;

если $a < 10^b$, то корней нет.

2.267. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_a \left(\frac{a^2 - 4}{2a - x} \right) = 1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{a^2 - 4}{2a - x} > 0, \\ 0 < x \neq 1, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$

$\log_{\sqrt{x}} a = \frac{\log_a a}{\log_a \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_a \sqrt{x}} = \frac{1}{\log_a^2 x}$, следовательно, исходное уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{\log_a^2 x} \cdot \log_a \left(\frac{a^2 - 4}{2a - x} \right) = 1 \Leftrightarrow \log_a \left(\frac{a^2 - 4}{2a - x} \right) = \log_a^2 x \Leftrightarrow \log_a^2 x \Leftrightarrow \frac{a^2 - 4}{2a - x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2a, \\ 2ax - x^2 = a^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2ax + (a^2 - 4) = 0, \\ x \neq 2a \end{cases} \quad x = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + 4} = a \pm 2, x_1 = a - 2, x_2 = a + 2.$$

Если $x = a - 2$, то из ОДЗ имеем, что $2 < a \neq 3$.

В случае $x = a + 2$ получаем $0 < a < 1$, $1 < a < 2$, $a > 2$.

Ответ: если $a \leq 0$, $a = 1$, то решений нет;

если $0 < a < 1$, $1 < a < 2$, $a = 3$, то $x = a + 2$;

если $a > 2$, $a \neq 3$, то $x_1 = a - 2$, $x_2 = a + 2$.

$$2.268. \sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$$

Переходя к логарифму по основанию a , получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{\log_a (ax)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{\log_a x}\right)} + \sqrt{\log_a \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{\log_a x}\right)} = a &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(\log_a x + 1)^2}{4 \log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x - 1)^2}{4 \log_a x}} = a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = 2a\sqrt{\log_a x} \end{aligned}$$

при $\log_a x > 0$.

Рассмотрим два случая:

1) $0 < \log_a x \leq 1$. Раскрывая модули с соответствующими знаками, имеем:

$$\log_a x + 1 + 1 - \log_a x = 2a\sqrt{\log_a x} \Leftrightarrow a\sqrt{\log_a x} = 1 \Leftrightarrow \log_a x = \frac{1}{a^2}, \quad x_1 = a^{\frac{1}{a^2}};$$

2) $\log_a x > 1$. Получаем следующее уравнение:

$$\log_a x = a\sqrt{\log_a x} \Leftrightarrow \log_a^2 x - a^2 \log_a x = 0 \Leftrightarrow \log_a x = a^2, \quad x_2 = a^{a^2}.$$

При $0 < a < 1$ $\log_a x_1 = \frac{1}{a^2} > 1$, $\log_a x_2 = a^2 < 1$, следовательно, для таких a решений нет.

Если $a > 1$, то $\log_a x_1 = \frac{1}{a^2} < 1$, $\log_a x_2 = a^2 > 1$.

Ответ: если $0 < a < 1$, то решений нет;

при $a > 1$ $x_1 = a^{\frac{1}{a^2}}$, $x_2 = a^{a^2}$.

$$2.269. (1 + (3a + 4)^2) \log_2 (-2x - x^2) + (1 + (a - 2)^2) \log_7 \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = \log_7 \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + \log_2 (-2x - x^2).$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -2x - x^2 > 0, \\ 1 - \frac{x^2}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < 0.$$

В этом случае $-2x - x^2 \leq 1$, $1 - \frac{x^2}{3} \leq 1$, следовательно, $\log_2(-2x - x^2) \leq 0$, $\log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) \leq 0$.

Переносим все члены уравнения в правую часть, получим:

$$(3a + 4)^2 \log_2(-2x - x^2) + (a - 2)^2 \log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3a + 4)^2 \log_2(-2x - x^2) = 0, \\ (a - 2)^2 \log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие случаи:

$$1) \ a = -\frac{4}{3}, \log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = 0, x = 0 \text{ — не подходит по ОДЗ;}$$

$$2) \ a = 2, \log_2(-2x - x^2) = 0, -2x - x^2 = 1, x^2 + 2x + 1 = 0, (x + 1)^2 = 0, x = -1;$$

$$3) \ a \neq \frac{4}{3}, 2; \text{ имеем следующую систему уравнений:}$$

$$\begin{cases} \log_2(-2x - x^2) = 0, \\ \log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - x^2 = 1, \\ 1 - \frac{x^2}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 = 0, \\ x^2 = 3, \end{cases} \emptyset.$$

Ответ: если $a = 2$, то $x = -1$;

при других значениях a решений нет.

$$2.270. \log_1(9^x + a) + \log_3(2 \cdot 3^x) = 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 9^x + a > 0.$$

$$\text{Из условия имеем: } \log_3(2 \cdot 3^x) = \log_3(9^x + a) \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x = 9^x + a \Leftrightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x + a = 0.$$

$$\text{Пусть } y = 3^x > 0, \text{ тогда получаем } y^2 - 2y + a = 0, y = 1 \pm \sqrt{1 - a} \text{ при } a \leq 1.$$

Рассмотрим следующие случаи:

$$1) \text{ если } a > 1, \text{ то решений нет;}$$

$$2) \text{ если } 0 < a \leq 1, \text{ то } y_1 = 1 + \sqrt{1 - a}, y_2 = 1 - \sqrt{1 - a} \Rightarrow x_{1,2} = (\log_3 1 \pm \sqrt{1 - a}), \text{ очевидно, что оба корня подходят по ОДЗ;}$$

$$3) \ a \leq 0, y_1 = 1 + \sqrt{1 - a}, y_2 = 1 - \sqrt{1 - a} \leq 0 \text{ (не подходит по ОДЗ)}, 3^x = 1 + \sqrt{1 - a} \Rightarrow x = \log_3(1 + \sqrt{1 - a}).$$

Проверим последнее решение по ОДЗ:

$$3^{2x} + a = (3^x)^2 + a = \left(3^{\log_3(1+\sqrt{1-a})}\right)^2 + a = (1+\sqrt{1-a})^2 + a = 1 + 2\sqrt{1-a} + 1 - a + a = 2 + 2\sqrt{1-a} > 0.$$

Ответ: если $a > 1$, то решений нет;

$$\text{если } 0 < a \leq 1, \text{ то } x_{1,2} = \log_3(1 \pm \sqrt{1-a});$$

$$\text{если } a \leq 0, \text{ то } x = \log_3(1 \pm \sqrt{1-a}).$$

2.271. Найти все значения x , удовлетворяющие уравнению $\log_{x+a^2+1}(a^2x+2) = 2\log_{7+2x}(5-\sqrt{6-2x})$ при любом значении a .

Решение.

При $a = 1$ уравнение принимает вид

$$\log_{x+2}(x+2) = 2\log_{7+2x}(5-\sqrt{6-2x}) \Rightarrow \log_{7+2x}(5-\sqrt{6-2x})^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 + 6 - 2x - 10\sqrt{6-2x} = 7 + 2x \Leftrightarrow 5\sqrt{6-2x} = 12 - 2x \Rightarrow 25(6-2x) = 144 - 48x + 4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0, \quad x_1 = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = 1.$$

Подставляя $x_1 = -\frac{3}{2}$ в исходное уравнение, получим:

$$\log_{a^2+\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{2}a^2+2\right) = 2\log_4 2 \Leftrightarrow \log_{a^2+\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{2}a^2+2\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a^2 - \frac{1}{2} \neq 1, \\ -\frac{3}{2}a^2 + 2 = a^2 - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad a = \pm 1.$$

Так как x должно по условию удовлетворять уравнению для всех $a \in \mathbb{R}$, то x_1 — не подходит.

Далее, подставим $x_2 = 1$. Имеем: $\log_{a^2+2}(a^2+2) = 2\log_9 3 \Leftrightarrow \log_{a^2+2}(a^2+2) = \log_9 9 \Leftrightarrow 1 = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Решить системы уравнений (2.272 – 2.298).

$$2.272. \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - 3y - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем: $\log_y x + \frac{1}{\log_y x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_y^2 x - 2\log_y x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_y x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_y x = 1 \Leftrightarrow y = x$.

Подставляя во второе уравнение системы, получаем: $x^2 - 3x - 4 = 0, x_1 = 4, x_2 = -1$ — не подходит по ОДЗ.

Тогда $x = y = 4$.

Ответ: (4; 4).

$$2.273. \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432. \end{cases}$$

Решение.

Из условия имеем: $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2^3 \cdot 3^4, \\ 3^x \cdot 2^y = 2^4 \cdot 3^3 \end{cases} \Rightarrow (2^x \cdot 3^y) \cdot (3^x \cdot 2^y) = (2^3 \cdot 3^4) \cdot (2^4 \cdot 3^3) \Leftrightarrow 2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 2^7 \cdot 3^7 \Leftrightarrow 6^{x+y} = 6^7 \Leftrightarrow x+y=7.$

Разделив первое уравнение системы на второе, получим: $\frac{2^x \cdot 3^y}{3^x \cdot 2^y} = \frac{2^3 \cdot 3^4}{2^4 \cdot 3^3} \Leftrightarrow \frac{3^{y-x}}{2^{y-x}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{y-x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow y-x=1.$

Получили систему уравнений: $\begin{cases} x+y=7, \\ y-x=1 \end{cases} \Rightarrow 2y=8, y=4, x=3.$

Ответ: (3; 4).

$$2.274. \begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 7, \\ \log_3 x + \log_3 y = 5. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x, y > 0.$

Складывая уравнения системы, получим: $2\log_3 x = 12 \Leftrightarrow \log_3 x = 6, x = 3^6.$

Из второго уравнения системы имеем: $6 + \log_3 y = 5 \Leftrightarrow \log_3 y = -1, y = 3^{-1}.$

Ответ: $(3^6, 3^{-1}).$

$$2.275. \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36}, \\ xy - x + y = 118. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} > 0$, тогда первое уравнение системы принимает вид:

$$1 - \frac{1}{t} = \frac{65}{36} \Leftrightarrow 36t^2 - 65t - 36 = 0, t_1 = \frac{9}{4}, t_2 = -\frac{4}{9} \text{ — не подходит.}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x-y=2.$$

Получили следующую систему уравнений: $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=120, \end{cases}$

откуда по теореме Виета $x_1 = 12, y_1 = 10; x_2 = -10, y_2 = -12.$

Ответ: (12; 10), (-10; -12).

$$2.276. \begin{cases} \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+y > 0, \\ x-y > 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем: $x-y = \frac{2}{x+y}$.

Подставляя в первое уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \log_2(x+y) - \log_3 \frac{2}{x+y} = 1 &\Leftrightarrow \log_2(x+y) + \log_3 \frac{x+y}{2} = 1 \Leftrightarrow \log_2(x+y) + \frac{\log_2(x+y)}{\log_2 3} - \frac{1}{\log_2 3} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2 3 \cdot \log_2^2(x+y) + \log_2(x+y) = \log_2 3 + 1 \Leftrightarrow \log_2(x+y)(\log_2 3 + 1) = \log_2 3 + 1 \Leftrightarrow \log_2(x+y) = 1 \Leftrightarrow x+y = 2. \end{aligned}$$

Пришли к следующей системе уравнений: $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow 2x=3, \quad x=\frac{3}{2}, \quad y=\frac{1}{2}.$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$2.277. \begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = \sqrt{12}, \\ (x+y)2^{y-x} = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x+y > 0, x \neq y.$$

$$\text{Преобразуем первое уравнение системы: } (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = \sqrt{12} \Leftrightarrow x+y = (12)^{\frac{x-y}{2}} \Leftrightarrow x+y = 2^{x-y} \cdot 3^{\frac{x-y}{2}}.$$

Из второго уравнения системы имеем $x+y = 2^{x-y} \cdot 3$.

$$\text{Таким образом, получаем: } 2^{x-y} \cdot 3 = 2^{x-y} \cdot 3^{\frac{x-y}{2}} \Leftrightarrow 3^{\frac{x-y}{2}} = 3 \Leftrightarrow x-y = 2, \quad x+y = 4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow x=7, y=5.$$

$$\text{Ответ: } (7; 5).$$

$$2.278. \begin{cases} y = 1 + \log_3 x, \\ x^y = 9. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 0 < x \neq 1.$$

Логарифмируя второе уравнение системы по основанию 3, получим: $\log_3 x^y = \log_3 3^2 \Leftrightarrow y \log_3 x = 2$.

$$\begin{cases} y = 1 + \log_3 x, \\ y \log_3 x = 2 \end{cases} \Rightarrow (1 + \log_3 x) \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x + \log_3 x - 2 = 0, \quad (\log_3 x)_1 = -2, \quad x_1 = \frac{1}{9}; \quad (\log_3 x)_2 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Тогда $y_1 = -1, y_2 = 2$.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{9}; -1\right), (3; 2).$$

$$2.279. \begin{cases} x^{2y^2-1} = 4, \\ x^{y^2+2} = 64. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 0 < x \neq 1.$$

Логарифмируя первое и второе уравнения системы по основанию 4, получим:

$$\begin{cases} \log_4 x^{2y^2-1} = \log_4 4, \\ \log_4 x^{y^2+2} = \log_4 4^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y^2-1)\log_4 x = 1, \\ (y^2+2)\log_4 x = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2+2}{2y^2-1} = 3, y^2 = 1, y = \pm 1, x = 4.$$

Ответ: (4; 1), (4; -1).

$$2.280. \begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем:

$$2\log_y x + \frac{2}{\log_y x} = 5 \Leftrightarrow 2\log_y^2 x - 5\log_y x + 2 = 0, (\log_y x)_1 = \frac{1}{2}, (\log_y x)_2 = 2.$$

Отсюда $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = y^2$. Из второго уравнения системы найдем:

$$1) \quad x = \sqrt{y}, \sqrt{y} \cdot y = 8, y^{\frac{3}{2}} = 8, y_1 = 4;$$

$$2) \quad x = y^2, y^3 = 8, y_2 = 2.$$

Тогда $x_1 = 2, x_2 = 4$.

Ответ: (2; 4), (4; 2).

$$2.281. \begin{cases} 2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 16, \\ \log_2 \sqrt{xy} = 1 + \log_2 63. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем: $2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2^4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4$.

Из второго уравнения системы получим: $\log_2 \sqrt{xy} = \log_2 2 + \log_2 63 \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{xy} = \log_2 126 \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 126$.

Таким образом, $\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 4) = 126 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 63 = 0, (\sqrt{x})_1 = 9, (\sqrt{x})_2 = -7$ — не подходит.

$$x = 81, \sqrt{y} = \frac{126}{9} = 14, y = 196.$$

Ответ: (81; 196).

$$2.282. \begin{cases} 5\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-y} + 2\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 3 = 0, \\ \log_3(3x-y) + \log_3(y+x) - \frac{4}{\log_2 3} = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x - y > 0, \\ y + x > 0. \end{cases}$$

Пусть $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2x-y}{2}} > 0$, тогда первое уравнение системы принимает вид: $5t^2 + 2t - 3 = 0$, $t = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{10} = -1, \frac{3}{5}$.

Отсюда: а) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = -1$ (нет решений); б) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2x-y}{2} = 1, y = 2x - 2$.

Рассмотрим теперь второе уравнение системы:

$$\log_3(3x-y) + \log_3(y+x) - \frac{4}{\log_2 3} = 0 \Leftrightarrow \log_3(3x-y)(y+x) = 4 \log_3 2 \Leftrightarrow \log_3(3x-y)(y+x) = \log_3 16 \Leftrightarrow (3x-y)(y+x) = 16.$$

Получили $\begin{cases} y = 2x - 2, \\ (3x - y)(y + x) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2, \\ (3x - (2x - 2))(2x - 2 + x) = 16 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 4x - 20 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{10}{3}, x_2 = 2;$

$$y_1 = -\frac{26}{3}, y_2 = 2. \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{10}{3}, \\ y_1 = -\frac{26}{3} \end{cases} \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

Ответ: (2; 2).

$$2.283. \begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y \log_y (y-3x) = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < y \neq 1, \\ x > 0, \\ y - 3x > 0. \end{cases}$$

Логарифмируя первое уравнение по основанию y , имеем:

$$\log_y(y \cdot x^{\log_y x}) = \log_y x^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \log_y y + \log_y x^{\log_y x} = \frac{5}{2} \log_y x \Leftrightarrow 2 \log_y^2 x - 5 \log_y x + 2 = 0, (\log_y x)_1 = 2, (\log_y x)_2 = \frac{1}{2}.$$

Получаем два случая:

$$1) \begin{cases} \log_y x = 2, \\ \log_4 y \cdot \frac{\log_4 (y-3x)}{\log_4 y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2, \\ \log_4 (y-3x) = \log_4 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2, \\ y - 3x = 4 \end{cases} \Rightarrow 3y^2 - y + 4 = 0, D < 0, \emptyset;$$

$$2) \begin{cases} \log_y x = \frac{1}{2}, \\ y - 3x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3 - 4 = 0, x_1 = 4, x_2 = -1 \text{ — не подходит по ОДЗ; } x = 4 \Rightarrow y = 16.$$

Ответ: (4; 16).

$$2.284. \begin{cases} \frac{x+y}{25^y x} = 3125, \\ \log_5(x-y) = \log_5 12 - \log_5(x+y). \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-y > 0, \\ x+y > 0, \\ x \neq 0, y \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Перепишем систему уравнений в виде } \begin{cases} 2\left(\frac{x+y}{y x}\right) = 5^5, \\ \log_5(x-y) + \log_5(x+y) = \log_5 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{x+y}{y x}\right) = 5, \\ \log_5(x^2 - y^2) = \log_5 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{x+y}{y x}\right) = 5, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$$

$$\text{Пусть } t = \frac{x}{y}, \text{ тогда первое уравнение принимает вид: } 2\left(t + \frac{1}{t}\right) = 5 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0, t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Если } t_1 = 2, \text{ то } \frac{x}{y} = 2, x = 2y, x^2 - y^2 = 4y^2 - y^2 = 3y^2 = 12 \Rightarrow y^2 = 4, |y| = 2.$$

$$y_1 = -2, x_1 = -4 \text{ — не подходят по ОДЗ;}$$

$$y_2 = 2, x_2 = 4 \text{ — решение исходной системы.}$$

$$\text{Если } t_2 = \frac{1}{2}, \text{ то } \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, y = 2x, x^2 - y^2 = x^2 - 4x^2 = -3x^2 \neq 12, \emptyset.$$

Ответ: (4; 2).

$$2.285. \begin{cases} \lg \sqrt{(x+y)^2} = 1, \\ \lg y - \lg |x| = \frac{1}{\lg_3 10}. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0, \\ x \neq 0, \\ x+y \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Перепишем исходную систему уравнений в виде } \begin{cases} \lg |x+y| = 1, \\ \lg \frac{y}{|x|} = \lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| = 10, \\ \frac{y}{|x|} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| = 10, \\ y = 3|x|. \end{cases}$$

Таким образом, из первого уравнения системы имеем $|x + 3|x|| = x + 3|x|$, так как $x + 3|x| > 0$, следовательно, приходим к двум случаям:

$$1) x > 0, \begin{cases} y = 3x, \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow 4x = 10, x_1 = \frac{5}{2}, y_1 = \frac{15}{2};$$

$$2) \quad x < 0, \begin{cases} y = -3x, \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow -2x = 10, x_2 = -5, y_2 = 15.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5}{2}; \frac{15}{2} \right), (-5; 15).$$

$$2.286. \begin{cases} x^{x+y} = y^8, \\ y^{x+y} = x^2. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $y = x^{\frac{x+y}{8}}$. Подставив найденное значение y во второе уравнение системы, получим:

$$x^{\frac{(x+y)^2}{8}} = x^2 \Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 1 \quad \text{или} \quad \frac{(x+y)^2}{8} = 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 16 \Leftrightarrow |x+y| = 4, x+y = 4; \text{ так как } x > 0, y > 0. \text{ Далее,}$$

$$y^4 = x^2 \Rightarrow x = y^2, y^2 + y = 4, y^2 + y - 4 = 0, D = 1 + 16 = 17, y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, y_3 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ — не подходит.}$$

$$x_2 = \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)^2 = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } (1; 1), \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right).$$

$$2.287. \begin{cases} x^{2x+y} = 16, \\ 8x + 4y + \log_4 x = 9. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 0 < x \neq 1.$$

Логарифмируя обе части первого уравнения системы по основанию 4, получаем: $\log_4 x^{2x+y} = \log_4 16 \Leftrightarrow (2x+y)\log_4 x = 2$.

Система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} (2x+y)\log_4 x = 2, \\ 4(2x+y) + \log_4 x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \log_4 x = 9 - 4(2x+y).$$

$$(2x+y)(9 - 4(2x+y)) = 2 \Leftrightarrow 4(2x+y)^2 - 9(2x+y) + 2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $(2x+y)$, находим:

$$2x+y = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad 2x+y = 2. \quad \text{Отсюда: } x^{\frac{1}{4}} = 2^4, x_1 = 2^{16}, y_1 = \frac{1}{4} - 2^{15} \quad \text{или} \quad x^2 = 16, x_2 = 4, y_2 = 2 - 8 = -6.$$

Ответ: $\left(2^{16}; \frac{1}{4} - 2^{15}\right) (4; -6)$.

$$2.288. \begin{cases} 0,5 \log_2 x + 0,5 \log_2 y - \log_2 (4 - \sqrt{x}) = 0, \\ (4\sqrt{y})^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 2^{\sqrt{y}} = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0, \\ 0 < x < 16. \end{cases}$$

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2(xy) = \log_2(4 - \sqrt{x}), \\ 2^{2\sqrt{y}\sqrt{x}} = 2^{3+\sqrt{y}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \sqrt{xy} = \log_2(4 - \sqrt{x}), \\ 2\sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = 4 - \sqrt{x}, \\ 2\sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{xy} = 8 - 2\sqrt{x}, \\ 2\sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow 8 - 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{y} = 5 - 2\sqrt{x}, \sqrt{x}(5 - 2\sqrt{x}) = 4 - \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Если $t = \sqrt{x}$, то получаем уравнение

$$t(5 - 2t) = 4 - t \Leftrightarrow 2t^2 - 6t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0, t_1 = 1, x_1 = 1; t_2 = 2, x_2 = 4. y = (5 - 2\sqrt{x})^2 \Rightarrow y_1 = 9, y_2 = 1.$$

Ответ: (1; 9), (4; 1).

$$2.289. \begin{cases} \log_6 x \left(\frac{1}{\log_x 3} + \log_3 y \right) = \log_3 x, \\ \log_3 x \log_5(x + y) = \log_5 x \cdot \log_3 5. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ x + y > 0. \end{cases}$$

Перейдем в уравнениях системы к логарифмам по основанию 3:

$$\begin{cases} \frac{\log_3 x}{\log_3 6} (\log_3 x + \log_3 y) = \log_3 x, \\ \log_3 x \frac{\log_3(x + y)}{\log_3 5} = \log_3 5 \frac{\log_3 x}{\log_3 5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(xy) = \log_3 6 \quad (\log_3 x \neq 0), \\ \log_3(x + y) = \log_3 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = 2.$$

Ответ: (2; 3), (3; 2).

$$2.290. \begin{cases} 2 \log_4(y + 1) + \log_2 y = \log_2 \left(\frac{x}{y} - 2 \right) \\ 5 + \log_2 \frac{y}{x} = \frac{6}{\log_2 \frac{x}{y}}. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \frac{x}{y} > 0. \end{cases}$$

Перепишем исходную систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{2 \log_2 (y+1)}{\log_2 4} + \log_2 y = \log_2 \left(\frac{x}{y} - 2 \right), \\ 5 + \log_2 \left(\frac{x}{y} \right)^{-1} = \frac{6}{\log_2 \frac{x}{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (y+1) + \log_2 y = \log_2 \left(\frac{x}{y} - 2 \right), \\ 5 - \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{6}{\log_2 \left(\frac{x}{y} \right)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 y(y+1) = \log_2 \left(\frac{x}{y} - 2 \right), \\ 5 - \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{6}{\log_2 \left(\frac{x}{y} \right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+1) = \frac{x}{y} - 2, \\ 5 - \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{6}{\log_2 \left(\frac{x}{y} \right)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $t = \log_2 \left(\frac{x}{y} \right)$, тогда второе уравнение системы принимает вид: $5 - t = \frac{6}{t} \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

Таким образом, получаем два случая:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = 2, \\ y(y+1) = \frac{x}{y} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 4, \\ y(y+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y, \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 1, \end{cases} y = -2 \text{ — не подходит по ОДЗ;} \\ 2) & \begin{cases} \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = 3, \\ y^2 + y = \frac{x}{y} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 8, \\ y^2 + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y, \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 16, \\ y_2 = 2, \end{cases} y = -3 \text{ — не подходит по ОДЗ.} \end{aligned}$$

Ответ: (4; 1), (16; 2).

$$2.291. \begin{cases} \log_x (xy) = \log_y x^2, \\ y^{2 \log_x x} = 4y + 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1. \end{cases}$$

Перепишем исходную систему уравнений в следующем виде:
$$\begin{cases} \log_x x + \log_x y = \frac{\log_x x^2}{\log_x y}, \\ \left(y^{\log_x x} \right)^2 = 4y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \log_x y = \frac{2}{\log_x y}, \\ x^2 = 4y + 3. \end{cases}$$

Пусть $t = \log_x y$, тогда первое уравнение системы принимает вид: $1 + t = \frac{2}{t} \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$, $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Рассмотрим следующих два случая:

- 1) $\begin{cases} \log_x y = -2, \\ x^2 = 4y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^{-2}, \\ x^2 = 4y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2}, \\ x^2 = \frac{4}{x^2} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2}, \\ x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4, |x| = 2, \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = \frac{1}{4}, \end{cases} x^2 = -1, \emptyset;$
- 2) $\begin{cases} \log_x y = 1, \\ x^2 = 4y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ x^2 = 4y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{7}, x_3 = 2 - \sqrt{7} \text{ — не подходит по ОДЗ}, y_2 = 2 + \sqrt{7}.$

Ответ: $\left(2; \frac{1}{4}\right), (2 + \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$.

2.292. $\begin{cases} x^{\log_2 y} + 2y^{\log_2 x} = 12, \\ \log_2 y - \log_2 x = 1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1. \end{cases}$

Так как $y^{\log_2 x} = (x^{\log_2 y})^{\log_2 x} = x^{\frac{\log_2 y}{\log_2 x} \cdot \log_2 x} = x^{\log_2 y}$, то система принимает вид:

$$\begin{cases} x^{\log_2 y} + 2x^{\log_2 y} = 12, \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_2 y} = 4, \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x^{\log_2 y} = \log_2 2^2, \\ \log_2 y = \log_2 x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 y \cdot \log_2 x = 2, \\ \log_2 y = \log_2 x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x + 1) \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0, (\log_2 x)_1 = -2, (\log_2 x)_2 = 1.$$

Получаем два случая:

- 1) $\begin{cases} \log_2 x = -2, \\ \log_2 y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}, \\ y_1 = \frac{1}{2}; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} \log_2 x = 1, \\ \log_2 y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 4. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right), (2, 4)$.

2.293. $\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \frac{5}{2} \lg^2(a^2). \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ a \neq 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы $x = \frac{a^2}{y}$. Далее, из второго уравнения получаем:

$$\lg^2 \frac{a^2}{y} + \lg^2 y = \frac{5}{2} \lg^2 a^2 \Leftrightarrow 2(\lg a^2 - \lg y)^2 + 2 \lg^2 y = 5 \lg^2 a^2 \Leftrightarrow 4 \lg^2 y - 4 \lg a^2 \lg y - 3 \lg^2 a^2 = 0, D = 16 \lg^2 a^2 = 64 \lg^2 a^2.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg y$, имеем:

$$1) \lg y = \frac{4 \lg a^2 - 8 \lg a^2}{8} = -\frac{\lg a^2}{2} = -\lg |a| = \lg |a|^{-1}, y_1 = \frac{1}{|a|}, x_1 = \frac{|a|^2}{|a|} = |a|;$$

$$2) \lg y = \frac{4 \lg a^2 + 8 \lg a^2}{8} = \frac{3}{2} \lg a^2 = \lg |a|^3, y_2 = |a|^3, x_2 = \frac{|a|^2}{|a|^3} = \frac{1}{|a|}.$$

Ответ: $\left(|a|; \frac{1}{|a|}\right); \left(\frac{1}{|a|}; |a|^3\right).$

$$2.294. \begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y + \log_{a^2} z = d, \\ \log_c y + \log_c z + \log_{c^2} x = d, \\ \log_b z + \log_{b^2} x + \log_{b^2} y = d. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0, y > 0, z > 0, 0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1, 0 < c \neq 1.$

Перепишем исходную систему уравнений в виде:
$$\begin{cases} \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y + \frac{1}{2} \log_a z = d, \\ \log_c y + \frac{1}{2} \log_c z + \frac{1}{2} \log_c x = d, \\ \log_b z + \frac{1}{2} \log_b x + \frac{1}{2} \log_b y = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x \sqrt{yz} = d, \\ \log_c y \sqrt{xz} = d, \\ \log_b z \sqrt{xy} = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \sqrt{yz} = a^d, \\ y \sqrt{xz} = c^d, \\ z \sqrt{xy} = b^d. \end{cases}$$

Перемножая левые и правые части уравнений системы, имеем: $(xyz)^2 = (abc)^d \Leftrightarrow xyz = (abc)^{\frac{d}{2}}.$

Из первого уравнения системы $x^2 yz = a^{2d}$, следовательно, $x(xyz) = a^{2d} \Rightarrow x = \frac{a^{2d}}{(abc)^{\frac{d}{2}}} = \left(\frac{a^3}{bc}\right)^{\frac{d}{2}}.$

Аналогично из второго и третьего уравнений системы получаем:

$$y(xyz) = c^{2d} \Rightarrow y = \frac{c^{2d}}{(abc)^{\frac{d}{2}}} = \left(\frac{c^3}{ab}\right)^{\frac{d}{2}}; z(xyz) = b^{2d} \Rightarrow z = \frac{b^{2d}}{(abc)^{\frac{d}{2}}} = \left(\frac{b^3}{ac}\right)^{\frac{d}{2}}.$$

Ответ: $\left(\left(\frac{a^3}{bc}\right)^{\frac{d}{2}}; \left(\frac{c^3}{ab}\right)^{\frac{d}{2}}; \left(\frac{b^3}{ac}\right)^{\frac{d}{2}}\right).$

$$2.295. \begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = 6, \\ \log_{b^2} x + \log_b y = 6. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0, y > 0, 0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1.$

Перепишем исходную систему уравнений в виде: $\begin{cases} \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y = 6, \\ \frac{1}{2} \log_b x + \log_b y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x \sqrt{y} = \log_a a^6, \\ \log_b \sqrt{x} y = \log_b b^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \sqrt{y} = a^6, \\ y \sqrt{x} = b^6. \end{cases}$

Перемножая левые и правые части уравнений системы, получим: $(xy)^{\frac{3}{2}} = a^6 b^6 \Leftrightarrow xy = a^4 b^4$.

Возведя левые и правые части уравнений последней системы в квадрат, находим:

$$\begin{cases} x^2 y = a^{12}, \\ y^2 x = b^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(xy) = a^{12}, \\ y(xy) = b^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^{12}}{a^4 b^4} = \frac{a^8}{b^4}, \\ y = \frac{b^{12}}{a^4 b^4} = \frac{b^8}{a^4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{a^8}{b^4}; \frac{b^8}{a^4} \right)$.

2.295. $\begin{cases} a^x b^{2y} = ab^2, \\ 2 \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \log_{\sqrt{a}} b. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x > 0, y > 0, 0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1$.

Прологарифмировав первое уравнение системы по основанию a , получим:

$$\log_a a^x + \log_a b^{2y} = \log_a a + \log_a b^2 \Leftrightarrow x + 2y \log_a b = 1 + 2 \log_a b.$$

Преобразуем второе уравнение системы, перейдя к логарифмам по основанию a :

$$2 \log_a x = -\frac{\log_a y}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a b}{\log_a \frac{1}{b}} = -2 \log_a y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}, y = \frac{1}{x}.$$

Подставляя в первое уравнение, имеем:

$$x + \frac{2}{x} \log_a b = 1 + 2 \log_a b \Leftrightarrow x^2 - (1 + 2 \log_a b)x + 2 \log_a b = 0, x_1 = 1, y_1 = 1; x_2 = 2 \log_a b, y_2 = \frac{1}{2 \log_a b}.$$

Ответ: $(1; 1), \left(2 \log_a b; \frac{1}{2 \log_a b} \right)$.

2.297. $\begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = 2b, \\ a^{x+y} = c \quad (a > 0). \end{cases}$

Решение.

Необходимо $c > 0$ и $b > 0$. Пусть $u = a^x, v = a^y$, тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 2b, \\ uv = c \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 + 2uv = 2(b+c), (u+v) = \sqrt{2(b+c)}; u^2 + v^2 - 2uv = 2(b-c), |u-v| = \sqrt{2(b-c)},$$

следовательно, $b \geq c$.

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} u+v=\sqrt{2}\sqrt{b+c}, \\ u-v=\sqrt{2}\sqrt{b-c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}), \\ v=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\log_a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}), \\ y_1=\log_a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}) \end{cases} \quad \text{при } 0 < a \neq 1.$$

Если $a = 1$, то $b = c = 1$ и x, y — любые числа;

$$2) \begin{cases} u+v=\sqrt{2}\sqrt{b+c}, \\ v-u=\sqrt{2}\sqrt{b-c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}), \\ v=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\log_a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}), \\ y_2=\log_a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}). \end{cases}$$

Ответ: если $a = b = c = 1$, то x, y — любые действительные числа;

если $a > 0, b > 0, c > 0, b \geq c, a \neq 1$, то $\left(\log_a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}); \log_a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}) \right)$,

$\left(\log_a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}); \log_a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}) \right)$; в других случаях решений нет.

$$2.298. \begin{cases} x^{\log_a y} + y^{\log_a x} = 2a^2, \\ \log_a y + \log_a x = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$$

Так как $y^{\log_a x} = (x^{\log_a y})^{\log_a x} = x^{\log_a y \cdot \log_a x} = x^{\log_a y}$ при $x \neq 1$, то система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} x^{\log_a y} = a^2, \\ \log_a y + \log_a x = \frac{5}{2}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x^{\log_a y} = \log_a a^2, \\ \frac{1}{2} \log_a y + \frac{1}{2} \log_a x = \frac{5}{2}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log_a y}{\log_a a^3} \log_a x = 2, \\ \log_a x + \log_a y = 5, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x \cdot \log_a y = 6, \\ \log_a x + \log_a y = 5, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

По теореме Виета возможны следующих два случая:

$$1) \begin{cases} \log_a x = 2, \\ \log_a y = 3, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a^2 \neq 1, \\ y_1 = a^3, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log_a x = 3, \\ \log_a y = 2, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = a^3, \\ y_2 = a^2. \end{cases}$$

Ответ: при $0 < a \neq 1$ (a^2, a^3), (a^3, a^2);

при других a решений нет.

2.299. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} \lg(4+y) = \lg x, \\ a-y = \frac{1}{2}(x+a)^2 \end{cases}$ имеет решения?

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y+4 > 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы получаем: $x = 4 + y, y = x - 4$.

Тогда из второго уравнения имеем:

$$2(a+4-x) = (x+a)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -a-1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1 - a^2 + 2a + 8} = -a-1 \pm \sqrt{4a+9}$$

при $a \geq -\frac{9}{4}$.

Система уравнений будет иметь решения, если больший корень $x_2 = -a-1 + \sqrt{4a+9}$ положителен, т.е.

$$-a-1 + \sqrt{4a+9} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4a+9} > a+1.$$

При $a \in \left[-\frac{9}{4}; -1\right)$ последнее неравенство истинно.

Если $a \in [-1; +\infty)$, то, возведя обе части неравенства в квадрат, получим: $4a+9 > a^2+2a+1 \Leftrightarrow a^2-2a-8 < 0, a \in [-1; 4)$.

Отсюда следует, что при $a \in \left[-\frac{9}{4}; 4\right)$ $x_2 > 0$.

Ответ: при $a \in \left[-\frac{9}{4}; 4\right)$.

2.300. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \ln x + \ln y = \ln a \end{cases}$ имеет единственное решение?

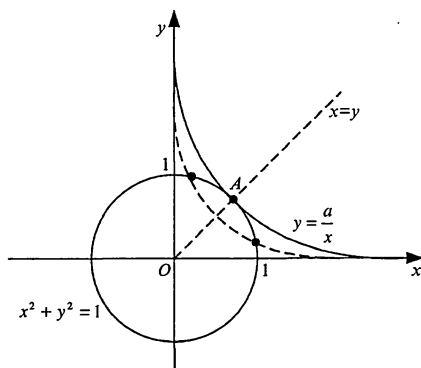


Рис. 2.2.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем: $\ln xy = \ln a \Leftrightarrow xy = a$ и система принимает вид:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ xy = a, \\ x > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Построим графики первого и второго уравнений системы, т.е. окружность радиусом 1 и гиперболу.

Очевидно, что система уравнений будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда окружность и гипербола

касаются в точке A , лежащей на оси симметрии гиперболы $y = x$. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: при $a = \frac{1}{2}$.

2.301. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2^{x+3y+1} = 3 \cdot 2^{a+2y} - 2^{2y+2} \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

Решение.

Пусть $u = 2^{2x \cdot y}$, $v = 2^{x+y}$, тогда $2^{4x} = 2^{4x+2y-2y} = u^2 \cdot 2^{2y}$ и система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} v - u = 1 - 2^a, \\ u^2 \cdot 2^{2y} - 2 \cdot v \cdot 2^{2y} = 3 \cdot 2^a \cdot 2^{2y} - 4 \cdot 2^{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v - u = 1 - 2^a, \\ u^2 - 2v = 3 \cdot 2^a - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 - 2u + (2 - 2^a) = 0, \\ u > 0, \end{cases} \quad u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2^a - 1} \quad \text{при } a \geq 0.$$

Система уравнений будет иметь единственное решение в следующих случаях:

- 1) $0 < u_1 = u_2$, $2^a - 1 = 0$, $a = 0$;
- 2) $u_1 \leq 0 < u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2^a - 1} \leq 0, \\ 1 + \sqrt{2^a - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2^a - 1} \geq 1 \Leftrightarrow 2^a \geq 2$, $a \geq 1$, $u = 1 + \sqrt{2^a - 1}$.

Так как необходимо $v = u + 1 - 2^a > 0$, то

$$\begin{cases} 2 + \sqrt{2^a - 1} - 2^a > 0, \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2^a - 1} > 2^a - 2, \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a - 1 > (2^a)^2 - 4 \cdot 2^a + 4, \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^a)^2 - 5 \cdot 2^a + 5 < 0, \\ a \geq 1, \end{cases}$$

$D = 25 - 20 = 5$. Пусть $t = 2^a > 0$, тогда

$$t^2 - 5t + 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{5}}{2} < t < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \quad 2^{\log_2 \frac{5 - \sqrt{5}}{2}} < 2^a < 2^{\log_2 \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow \log_2 \frac{5 - \sqrt{5}}{2} < a < \log_2 \frac{5 + \sqrt{5}}{2}. \quad \text{Учитывая, что } a \geq 1,$$

$$\text{имеем } 1 \leq a < \log_2 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Ответ: $a = 0$, $1 \leq a < \log_2 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)$

ТЕМА: НЕРАВЕНСТВА

2.302. Доказать, что для всех действительных чисел a, b ($ab > 0$) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Решение.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство, а значит и исходное истинны.

QED.

2.303. Показать, что для неотрицательных действительных чисел a, b $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Решение.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство, а значит и исходное истинны.

QED.

2.304. Доказать, что $|a + b| \leq |a| + |b|$, $|a - b| \geq |a| - |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение.

Очевидно, что $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$. Складывая эти неравенства, имеем: $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$.

Так как $a = (a - b) + b$, то $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a - b| \geq |a| - |b|$.

QED.

2.305. Доказать, что для $a > 0, b > 0$ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a + b)^2$.

Решение.

Пусть $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \sqrt{ab} > 0$, тогда (см. 2.303)

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4} \geq \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a+b)^2.$$

QED.

2.306. Доказать, что при $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ $\frac{a+b+c+d}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

Решение.

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \frac{\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

QED.

2.307. Показать, что для всех действительных чисел a, b, c, d $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

Решение.

$$(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2; (c^2 - d^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow c^4 - 2c^2d^2 + d^4 \geq 0 \Leftrightarrow c^4 + d^4 \geq 2c^2d^2.$$

Складывая последние неравенства, получим $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2a^2b^2 + 2c^2d^2 \geq 4\sqrt{a^2b^2c^2d^2} \geq 4abcd$. так как

$$\sqrt{a^2b^2c^2d^2} = |abcd|.$$

QED.

2.308. Доказать, что при $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Решение.

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{b^4 + c^4}{2} + \frac{c^4 + a^4}{2} \geq \sqrt{a^4 b^4} + \sqrt{b^4 c^4} + \sqrt{c^4 a^4} = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 = \\ &= a^2 \frac{b^2 + c^2}{2} + b^2 \frac{c^2 + a^2}{2} + c^2 \frac{a^2 + b^2}{2} \geq a^2 \sqrt{b^2 c^2} + b^2 \sqrt{c^2 a^2} + c^2 \sqrt{a^2 b^2} = abc(a + b + c). \end{aligned}$$

QED.

2.309. Показать, что для любых действительных a, b $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$

Решение.

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Так как обе части последнего неравенства неотрицательны, то, возведя его в квадрат, получим $\frac{(a^2 + b^2)^2}{4} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

С другой стороны, $\frac{a^4 + b^4}{2} - \frac{(a^2 + b^2)^2}{4} = \frac{1}{4}(2a^4 + 2b^4 - a^4 - b^4 - 2a^2 b^2) = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)^2 \geq 0$.

Таким образом, $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{4} \geq \frac{(a+b)^4}{2}$ и исходное неравенство доказано.

QED.

2.310. Доказать, что для $a \geq 0, b \geq 0$ $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{4a^3 + 4b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)}{8} \geq 0 \Leftrightarrow 3a^3 + 3b^3 - 3ab(a+b) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Так как $a \geq 0, b \geq 0$, то неравенство справедливо.

QED.

2.311. Показать, что при $a > 0, b > 0, c > 0$ $\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq 8$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) &\geq 8 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq 8 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + 1 \geq 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 + 2 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 + 2 + \left(\sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 + 2 \geq 6 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство истинно.

QED.

2.312. Доказать, что при $ab > 0$ $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Решение.

Пусть $c = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, тогда $c^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2$ и неравенство принимает вид $c^2 - 2 \geq c \Leftrightarrow c^2 - c - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c \leq -1, \\ c \geq 2. \end{cases}$

Но $c \geq 2$, следовательно, исходное неравенство истинно.

QED.

2.313. Показать, что для $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Решение.

Рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz &\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0 \Leftrightarrow (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = \\ &= (x+y+z) \left[\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 \right] \geq 0 \Leftrightarrow x+y+z \geq 0. \end{aligned}$$

Если обозначить $x = \sqrt[3]{a} \geq 0, y = \sqrt[3]{b} \geq 0, z = \sqrt[3]{c} \geq 0$, то $x+y+z \geq 0$, следовательно, $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, и исходное неравенство истинно.

QED.

2.314. Если a, b, c — положительные числа и $a+b+c=1$, то

$$1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9;$$

$$2) \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Решение.

1) Используя результат примера 2.313, получаем: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$.

Перемножая эти неравенства, получаем: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$, так как $a+b+c=1$.

$$\begin{aligned} 2) \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) &= \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc}\right) = 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{abc} = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{a+b+c}{abc} + \frac{1}{abc} \geq 1 + 9 + \frac{2}{abc} \geq 10 + \frac{2 \cdot 3^3}{(a+b+c)^3} = 64, \end{aligned}$$

так как $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{a+b+c}$.

QED.

2.315. Доказать, что если $a + b = 1$, то $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

Решение.

Если $a < 0$ (или $b < 0$), то $b = 1 - a > 1$ ($a > 1$) и неравенство очевидно.

Для $a > 0, b > 0$ (используем результат примера 2.303) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. (Если $a = 1$ или $b = 1$, то неравенство истинно.)

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1 - 2ab, \quad a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (1 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 \geq \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}. \quad \text{QED.}$$

2.316. Показать, что для $ab \neq 0$ $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 4 \geq 0$.

Решение.

Пусть $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, тогда получаем неравенство $t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1, \\ t \geq 2. \end{cases}$ Рассмотрим два случая:

1) $ab > 0$, тогда, используя результат примера 2.302, получаем $t \geq 2$;

2) $ab < 0$, тогда $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} < 0$ и $t < 1$. QED.

2.317. Показать, что $\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} > 2$.

Решение.

Учитывая, что $3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$, получаем неравенство:

$$\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}})^2 - 2\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} + 1}{\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} - 1)^2}{\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}} > 0.$$

Последнее неравенство, а значит и исходное истинны. QED.

2.318. Доказать, что для любого натурального n $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

Решение.

Складывая $(n-1)$ очевидных неравенств $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$, ..., $\frac{1}{n+n-1} > \frac{1}{2n}$ и равенство $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$, получаем

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \quad \text{QED.}$$

2.319. Показать, что для любого натурального n $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{3}$.

Решение.

Из условия имеем:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} < 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

QED.

2.320. Доказать, что для любого натурального n $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$.

Решение.

Имеем ряд очевидных неравенств: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

Складывая эти неравенства, получим: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. QED.

2.321. Показать, что для любого натурального n $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение.

Пусть $x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}} = \frac{1}{x(2n+1)} = \frac{1}{x \cdot 2n} < \frac{1}{xn}$, $x > 0$.

Таким образом, имеем: $x < \frac{1}{xn} \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{n} \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $x > 0$.

QED.

2.322. Доказать, что для любых действительных x, y $x^2 + 2y^2 + 2xy - 3y + 7 > 0$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $x^2 + 2yx + (2y^2 - 3y + 7) > 0$, рассмотрим его как квадратное относительно x . Тогда оно будет истинно для всех x , если $\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 3y + 7) < 0$ для всех y .

$$-y^2 + 3y - 7 < 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 7 > 0.$$

Последнее неравенство истинно, так как $D = 9 - 28 < 0$.

Таким образом, исходное неравенство истинно для всех x, y .

QED.

2.323. Показать, что для любого действительного x $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$.

Решение.

Рассмотрим следующих три случая:

- 1) $x \leq 0, -x^5 - x \geq 0$ и $(x^8 + x^2 + 1) + (-x^5 - x) > 0$;
- 2) $0 < x < 1, x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^8 + (x^2 - x^5) + (1 - x) = x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$;
- 3) $x \geq 1, x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0$.

Во всех трех случаях неравенство доказано.

QED.

2.324. Доказать, что для любого натурального $n > 1$ $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$.

Решение.

Запишем сумму в виде: $S = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \frac{1}{2^{n-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n}$.

Если в каждой скобке заменить каждое из слагаемых наименьшим из них, то получим $S > \frac{n}{2}$.

Далее, если сгруппировать слагаемые суммы в виде $S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}\right)$,

а затем в каждой скобке заменить каждое из слагаемых наибольшим из них, то получим $S < n$.

QED.

2.325. Доказать, что $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Решение.

Пусть $q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$. Рассмотрим два случая:

- 1) $\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$, следовательно $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \dots < \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$.

Перемножая выписанные неравенства, получим:

$$q < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{100}{101} \Rightarrow q^2 < q \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{100}{101}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{100}{101}\right) = \frac{1}{101}.$$

Так как $q^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$, то $q < \frac{1}{10}$.

- 2) $n^2 - 1 < n^2 \Leftrightarrow (n-1)(n+1) < n^2 \Leftrightarrow n^2 - 1 < n^2 \Leftrightarrow (n-1)(n+1) < n^2 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}$ при $n \neq 1$, следовательно,

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{100} > \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{1}{100}.$$

Таким образом, имеем: $q^2 > \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{98} \cdot \frac{1}{100}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{1}{100}\right) \Rightarrow q^2 > \frac{1}{200} > \frac{1}{225}$, $q > \frac{1}{15}$.

Окончательно $\frac{1}{15} < q < \frac{1}{10}$.

QED.

Решить неравенства (2.326 – 2.381).

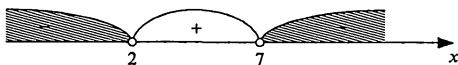
2.326. $\frac{5}{x-2} < 1$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 2$.

$$\frac{5}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{7-x}{x-2} < 0.$$

Методом интервалов получаем: $x \in (-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$.



Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$.

2.327. $\frac{1}{3-x} + \frac{6}{x+3} < 1$.

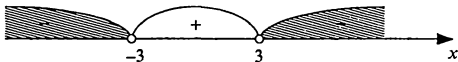
Решение.

ОДЗ: $|x| \neq 3$.

$$\frac{1}{3-x} + \frac{6}{x+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+3+18-6x}{(3-x)(x+3)} - \frac{9-x^2}{(3-x)(3+x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+12}{(3-x)(x+3)} < 0.$$

Так как $x^2 - 5x + 12 > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то полученное неравенство равносильно неравенству $(3-x)(x+3) < 0$.

Методом интервалов находим: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

2.328. $\frac{x^2-x-6}{x^2+6x} \geq 0$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq -6, 0$.

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+6x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x(x+6)} \geq 0.$$

Методом интервалов находим: $x \in (-\infty; -6) \cup [-2; 0) \cup [3; +\infty)$.



Ответ: $x \in (-\infty; -6) \cup [-2; 0) \cup [3; +\infty)$.

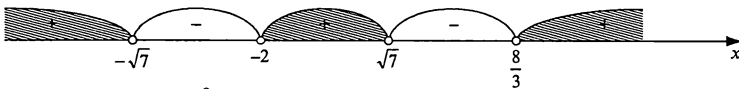
2.329. $\frac{5-2x}{3x^2-2x-16} < 1$.

Решение.

ОДЗ: $3x^2 - 2x - 16 \neq 0 \Leftrightarrow x_1 \neq -2, x_2 \neq \frac{8}{3}$.

$$\frac{5-2x}{3x^2-2x-16} < 1 \Leftrightarrow \frac{5-2x-3x^2+2x+16}{3x^2-2x-16} < 0 \Leftrightarrow \frac{21-3x^2}{3x^2-2x-16} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})}{3(x-\frac{8}{3})(x+2)} > 0.$$

Методом интервалов получаем: $x \in (-\infty; -\sqrt{7}) \cup (-2; \sqrt{7}) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.



Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt{7}) \cup (-2; \sqrt{7}) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.

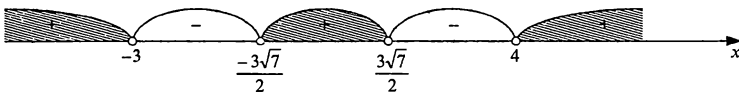
2.330. $\frac{15-4x}{x^2-x-12} < 4$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq -3, 4$.

$$\frac{15-4x}{x^2-x-12} < 4 \Leftrightarrow \frac{15-4x-4(x^2-x-12)}{(x-4)(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^2+63}{(x-4)(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-\frac{63}{4}}{(x-4)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\frac{3}{2}\sqrt{7})(x+\frac{3}{2}\sqrt{7})}{(x-4)(x+3)} > 0.$$

Методом интервалов находим: $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{3\sqrt{7}}{2}; \frac{3\sqrt{7}}{2}) \cup (4; +\infty)$.



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{3\sqrt{7}}{2}; \frac{3\sqrt{7}}{2}) \cup (4; +\infty)$.

2.331. $\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 \geq 0$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 3, 4$.

$$\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10(x-3)}{(x-3)(x-4)} + \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{20+10x-30+x^2-7x+12}{(x-3)(x-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+2}{(x-3)(x-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0.$$

Методом интервалов получаем: $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 3) \cup (4; +\infty)$.



Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 3) \cup (4; +\infty)$.

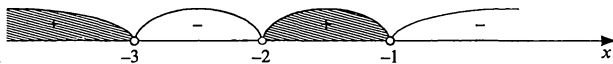
2.332. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 1$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq -3, -2, -1$.

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2-5x+6)-(x+1)(x^2+5x+6)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^3-5x^2+6x-x^2+5x-6-x^3-5x^2-6x-x^2-5x-6}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-12(x^2+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 0. \end{aligned}$$

Методом интервалов находим: $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1)$.



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1)$.

2.333. $(x^2+3x)(2x+3)-16 \frac{2x+3}{x^2+3x} \geq 0$.

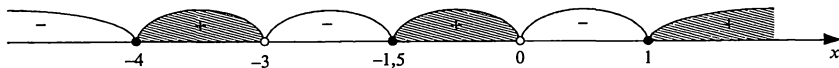
Решение.

ОДЗ: $x \neq -3, 0$.

$$\begin{aligned} (x^2+3x)(2x+3)-16 \frac{2x+3}{x^2+3x} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x^2+3x} ((x^2+3x)^2-16) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1,5)(x^2+3x+4)(x^2+3x-4)}{x(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1,5)(x+4)(x-1)}{x(x+3)} \geq 0, \end{aligned}$$

так как $x^2+3x+4 > 0$.

Методом интервалов имеем: $x \in [-4; -3) \cup [-1,5; 0) \cup [1; +\infty)$.



Ответ: $x \in [-4; -3) \cup [-1,5; 0) \cup [1; +\infty)$.

2.334. $x^3+5x^2+3x-9 \leq 0$.

Решение.

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 6x^2 + 3x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + 3(2x^2 + x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + 3 \cdot 2(x-1) \left(x + \frac{3}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 6x + 9) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)^2 \leq 0 \Rightarrow x_1 = -3 \text{ или } x-1 \leq 0, x \leq 1.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1]$.

2.335. $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5$.

Решение.

Пусть $y = x^2 + 3x + 1$, тогда из условия имеем: $y(y-4) \geq 5 \Leftrightarrow y^2 - 4y - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (y-5)(y+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -1, \\ y \geq 5. \end{cases}$

Получаем два случая:

1) $y \leq -1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 \leq -1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1$;

2) $y \geq 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 \geq 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) \geq 0$;

$$x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty).$$

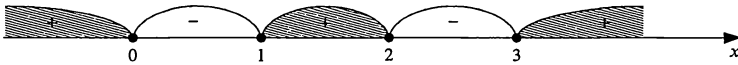
Ответ: $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$.

2.336. $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \geq 0$.

Решение.

$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - x^3 - (5x^3 - 5x^2) + 6x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x^3(x-1) - 5x^2(x-1) + 6x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2 - 5x + 6) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0.$$

Методом интервалов находим: $x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty)$.*Ответ:* $x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty)$.

2.337. $\frac{|x-3|}{x-3} \leq 0$.

*Решение.*ОДЗ: $x \neq 3$.

Рассмотрим два случая:

1) $x < 3$, $\frac{|x-3|}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-3)}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 0$ (истинно) $\Rightarrow x \in (-\infty; 3)$;

$$2) \ x > 3, \frac{|x-3|}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (ложно)}, \emptyset.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 3)$.

$$2.338. \left| \frac{3}{x-5} \right| \geq 1.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 5$.

$$\left| \frac{3}{x-5} \right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{|x-5|} \geq 1 \Leftrightarrow |x-5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-5 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8 \text{ при } x \neq 5.$$

Ответ: $x \in [2; 5) \cup (5; 8]$.

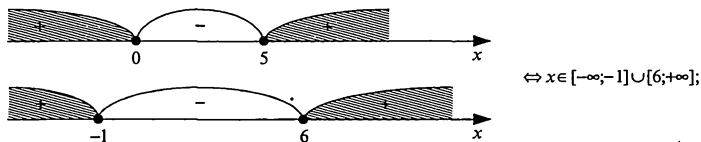
$$2.339. |x^2 - 5x| \geq 6.$$

Решение.

Рассмотрим два случая:

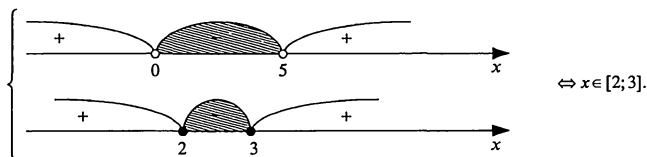
$$1) \begin{cases} x^2 - 5x \geq 0, \\ x^2 - 5x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-5) \geq 0, \\ x^2 - 5x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-5) \geq 0, \\ (x-6)(x+1) \geq 0. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем:



$$2) \begin{cases} x^2 - 5x < 0, \\ -(x^2 - 5x) \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-5) < 0, \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-5) < 0, \\ (x-2)(x-3) \leq 0. \end{cases}$$

Методом интервалов находим:



Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3] \cup [6; +\infty)$.

2.340. $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 3$.

Рассмотрим два случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad x \geq 0, \quad \frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 12}{x - 3} - \frac{2x(x - 3)}{x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 12 - 2x^2 + 6x}{x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 5x - 12}{x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 12}{x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow x < 3, \end{aligned}$$

так как $x^2 - 5x + 12 > 0$.

Таким образом, $x \in [0; 3)$.

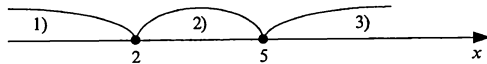
$$\begin{aligned} 2) \quad x < 0, \quad \frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} - \frac{2x(x - 3)}{x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 12 - 2x^2 + 6x}{x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 7x - 12}{x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 3)(x - 4)}{x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow x - 4 \leq 0, \end{aligned}$$

истинно при $x < 0$. Отсюда имеем $x \in (-\infty; 0)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 3)$.

2.341. $|x - 2| - |5 - x| \leq 0$.

Решение.



Рассмотрим следующих три случая:

1) $x \in (-\infty; 2)$, $|x - 2| - |5 - x| \leq 0 \Leftrightarrow -x + 2 - 5 + x \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq 0$ — истинно, следовательно, $x \in (-\infty; 2)$;

2) $x \in [2; 5]$, $|x - 2| - |5 - x| \leq 0 \Leftrightarrow x - 2 - 5 + x \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 7$, отсюда $x \in [2; 3,5]$;

3) $x \in [5; +\infty)$, $|x - 2| - |5 - x| \leq 0 \Leftrightarrow x - 2 + 5 - x \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq 0$ — ложно, \emptyset .

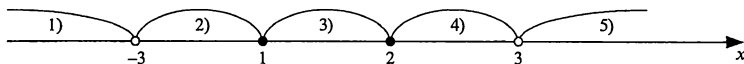
Ответ: $x \in (-\infty; 3,5]$.

2.342. $\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} \right| \geq 1$.

Решение.

ОДЗ: $|x| \neq 3$.

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} \right| \geq 1 \Leftrightarrow |x^2 - 3x + 2| \geq |x^2 - 9| \Leftrightarrow |(x-1)(x-2)| \geq |(x-3)(x+3)|.$$



Рассмотрим следующих пять случаев:

$$1) \ x \in (-\infty; -3), x^2 - 3x + 2 \geq x^2 - 9 \Leftrightarrow 3x \leq 11, x \in (-\infty; -3);$$

$$2) \ x \in (-3; 1), x^2 - 3x + 2 \geq 9 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 7 \geq 0, D = 9 + 56 = 65, x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{4}, x \in \left(-3; \frac{3 - \sqrt{65}}{4} \right];$$

$$3) \ x \in [1; 2), -(x^2 - 3x + 2) \geq -(x^2 - 9) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq x^2 - 9 \Leftrightarrow 3x \geq 11, x \geq \frac{11}{3}, \emptyset;$$

$$4) \ x \in [2; 3), x^2 - 3x + 2 \geq 9 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 7 \geq 0, x_2 = \frac{3 + \sqrt{65}}{4}, x \in \left[\frac{3 + \sqrt{65}}{4}; 3 \right);$$

$$5) \ x \in (3; +\infty), x^2 - 3x + 2 \geq x^2 - 9 \Leftrightarrow 3x \leq 11, x \in \left(3; \frac{11}{3} \right].$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -3) \cup \left(-3; \frac{3 - \sqrt{65}}{4} \right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{65}}{4}; 3 \right) \cup \left(3; \frac{11}{3} \right].$$

$$2.343. \frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x \neq 2, 3.$$

Раскрывая модуль, получаем два случая:

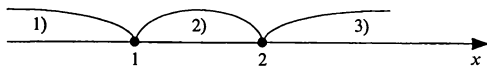
$$1) \ x < 3, \frac{-(x-3)}{(x-2)(x-3)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{3}{2}}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}; 2 \right);$$

$$2) \ x > 3, \frac{x-3}{(x-2)(x-3)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{2(x-2)}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-2x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{5}{2}}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(2; 2.5 \right] \text{ — не подходит, так как } x > 3.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[\frac{3}{2}; 2 \right)$$

$$2.344. |x-1| + |2-x| \leq x+5.$$

Решение.



Рассмотрим следующих три случая:

$$1) \ x < 1, -(x-1) + (2-x) \leq x+5 \Leftrightarrow -x+1+2-x \leq x+5 \Leftrightarrow -3x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}; \ x \in \left[-\frac{2}{3}; 1\right);$$

$$2) \ 1 \leq x < 2, x-1+2-x \leq x+5 \Leftrightarrow x \geq -4, \ x \in [1; 2);$$

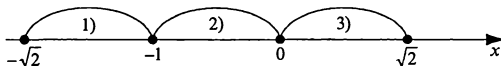
$$3) \ x \geq 2, x-1+x-2 \leq x+5 \Leftrightarrow x \leq 8, \ x \in [2; 8].$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{2}{3}; 8\right].$$

$$2.345. \frac{|x+1| - |x|}{\sqrt{2-x^2}} \geq 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 2-x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}, \ x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$



Рассмотрим следующих три случая:

$$1) \ x \in (-\sqrt{2}; -1), \frac{|x+1| - |x|}{\sqrt{2-x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow -x-1+x \geq 0 \Leftrightarrow -1 \geq 0, \ \emptyset;$$

$$2) \ x \in [-1; 0), \frac{|x+1| - |x|}{\sqrt{2-x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x+1+x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1, \ x \geq -\frac{1}{2}, \ x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right);$$

$$3) \ x \in [0; \sqrt{2}), \frac{|x+1| - |x|}{\sqrt{2-x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x+1-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 0 \text{ — истинно, следовательно } x \in [0; \sqrt{2}).$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right).$$

$$2.346. \sqrt{x+5} > x.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x \geq -5.$$

Рассмотрим два случая:

1) $x \in [-5; 0)$, неравенство $\sqrt{x+5} > x$ — истинно, следовательно, $x \in [-5; 0)$;

2) $x \in [0; +\infty)$, возводим обе части неравенства в квадрат: $x+5 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 5 < 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$,

следовательно, $x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Ответ: $x \in \left[-5; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

2.347. $\sqrt{x^2 - 3x} \geq x - 2$.

Решение.

ОДЗ: $x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Рассмотрим два случая:

1) $x \in (-\infty; 0]$, неравенство $\sqrt{x^2 - 3x} \geq x - 2$ — истинно, следовательно, $x \in (-\infty; 0]$;

2) $x \in [3; +\infty)$, возводим обе части неравенства в квадрат: $x^2 - 3x \geq x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x \geq 4$, $x \in [4; +\infty)$.

Ответ: $x \in [4; +\infty)$.

2.348. $\sqrt{x+6} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+6 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ 2x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.

Возводим обе части неравенства в квадрат: $x+6 \leq x+1+2x-5+2\sqrt{(x+1)(2x-5)} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2x-5)} \geq 5-x$.

При $x \geq 5$ полученное неравенство истинно. Предположим, что $x \in \left[\frac{5}{2}; 5\right)$. Возводим последнее неравенство в квадрат.

Тогда имеем $2x^2 - 3x - 5 \geq 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 30 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+10) \geq 0 \Rightarrow x \in [3; 5)$.

Ответ: $x \in [3; +\infty)$.

2.349. $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$.

Решение.

ОДЗ: $3x^2 + 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3\left(x+1\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) \geq 0$, $x \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} > 1 &\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+5x+7} > 1+\sqrt{3x^2+5x+2} \Leftrightarrow 3x^2+5x+7 > 1+2\sqrt{3x^2+5x+2}+3x^2+5x+2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+5x+2} < 2 \Leftrightarrow 3x^2+5x+2 < 4 \Leftrightarrow 3x^2+5x-2 < 0 \Leftrightarrow 3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right) < 0 \Rightarrow x \in (-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Ответ: $x \in (-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

2.350. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \leq 1,5$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq 1$.

Пусть $y = \sqrt{x-1} \geq 0$, тогда $x-1 = y^2$, $x = y^2 + 1$, и исходное неравенство принимает вид:

$$\sqrt{y^2+1+2y} + \sqrt{y^2+1-2y} \leq 1,5 \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y-1)^2} \leq 1,5 \Leftrightarrow |y+1| + |y-1| \leq 1,5 \Leftrightarrow y+1 + |y-1| \leq 1,5 \Leftrightarrow |y-1| \leq 0,5 - y.$$

Рассмотрим два случая:

1) $y \geq 1$, $y-1 \leq 0,5-y \Leftrightarrow 2y \leq 1,5$, $y \leq 0,75$, \emptyset ;

2) $y < 1$, $1-y \leq 0,5-y \Leftrightarrow 1 \leq 0,5$ — ложно.

Ответ: нет решений.

2.351. $2 - \sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{4-x^2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$.

$$2 - \sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 4 - 4\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 \leq 4 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{4}, \text{ так как } \sqrt{1-x^2} < 2 \text{ при } x \in [-1; 1].$$

Далее, $\sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1-x^2 \geq \frac{1}{16} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{15}{16} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{15}}{4}$, $x \in \left[-\frac{\sqrt{15}}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right]$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{\sqrt{15}}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right]$.

2.352. $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$.

Решение.

Пусть $y = \frac{1}{x}$, тогда исходное неравенство принимает вид: $\sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} > y - \frac{1}{2} \Rightarrow |y| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

$$1) \ y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ тогда неравенство } \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} > y - \frac{1}{2} \text{ — истинно, т.е. } y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{\sqrt{3}}, \ x \in [-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0);$$

$$2) \ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ возводим обе части неравенства в квадрат. Имеем: } y^2 - \frac{3}{4} > y^2 - y + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup (0; 1)$$

$$2.353. \sqrt{x + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{1}{x^2}} > \frac{2}{x}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x - \frac{1}{x^2} \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Возведем обе части исходного неравенства в квадрат:

$$x + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x - \frac{1}{x^2}\right)} + x - \frac{1}{x^2} > \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - \frac{1}{x^4}} > \frac{2}{x^2} - x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^6 - 1}}{x^2} > \frac{2 - x^3}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^6 - 1} > 2 - x^3.$$

При $x \geq \sqrt[3]{2}$ полученное неравенство верно. Предположим, что $1 \leq x \leq \sqrt[3]{2}$. Возведя обе части неравенства в квадрат,

$$\text{получим: } x^6 - 1 > 4 - 4x^3 + x^6 \Leftrightarrow 4x^3 > 5 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{\frac{5}{4}}, \text{ т.е. } x \in \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; \sqrt[3]{2}\right).$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; +\infty\right).$$

$$2.353. \sqrt{4 - 4x^3 + x^6} \leq x - \sqrt[3]{2}.$$

Решение.

$$\text{Перепишем данное неравенство в виде: } \sqrt{(x^3 - 2)^2} \leq x - \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x^3 - 2 \leq x - \sqrt[3]{2}.$$

Из последнего неравенства следует, что $x \geq \sqrt[3]{2}$, т.е. $x^3 - 2 \geq 0$.

$$\text{Таким образом, имеем } x^3 - 2 \leq x - \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) - (x - \sqrt[3]{2}) \leq 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4} - 1) \leq 0.$$

Квадратный трехчлен $x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4} - 1 > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, так как $D = \sqrt[3]{4} - 4(\sqrt[3]{4} - 1) = 4 - 3\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{108} < 0$.

$$\text{Получили, что } x - \sqrt[3]{2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[3]{2}, \\ x \geq \sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}.$$

$$\text{Ответ: } x = \sqrt[3]{2}.$$

2.355. $5^{\frac{1}{x}} < \sqrt{5}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

$$5^{\frac{1}{x}} < \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{x}} < 5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2x} > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

2.356. $(0,027)^{\frac{1}{x-2}} \geq 0,000729$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 2$.

Из условия имеем:

$$(0,3)^{\frac{3}{x-2}} \geq (0,3)^6 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x+4}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(5-2x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2) \times (x-2,5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq 2,5. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup [2,5; +\infty)$.

2.357. $3^x + 4 \cdot 3^{-x} - 5 \geq 0$.

Решение.

Пусть $y = 3^x > 0$, тогда неравенство принимает вид: $y + \frac{4}{y} - 5 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y \leq 1, \\ y \geq 4. \end{cases}$

Рассмотрим следующих два случая:

1) $0 < y \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 3^x \leq 3^0 \Leftrightarrow x \leq 0$;

2) $y \geq 4 \Leftrightarrow 3^x \geq 3^{\log_3 4} \Leftrightarrow x \geq \log_3 4$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [\log_3 4; +\infty)$.

2.358. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x - 5$.

Решение.

Пусть $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x > 0$, тогда неравенство принимает вид:

$$y^2 - 6y + 5 < 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < y < 5 \Leftrightarrow 1 < 2^{\frac{1}{2}x} < 2^{\log_2 5} \Leftrightarrow 0 < -\frac{1}{2}x < \log_2 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\log_2 5 < x < 0, x \in (-\log_2 25; 0).$$

Ответ: $x \in (-\log_2 25; 0)$.

2.359. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x \leq 0$.

Решение.

Из условия имеем: $2^{2x} - 2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{2x} \leq 0$. Разделив обе части неравенства на $5^{2x} > 0$, имеем: $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 \leq 0$.

Если $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$, то получаем неравенство: $t^2 - t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 2 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{2}{5}\right)^x \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2 \frac{x}{5}} \Leftrightarrow x \geq \log_2 \frac{2}{5}$.

Ответ: $x \in [\log_2 2; +\infty)$.

2.360. $\frac{1}{3^x + 1} + \frac{2}{3^x + 3} < \frac{3}{3^x + 2}$.

Решение.

Пусть $y = 3^x > 0$, тогда исходное неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{y+1} + \frac{2}{y+3} < \frac{3}{y+2} \Leftrightarrow \frac{(y+2)(y+3) + 2(y+1)(y+2) - 3(y+1)(y+3)}{(y+1)(y+2)(y+3)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 5y + 6 + 2y^2 + 6y + 4 - 3y^2 - 12y - 9 < 0 \Leftrightarrow 1 - y < 0 \Leftrightarrow y > 1,$$

так как $y > 0$, $3^x > 3^0 \Leftrightarrow x > 0$.

Ответ: $x \in (0; +\infty)$.

2.361. $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} < 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

Разделив обе части исходного неравенства на $9^{\frac{1}{x}}$, получим: $9 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 5 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 4 < 0$.

Пусть $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 0$, тогда имеем:

$$9y^2 + 5y - 4 < 0 \Leftrightarrow 9 \left(y - \frac{4}{9}\right)(y+1) < 0 \Leftrightarrow 0 < y < \frac{4}{9} \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} > 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \left(x + \frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

2.362. $\log_{5/12} (3x - 1) < 1$.

Решение.

ОДЗ: $3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x-1 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

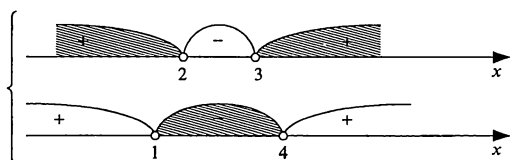
Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

2.363. $\log_{0.5}(x^2 - 5x + 6) > -1$.

Решение.

Исходное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) > 0, \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) > 0, \\ (x-1)(x-4) < 0. \end{cases}$$



$$\Rightarrow x \in (1; 2) \cup (3; 4).$$

Ответ: $x \in (1; 2) \cup (3; 4)$.

2.364. $\log_{0.5}(4-x) < \log_{0.5} 2 - \log_{0.5}(x-1)$.

Решение.

ОДЗ: $1 < x < 4$.

$$\begin{aligned} \log_{0.5}(4-x) < \log_{0.5} 2 - \log_{0.5}(x-1) &\Leftrightarrow \log_{0.5}(4-x) + \log_{0.5}(x-1) < \log_{0.5} 2 \Leftrightarrow \log_{0.5}(4-x)(x-1) < \log_{0.5} 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4-x)(x-1) > 2 \Leftrightarrow 4x - x^2 + x - 4 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in (2; 3)$.

2.365. $1 + \log_2(x-2) \geq \log_2(x^2 - 3x + 2)$.

Решение.

ОДЗ: $x > 2$.

$$\begin{aligned} 1 + \log_2(x-2) &\geq \log_2(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow \log_2 2 + \log_2(x-2) \geq \log_2(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow \log_2 2(x-2) \geq \log_2(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x - 4 \geq x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \leq 0, x \in (2; 3]. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in (2; 3]$.

2.366. $\log_{0.1}^2 x + \log_{0.1} x - 2 \leq 0$.

*Решение.*ОДЗ: $x > 0$.Пусть $y = \log_{0,1} x$, тогда получаем неравенство:

$$y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \log_{0,1} x \leq 1 \Leftrightarrow \log_{0,1} (0,1)^{-2} \leq \log_{0,1} x \leq \log_{0,1} 0,1 \Leftrightarrow 0,1 \leq x \leq 100.$$

Ответ: $x \in [0,1; 100]$.

$$2.367. \log_{\sqrt{2}} \frac{7-3x}{x+2} - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x+2) > \log_{\frac{1}{2}} 4.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 7-3x > 0, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < \frac{7}{3}.$$

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{7-3x}{x+2} - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x+2) > \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}} (7-3x) - \log_{\sqrt{2}} (x+2) - \frac{\log_{\sqrt{2}} (x+2)}{\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^{-1}} > -2 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}} (7-3x) -$$

$$-\log_{\sqrt{2}} (x+2) + \log_{\sqrt{2}} (x+2) > \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^{-2} \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}} (7-3x) > \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow 7-3x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x < \frac{13}{2} \Leftrightarrow x < \frac{13}{6}.$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in \left(-2; \frac{13}{6}\right)$.

$$\text{Ответ: } x \in \left(-2; \frac{13}{6}\right).$$

$$2.368. \ln^4 x - 11 \ln^2 x + 28 > 0.$$

*Решение.*ОДЗ: $x > 0$.

$$\text{Пусть } y = \ln^2 x \geq 0, \text{ тогда получаем неравенство } y^2 - 11y + 28 > 0 \Leftrightarrow (y-4)(y-7) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y < 4, \\ y > 7. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) 0 \leq y < 4 \Leftrightarrow 0 \leq \ln^2 x < 4 \Leftrightarrow |\ln x| < 2 \Leftrightarrow -2 < \ln x < 2 \Leftrightarrow \ln e^{-2} < \ln x < \ln e^2 \Leftrightarrow e^{-2} < x < e^2;$$

$$2) y > 7 \Leftrightarrow \ln^2 x > 7 \Leftrightarrow |\ln x| > \sqrt{7} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x > \sqrt{7}, \\ \ln x < -\sqrt{7}. \end{cases}$$

$$\text{а) } \ln x > \sqrt{7} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\sqrt{7}} \Leftrightarrow x > e^{\sqrt{7}};$$

$$\text{б) } \ln x < -\sqrt{7} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-\sqrt{7}} \Leftrightarrow x < e^{-\sqrt{7}}.$$

$$\text{Ответ: } x \in (0; e^{-\sqrt{7}}) \cup (e^{-2}; e^2) \cup (e^{\sqrt{7}}; +\infty).$$

$$2.369. 0,3^{\frac{6\log_2 x - 3}{\log_2 x}} \leq \sqrt[3]{0,027^{2\log_2 x - 1}}.$$

Решение.

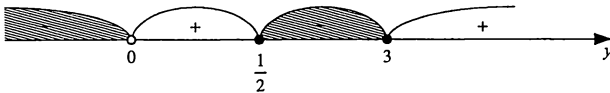
ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Перепишем неравенство в виде $0,3^{\frac{6\log_2 x - 3}{\log_2 x}} \leq 0,3^{2\log_2 x - 1} \Leftrightarrow \frac{6\log_2 x - 3}{\log_2 x} \geq 2\log_2 x - 1$.

Пусть $y = \log_2 x$, тогда имеем:

$$\frac{6y-3}{y} \geq 2y-1 \Leftrightarrow \frac{6y-3-2y^2+y}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2y^2-7y+3}{y} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-3)}{y} \leq 0 \Leftrightarrow \left(y-\frac{1}{2}\right)(y-3)y \leq 0.$$

Методом интервалов находим $\begin{cases} y < 0, \\ \frac{1}{2} \leq y \leq 3. \end{cases}$



$$a) \log_2 < 0 \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1;$$

$$b) \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq 3 \Leftrightarrow \log_2 2^{\frac{1}{2}} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^3 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq x \leq 8.$$

Ответ: $x \in (0; 1) \cup [\sqrt{2}; 8]$.

$$2.370. \sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} \leq 10.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Прологарифмируем левую и правую части неравенства по основанию 10:

$$\lg \left(x^{\lg \sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \lg 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \lg(x)^{\frac{1}{2}} \cdot \lg x \leq 1 \Leftrightarrow \lg^2 x \leq 4 \Leftrightarrow |\lg x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \lg x \leq 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lg 10^{-2} \leq \lg x \leq \lg 10^2 \Leftrightarrow 10^{-2} \leq x \leq 10^2.$$

Ответ: $x \in [10^{-2}; 10^2]$.

$$2.371. \left(\frac{x}{3} \right)^{\log_3 x - 2} > 9.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Прологарифмируем левую и правую части неравенства по основанию 3:

$$\log_3 \left(\frac{x}{3} \right)^{\log_3 x - 2} > \log_3 3^2 \Leftrightarrow (\log_3 x - 2) \log_3 \left(\frac{x}{3} \right) > 2 \Leftrightarrow (\log_3 x - 2)(\log_3 x - 3) > 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5 \log_3 x + 4 > 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 1, \\ \log_3 x > 4. \end{cases}$$

$$\text{а) } \log_3 x < 1 \Leftrightarrow \log_3 x < \log_3 3 \Leftrightarrow 0 < x < 3;$$

$$\text{б) } \log_3 x > 4 \Leftrightarrow \log_3 x > \log_3 3^4 \Leftrightarrow x > 81.$$

Ответ: $x \in (0; 3) \cup (81; +\infty)$.

$$2.372. \quad x^{0,5 \log_{0,2} x - 3} \leq 0,2^{3 - 2,5 \log_{0,2} x}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

Логарифмируя обе части неравенства по основанию 0,2, получим:

$$\log_{0,2} x^{0,5 \log_{0,2} x - 3} \geq \log_{0,2} 0,2^{3 - 2,5 \log_{0,2} x} \Rightarrow (0,5 \log_{0,2} x - 3) \log_{0,2} x \geq 3 - 2,5 \log_{0,2} x.$$

$$\text{Пусть } y = \log_{0,2} x, \text{ тогда имеем: } (0,5y - 3)y \geq 3 - 2,5y \Leftrightarrow (y - 6)y \geq 6 - 5y \Leftrightarrow y^2 - y - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (y + 2)(y - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -2, \\ y \geq 3. \end{cases}$$

$$\text{а) } y \leq -2 \Leftrightarrow \log_{0,2} x \leq \log_{0,2} (0,2)^2 \Leftrightarrow x \geq 25;$$

$$\text{б) } y \geq 3 \Leftrightarrow \log_{0,2} x \geq \log_{0,2} (0,2)^3 \Leftrightarrow 0 < x \leq 0,008.$$

Ответ: $x \in (0; 0,008] \cup [25; +\infty)$.

$$2.373. \quad 2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} \leq 2,5.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

Перепишем неравенство в виде

$$\left(2^{\log_{0,5} x} \right)^{\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} - 2,5 \leq 0 \Leftrightarrow \left(2^{\log_2 x^{-1}} \right)^{\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} - 2,5 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} \right)^{\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} - 2,5 \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^{\log_{0,5} x}} + x^{\log_{0,5} x} - 2,5 \leq 0.$$

Пусть $y = x^{\log_{0,5} x} > 0$, тогда имеем:

$$\frac{1}{y} + y - 2,5 \leq 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \left(y - \frac{1}{2} \right) (y - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 0,5 \leq x^{\log_{0,5} x} \leq 2.$$

Логарифмируя полученное двойное неравенство по основанию 2, получим:

$$\log_2 2^{-1} \leq \log_2 x^{\log_{0,5} x} \leq \log_2 2 \Leftrightarrow -1 \leq \log_{0,5} x \cdot \log_2 x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\log_2 x}{\log_2 0,5} \cdot \log_2 x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\log_2^2 x \leq 2 \Leftrightarrow \log_2^2 x \leq 1 \Leftrightarrow \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow \log_2 2^{-1} \leq \log_2 x \leq \log_2 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

2.374. $\log_{3x}(x^2 - 2x + 6) < 1$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq \frac{1}{3}$.

$$\log_{3x}(x^2 - 2x + 6) < 1 \Leftrightarrow \log_{3x}(x^2 - 2x + 6) < \log_{3x} 3x.$$

Рассмотрим два случая:

1) $0 < x < \frac{1}{3}$, $\log_{3x}(x^2 - 2x + 6) < \log_{3x} 3x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 6 > 3x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0$, $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$;

2) $x > \frac{1}{3}$, $\log_{3x}(x^2 - 2x + 6) < \log_{3x} 3x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 6 < 3x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (2; 3)$.

2.375. $\frac{1}{\log_5(x-3)} \geq \frac{1}{\log_5 \sqrt{x-1}}$.

Решение.

ОДЗ: $3 < x \neq 4$.

Рассмотрим два случая:

1) $3 < x < 4$, тогда $\log_5(x-3) < 0$, $\log_5 \sqrt{x-1} > 0$, и неравенство можно записать в виде:

$$\log_5 \sqrt{x-1} \leq \log_5(x-3) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq x-3 \Leftrightarrow x-1 \leq x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 5, \\ 3 < x < 4, \end{cases} \quad \emptyset;$$

2) $x > 4$, тогда $\log_5(x-3) > 0$, $\log_5 \sqrt{x-1} > 0$ и неравенство записывается в виде

$$\log_5 \sqrt{x-1} \geq \log_5(x-3) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq x-3 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ 2 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 5.$$

Ответ: $x \in (4; 5]$.

2.376. $\frac{\log_x(\sqrt{2x+1}-1)}{\log_x(\sqrt{2x+1}+11)} > \frac{1}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Рассмотрим два случая:

1) $0 < x < 1$, тогда $\log_x(\sqrt{2x+1}+1) < 0$ и исходное неравенство можно переписать в виде:

$$2\log_x(\sqrt{2x+1}-1) < \log_x(\sqrt{2x+1}+1) \Leftrightarrow \log_x(\sqrt{2x+1}-1)^2 < \log_x(\sqrt{2x+1}+1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1})^2 - 2\sqrt{2x+1} + 1 > \sqrt{2x+1} + 1.$$

Если $t = \sqrt{2x+1} > 0$, то получаем: $t^2 - 3t - 10 > 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-5) > 0 \Leftrightarrow t > 5 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} > 5 \Leftrightarrow 2x+1 > 25 \Leftrightarrow x > 12, \emptyset$;2) $x > 1$, тогда $\log_x(\sqrt{2x+1}+1) > 0$ и исходное неравенство записывается в виде:

$$2\log_x(\sqrt{2x+1}-1) < \log_x(\sqrt{2x+1}+1) \Leftrightarrow \log_x(\sqrt{2x+1}-1)^2 < \log_x(\sqrt{2x+1}+1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1})^2 - 2\sqrt{2x+1} + 1 > \sqrt{2x+1} + 1,$$

где $t = \sqrt{2x+1} > 0$, следовательно, $t > 5 \Leftrightarrow x > 12$.Ответ: $x \in (12; +\infty)$.2.377. $\log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1$.

Решение.

Рассмотрим два случая:

$$1) \quad 0 < x < 1, \begin{cases} \log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1, \\ \log_3(9^x - 6) > 0, \\ 9^x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x \log_3(9^x - 6) \geq \log_x x, \\ 9^x - 6 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(9^x - 6) \leq x, \\ 9^x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(9^x - 6) \leq \log_3 3^x, \\ 9^x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 3^x - 6 \leq 0, \\ 9^x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3^x - 3)(3^x + 2) \leq 0, \\ 3^{2x} > 3^{\log_3 7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \leq 3, \\ 2x > \log_3 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x > \frac{1}{2} \log_3 7 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 \sqrt{7} < x < 1;$$

$$2) \quad x > 1, \begin{cases} \log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1, \\ 9^x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(9^x - 6) \geq x, \\ 9^x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3(9^x - 6) \geq \log_3 3^x \Leftrightarrow 9^x - 3^x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3^x + 2)(3^x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow 3^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3^x \geq 3, x > 1.$$

Ответ: $x \in (\log_3 \sqrt{7}; 1) \cup (1; +\infty)$ 2.377. $0,4^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} \geq (6,25)^{-1}$.

Решение.

$$\text{Из условия имеем: } 0,4^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} \geq (0,4)^2 \Leftrightarrow \log_x \frac{8-12x}{x-6} \leq 2 \Leftrightarrow \log_x \frac{8-12x}{x-6} \leq \log_x x^2.$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \ 0 < x < 1, \begin{cases} \frac{8-12x}{x-6} > 0, \\ \frac{x-6}{8-12x} \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{2}{3}\right)(x-6) < 0, \\ (x^3-6x^2+12x-8)(x-6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} < x < 1, \\ (x-2)^3(x-6) \leq 0, \end{cases} \quad \emptyset;$$

$$2) \ x > 1, \begin{cases} \frac{8-12x}{x-6} > 0, \\ \frac{x-6}{8-12x} \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{2}{3}\right)(x-6) < 0, \\ (x-2)^3(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 6, \\ (x-2)(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2.$$

Ответ: $x \in (1; 2]$.

$$2.379. \ (0, 2)^{\log_2^2(-x)+3} \leq 5^{2\log_2 x^2}.$$

Решение.

ОДЗ: $x < 0$.

$$(0, 2)^{\log_2^2(-x)+3} \leq 5^{2\log_2 x^2} \Leftrightarrow (0, 2)^{\log_2^2(-x)+3} \leq (0, 2)^{-4\log_2 |x|} \Leftrightarrow \log_2^2(-x)+3 \geq -4\log_2(-x) \Leftrightarrow \log_2^2(-x)+4\log_2(-x)+3 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\log_2(-x)+1)(\log_2(-x)+3) \geq 0.$$

Получаем два случая:

$$1) \ \log_2(-x) \leq -3 \Leftrightarrow \log_2(-x) \leq \log_2 2^{-3} \Leftrightarrow -x \leq \frac{1}{8}, \ x \geq -\frac{1}{8}, \ x \in \left[-\frac{1}{8}; 0\right);$$

$$2) \ \log_2(-x) \geq -1 \Leftrightarrow \log_2(-x) \geq \log_2 2^{-1} \Leftrightarrow -x \geq \frac{1}{2}, \ x \leq -\frac{1}{2}, \ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{8}; 0\right).$$

$$2.380. \ \log_x^2 \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}.$$

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1, 3$.

Рассмотрим следующих три случая:

$$1) \ 0 < x < 1, \log_x^2 \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_x^2 \frac{2x}{|x-3|} \leq \log_x^2 x \Leftrightarrow \frac{2x}{3-x} \geq x \Leftrightarrow \frac{2}{3-x} \geq 1 \Leftrightarrow 3-x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1, \emptyset;$$

$$2) \ 1 < x < 3, \log_x^2 \frac{2x}{|x-3|} \leq \log_x^2 x \Leftrightarrow \frac{2x}{3-x} \leq x \Leftrightarrow 2 \leq 3-x \Leftrightarrow x \leq 1, \emptyset;$$

$$3) \ x > 3, \log_x^2 \frac{2x}{|x-3|} \leq \log_x^2 x \Leftrightarrow \frac{2x}{x-3} \leq x \Leftrightarrow x-3 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Ответ: $x \in [5; +\infty)$.

$$2.381. \lg x + \sqrt{1 - 9 \lg^2 x} < 1.$$

Решение.

Пусть $y = \lg x$, тогда неравенство принимает вид: $y + \sqrt{1 - 9y^2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 - 9y^2} < 1 - y$.

Так как $1 - 9y^2 \geq 0$, то $9y^2 \leq 1 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}$. Для таких y $1 - y > 0$, следовательно,

$$\sqrt{1 - 9y^2} < 1 - y \Leftrightarrow 1 - 9y^2 < 1 - 2y + y^2 \Leftrightarrow 10y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow y \left(y - \frac{1}{5} \right) \cdot \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}, \\ y \left(y - \frac{1}{5} \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq y < 0, \\ \frac{1}{5} < y \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Рассмотрим два следующих случая:

$$1) -\frac{1}{3} \leq \lg x < 0 \Leftrightarrow \lg 10^{-\frac{1}{3}} \leq \lg x < \lg 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{10}} \leq x < 1;$$

$$2) \frac{1}{5} < \lg x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \lg 10^{\frac{1}{5}} < \lg x \leq \lg 10^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \sqrt[5]{10} < x \leq \sqrt[3]{10}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{10}}; 1 \right) \cup \left(\sqrt[5]{10}; \sqrt[3]{10} \right].$$

Решить системы неравенств (2.382 – 2.388).

$$2.382. \begin{cases} \log_{0,1} |x - 2| \\ \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{2 - x}} < 0, \\ \sqrt{2 - x} \leq x. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x < 2, x \neq 0.$$

Рассмотрим два случая:

$$1) x < 0, \text{ тогда } \sqrt{2 - x} \leq 0 \text{ не имеет решений, } \emptyset;$$

$$2) 0 < x < 2, \text{ тогда } x^2 - 3x < 0, \text{ следовательно, имеем:}$$

$$\begin{cases} \log_{0,1} |x - 2| > 0, \\ \sqrt{2 - x} \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,1} (2 - x) > \log_{0,1} 1, \\ 2 - x \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < 1, \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ (x + 2)(x - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

$$\text{Ответ: } x \in (1; 2).$$

$$2.383. \begin{cases} x^2 + 5x < 6, \\ |x + 1| \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

Из условия получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} -6 < x^2 + 5x < 6, \\ -2 \leq x+1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x < 6, \\ x^2 + 5x > -6, \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-1) < 0, \\ (x+2)(x+3) > 0, \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x < 1, \\ -3 \leq x \leq 1, \\ (x+2)(x+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < 1, \\ x < -3, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1.$$

Ответ: $x \in (-2; 1)$.

$$2.384. \begin{cases} \frac{\log_{0,2}(\sqrt{x+1}-1)}{\log_{0,2}(\sqrt{x+1}+5)} \geq \frac{1}{2}, \\ 3^{\log_{0,2} x + 2} > 3^{\log_{0,2} x^2 + 5} - 2. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.Так как $\sqrt{x+1} + 5 > 1$, то $\log_{0,2}(\sqrt{x+1}+5) < 0$ и из условия получаем:

$$\begin{cases} 2\log_{0,2}(\sqrt{x+1}-1) \leq \log_{0,2}(\sqrt{x+1}+5), \\ 243 \left(3^{\log_{0,2} x} \right)^2 - 9 \cdot 3^{\log_{0,2} x} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,2}(\sqrt{x+1}-1)^2 \leq \log_{0,2}(\sqrt{x+1}+5), \\ \left(3^{\log_{0,2} x} + \frac{18}{243} \right) \left(3^{\log_{0,2} x} - \frac{1}{9} \right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+1}-1)^2 \geq \sqrt{x+1}+5, \\ 3^{\log_{0,2} x} < 3^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1+1-2\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+1}+5, \\ \log_{0,2} x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+1})^2 - 3\sqrt{x+1} - 4 \geq 0, \\ \log_{0,2} x < \log_{0,2}(0,2)^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+1}-4)(\sqrt{x+1}+1) \geq 0, \\ x > 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \geq 4, \\ x > 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 16, \\ x > 25 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Ответ: $x \in (25; +\infty)$.

$$2.385. \begin{cases} \ln \sqrt{x+7} > \ln(x-5) - 2\ln 2, \\ |x-7| \leq 3. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x > 5$.

$$\begin{cases} \ln \sqrt{x+7} > \ln(x-5) - 2\ln 2, \\ |x-7| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \sqrt{x+7} > \ln(x-5) - \ln 4, \\ |x-7| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \sqrt{x+7} > \ln \frac{x-5}{4}, \\ -3 \leq x-7 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} > \frac{x-5}{4}, \\ 5 < x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 > \frac{x^2-10x+25}{16}, \\ 5 < x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-26x-87 < 0, \\ 5 < x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 29, \\ 5 < x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x \leq 10.$$

Ответ: $x \in (5; 10]$.

$$2.386. \begin{cases} \frac{x^2 - 7|x| + 10}{(x-3)^2} < 0, \\ |x-3|^{2x^2-7x} > 1. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 3$.

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 7|x| + 10}{(x-3)^2} < 0, \\ |x-3|^{2x^2-7x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|^2 - 7|x| + 10 < 0, \\ |x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x|-2)(|x|-5) < 0, \\ |x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < |x| < 5, \\ |x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие случаи:

$$1) x < 0, \text{ тогда } |x-3| > 1 \text{ и получаем: } \begin{cases} -5 < x < -2, \\ |x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < -2, \\ 2x\left(x - \frac{7}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < -2;$$

2) $x > 0 \Rightarrow 2 < x < 5$, рассмотрим варианты:

$$а) x \in (2; 3) \cup (3; 4), \text{ тогда } |x-3| < 1 \text{ и } |x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x < 0 \Leftrightarrow 2x\left(x - \frac{7}{2}\right) < 0, x \in (2; 3) \cup (3; 5);$$

б) $x = 4$ — не подходит;

$$в) x \in (4; 5), \text{ тогда } |x-3| > 1 \text{ и } |x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0 \Leftrightarrow 2x\left(x - \frac{7}{2}\right) < 0, x \in (4; 5).$$

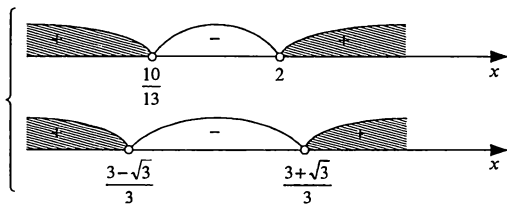
Ответ: $x \in (-5; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5) \cup (4; 5)$.

$$2.387. \begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ x^2 + y^2 > 4, \\ xy < 1. \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения $y = \frac{6-3x}{2}$, следовательно, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{(6-3x)^2}{4} > 4, \\ \frac{x(6-3x)}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 36 - 36x + 9x^2 > 16, \\ 3x^2 - 6x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2 - 36x + 20 > 0, \\ 3x^2 - 6x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13\left(x - \frac{10}{13}\right)(x-2) > 0, \\ 3\left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) > 0. \end{cases}$$



Отсюда $x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}) \cup (2; +\infty)$, $y = \frac{6-3x}{2}$.

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}) \cup (2; +\infty)$, $y = \frac{6-3x}{2}$.

2.388. $\begin{cases} y > x^2, \\ x > y^2. \end{cases}$

Решение.

Так как $x > y^2 \geq 0$, то из условия имеем: $\begin{cases} y > x^2, \\ y < \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 < y < \sqrt{x}$.

Из последнего двойного неравенства необходимо $x^2 < \sqrt{x} \Rightarrow x^4 < x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) < 0$, $x \in (0; 1)$

Ответ: $x \in (0; 1)$, $y \in (x^2; \sqrt{x})$.

Найти области определения функций (2.389 – 2.396).

2.389. $y = \sqrt{\lg \frac{1-2x}{x+3}}$.

Решение.

Область определения $D(y)$ определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1-2x}{x+3} > 0, \\ \lg \frac{1-2x}{x+3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) < 0, \\ \frac{1-2x}{x+3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{x+3+2x-1}{x+3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < \frac{1}{2}, \\ \left(x + \frac{2}{3}\right)(x+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < \frac{1}{2}, \\ x + \frac{2}{3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x \leq -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $D(y) = \left(-3; -\frac{2}{3}\right]$.

2.390. $y = \sqrt{\frac{\log_{0,3} |x-2|}{|x|}}$.

Решение.

Область определения $D(y)$ находится из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \log_{0,3} |x-2| \geq 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,3} |x-2| \geq \log_{0,3} 1, \\ x \neq 0, 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| \leq 1, \\ x \neq 0, 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-2 \leq 1, \\ x \neq 0, 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Ответ: $D(y) = [1; 2) \cup (2; 3]$.

2.391. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt[4]{\log_{0,5}(x-9)}$.

Решение.

Область определения $D(y)$ находится из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ \log_{0,5}(x-9) \geq 0, \\ x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0, \\ \log_{0,5}(x-9) \geq \log_{0,5} 1, \\ x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-9 \leq 1, \\ x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < x \leq 10.$$

Ответ: $D(y) = (9; 10]$.

$$2.392. y = \sqrt{\frac{-\log_{0,3}(x-1)}{-x^2 + 2x + 8}}.$$

Решение.

Область определения $D(y)$ определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} -\log_{0,3}(x-1) \geq 0, \\ -x^2 + 2x + 8 > 0, \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,3}(x-1) \leq \log_{0,3} 1, \\ x > 1, \\ x^2 - 2x - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 1, \\ (x-4)(x+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 4. \end{cases}$$

Ответ: $D(y) = [2; 4)$.

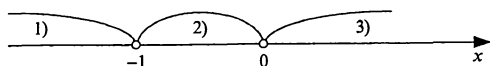
$$2.393. y = \sqrt{\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} - 1.$$

Решение.

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} - 1 = \sqrt{\frac{\log_3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}{\log_3 3^{-2}}} - 1 = \sqrt{-\log_3\left|\frac{x}{x+1}\right|} - 1.$$

Область определения $D(y)$ находится из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ -\log_3\left|\frac{x}{x+1}\right| - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ \log_3\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ \left|\frac{x}{x+1}\right| \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x| \leq |x+1|, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$$



Рассмотрим три следующих случая:

$$1) x < -1, -3x \leq -x-1, 2x \geq 1, x \geq \frac{1}{2}, \emptyset;$$

$$2) -1 < x < 0, -3x \leq x+1, 4x \geq -1, x \geq -\frac{1}{4}, x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right)$$

$$3) x > 0, 3x \leq x+1, 2x \leq 1, x \leq \frac{1}{2}, x \in \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Ответ: } D(y) = \left[-\frac{1}{4}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

$$2.394. y = \sqrt{1 - \log_x \log_2(4^x - 12)}.$$

Решение.

Область определения $D(y)$ находится из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 - \log_x \log_2(4^x - 12) \geq 0, \\ \log_2(4^x - 12) > 0, \\ 4^x - 12 > 0, \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1, \\ 4^x - 12 > 1, \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x \log_2(4^x - 12) \leq \log_x x, \\ 4^x > 13, \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_x \log_2(4^x - 12) \leq \log_x x, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(4^x - 12) \leq x, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(4^x - 12) \leq \log_2 2^x, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2^x)^2 - 2^x - 12 \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 4)(2^x + 3) \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 4 \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 2^2, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \log_4 13 < x \leq 2$$

$$\text{Ответ: } D(y) = (\log_4 13; 2].$$

$$2.395. y = \log_2 \left(\left| \log_2 \frac{x}{4} \right| - \left| \log_2 x \right| \right).$$

Решение.

Область определения $D(y)$ определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \left| \log_2 \frac{x}{4} \right| - \left| \log_2 x \right| > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \log_2 -2 \right| > \left| \log_2 x \right|, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 x - 2)^2 > \log_2^2 x, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4 > \log_2^2 x, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < \log_2 2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

$$\text{Ответ: } D(y) = (0; 2).$$

$$2.396. y = \sqrt[4]{8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} - 9^{\sqrt{x}}}.$$

Решение.

Область определения $D(y)$ определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 8 \cdot 3^{\sqrt{x}+4\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{x}+1} - 9^{\sqrt{x}} \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot 3^{4\sqrt{x}} + 9 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 3^{2\sqrt{x}} \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3^{2\sqrt{x}}}{3^{2\sqrt{x}}} - 8 \frac{3^{\sqrt{x}} \cdot 3^{4\sqrt{x}}}{3^{2\sqrt{x}}} - 9 \leq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (3^{\sqrt{x}-4\sqrt{x}})^2 - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}-4\sqrt{x}} - 9 \leq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3^{\sqrt{x}-4\sqrt{x}} \leq 9, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x}-4\sqrt{x}} \leq 3^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-4\sqrt{x}-2 \leq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 4\sqrt{x} \leq 2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 16.
 \end{aligned}$$

Ответ: $D(y) = [0; 16]$.

2.397. Найти все значения a , при которых функция $y = \log_5((a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1)$ определена для любых x .

Решение.

$$D(y): (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0.$$

При $a = 1$ получаем $1 > 0$ — истинно, а при $a = -1 - 4x + 1 > 0$ — верно не для всех x .

Квадратный трехчлен больше нуля для любых x тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ \frac{D}{4} = (a - 1)^2 - (a^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1, \\ a^2 - 2a + 1 - a^2 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1, \\ 2(1 - a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1.$$

Ответ: при $a \in [1; +\infty)$.

2.398. При каких значениях a оба корня уравнения $(a - 1)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ будут положительными?

Решение.

Используя теорему Виета, получаем, что оба корня будут положительными тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = a^2 - (a - 1)(a + 3) \geq 0, \\ a \neq 1, \\ x_1 + x_2 = \frac{2a}{a - 1} > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a + 3}{a - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a \geq 0, \\ a(a - 1) > 0, \\ (a + 3)(a - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{3}{2}, \\ a(a - 1) > 0, \\ a < -3 \end{cases} \Leftrightarrow a < -3.$$

Ответ: при $a \in (-\infty; -3)$.

2.399. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2 - (2a + 1)x + 3a - 1 = 0$ больше 1?

Решение.

При $a = 0$ уравнение имеет корень $x = -1$, который не подходит по условию. Для того чтобы корни квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) были больше числа d , необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > d, \\ af(d) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \geq 0, \\ \frac{2a+1}{2a} > 1, \\ a(a-(2a+1)+3a-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a^2 - 8a - 1 \leq 0, \\ a > 0, \\ 2a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{2+\sqrt{6}}{4}, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a \leq \frac{2+\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: при $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

2.400. При каких значениях параметра a корни уравнения $4x^2 - (3a+1)x - (a+2) = 0$ заключены в промежутке между 1 и 2?

Решение.

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) заключены в промежутке $(\alpha; \beta)$, т.е. $\alpha < x_1 < \beta$ и $\alpha < x_2 < \beta$ тогда и только тогда,

$$\text{когда } \begin{cases} D \geq 0, \\ \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta, \\ af(\alpha) > 0, \\ af(\beta) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a+1)^2 + 16(a+2) \geq 0, \\ -1 < \frac{3a+1}{8} < 2, \\ 4(-1)^2 - (3a+1)(-1) - a - 2 > 0, \\ 4(2)^2 - (3a+1) \cdot 2 - a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 + 22a + 33 \geq 0, \\ 3a - 15 < 0, \\ 3a + 9 > 0, \\ -7a + 12 > 0, \\ 2a + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ a < 5, \\ a > -3, \\ a < \frac{12}{7}, \\ a > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < a < \frac{12}{7}.$$

Ответ: при $a \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{12}{7}\right)$.

2.401. При каких значениях параметра a неравенство $-6 < \frac{2x^2 + ax - 4}{x^2 - x + 1} < 4$ истинно для всех действительных x ?

Решение.

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{2x^2 + ax - 4}{x^2 - x + 1} + 6 > 0, \\ \frac{2x^2 + ax - 4}{x^2 - x + 1} - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8x^2 + (a-6)x + 2}{x^2 - x + 1} > 0, \\ \frac{2x^2 - (a+4)x + 8}{x^2 - x + 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + (a-6)x + 2 > 0, \\ 2x^2 - (a+4)x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-6)^2 - 64 < 0, \\ (a+4)^2 - 64 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-6)^2 < 64, \\ (a+4)^2 < 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < a-6 < 8, \\ -8 < a+4 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 14, \\ -12 < a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < a < 4.$$

Ответ: при $a \in (-2; 4)$.

2.402. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x+3a-5}{x+a} > 0$ справедливо для всех x таких, что $1 \leq x \leq 4$?

Решение.

$$\frac{x+3a-5}{x+a} > 0 \Leftrightarrow (x+3a-5)(x+a) > 0 \Leftrightarrow x^2 + (4a-5)x + 3a^2 - 5a > 0.$$

Если рассмотреть квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + (4a-5)x + 3a^2 - 5a$, то требования задачи выполняются в двух следующих случаях:

$$1) \text{ корни } f(x) \text{ меньше 1, т.е. } \begin{cases} \frac{5-4a}{2} < 1, \\ f(1) = 3a^2 - a - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a > 3, \\ 3(a+1)\left(a - \frac{4}{3}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{4}{3};$$

$$2) \text{ корни } f(x) \text{ больше 4, т.е. } \begin{cases} \frac{5-4a}{2} > 4, \\ f(4) = 3a^2 + 11a - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\frac{3}{4}, \\ 3\left(a - \frac{1}{3}\right)(a+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -4.$$

Ответ: при $a \in (-\infty; -4) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

2.403. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + 4|x - a| \geq a^2$ справедливо для всех действительных x ?

Решение.

Рассмотрим два следующих случая:

$$1) \begin{cases} x \geq a, \\ x^2 + 4(x - a) \geq a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \\ x^2 - a^2 + 4(x - a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \\ (x - a)(x - (-a - 4)) \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство истинно для всех $x \geq a$, если $a \geq -a - 4 \Leftrightarrow a \geq -2$.

$$2) \begin{cases} x < a, \\ x^2 - a^2 - 4(x - a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a, \\ (x - a)(x - (4 - a)) \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство справедливо для всех $x < a$ в случае, когда $a \leq -a + 4 \Leftrightarrow a \leq 2$.

Подводя итог, получаем $a \in [-2; 2]$.

Ответ: при $a \in [-2; 2]$.

2.404. Решить неравенство $|x - a| + |x + a| < b$ в зависимости от параметра a .

Решение.

Рассмотрим графики функций $y = |x - a| + |x + a|$ и $y = b$, где $b > 0$ (см. рис.).

Анализируя рисунок, получаем:

$$1) \ b \leq 2|a|, \emptyset;$$

$$2) \ b > 2|a|, \ x \in \left(-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right).$$

Ответ: если $b \leq 2|a|$, \emptyset ;

если $b > 2|a|$, $x \in \left(-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

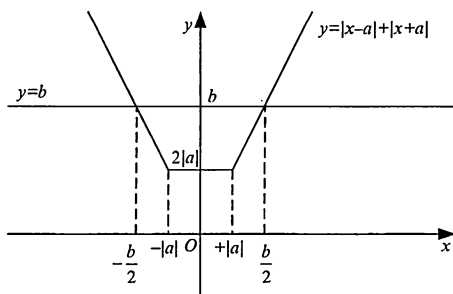


Рис. 2.3

2.405. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y \geq x^2 + a, \\ x \geq y^2 + a \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение.

Если $(x_1; y_1)$ решение исходной системы, то и $(y_1; x_1)$ будет решением, следовательно, необходимое условие единственности решения — это $y = x$.

Далее, имеем $x \geq x^2 + a \Leftrightarrow x^2 - x + a \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ при $D = 1 - 4a = 0$, т.е. $a = \frac{1}{4}$.

Ответ: при $a = \frac{1}{4}$ $x = y = \frac{1}{2}$.

2.406. Решить неравенство $x + 2a - \sqrt{3ax + 4a^2} > 0$ в зависимости от параметра a .

Решение.

Рассмотрим следующие три случая:

1) $a < 0$, $x + 2a > \sqrt{3ax + 4a^2} \Rightarrow x > 0$, $x + 2a > 0$, $3ax + 4a^2 = a(x + 2(x + 2a)) < 0$, следовательно, в этом случае решений нет;

2) $a = 0$, $x > 0$;

3) $a > 0$, $x + 2a > \sqrt{3ax + 4a^2} \Leftrightarrow \frac{x}{a} + 2 > \sqrt{3\frac{x}{a} + 4}$. Пусть $t = \frac{x}{a}$, тогда имеем $t + 2 > \sqrt{3t + 4} \Rightarrow t \geq -\frac{4}{3}$, $t + 2 > 0$.

Возведя обе части неравенства в квадрат, находим:

$$t^2 + 4t + 4 > 3t + 4 \Leftrightarrow t(t + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \leq t < -1, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \leq \frac{x}{a} < -1, \\ \frac{x}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}a \leq x < -a, \\ x > 0. \end{cases}$$

Ответ: если $a < 0$, то решений нет;

если $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$;

если $a > 0$, то $x \in \left[-\frac{4a}{3}; -a\right) \cup (0; +\infty)$

2.407. Решить неравенство $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} < a$ в зависимости от параметра a .

Решение.

Из условия очевидно, что $a > 0$. Так как $\begin{cases} a+x \geq 0, \\ a-x \geq 0, \end{cases}$ то $-a \leq x \leq a$. Пусть $y = \sqrt{a+x} \geq 0$, тогда $x = y^2 - a$, и неравенство принимает вид:

$$\sqrt{2a - y^2} < a - y \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - y^2 < a^2 - 2y + y^2, \\ 0 \leq y < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 2ay + a^2 - 2a > 0, \\ 0 \leq y < a. \end{cases}$$

Для квадратного трехчлена $f(y) = 2y^2 - 2ay + a^2 - 2a$ дискриминант $D = 4a^2 - 8(a^2 - 2a) = 16 - 4a^2 = 4(4a - a^2) = -4a(a - 4)$.

Если $a > 4$, то $D < 0$ и решение системы $0 \leq y < a$, т.е. $-a \leq x \leq a$.

При $a \in (0; 4]$ $D \geq 0$ и $y_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{4a - a^2}}{2}$.

Необходимо, чтобы $y_1, y_2 \in [0; a]$, т.е. чтобы выполнялись условия $\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{2}a < a, \\ f(0) = a^2 - 2a \geq 0, \Leftrightarrow 2 < a \leq 4. \\ f(a) = a^2 - 2a > 0 \end{cases}$

Если $y_1 = \frac{a - \sqrt{4a - a^2}}{2}$, то $x_1 = \frac{-a\sqrt{4a - a^2}}{2}$, для $y_2 = \frac{a + \sqrt{4a - a^2}}{2}$, $x_2 = \frac{a\sqrt{4a - a^2}}{2}$.

Тогда $0 \leq y < y_1 \Leftrightarrow -a \leq x < \frac{-a\sqrt{4a - a^2}}{2}$, $y_2 < y < a \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{4a - a^2}}{2} < x \leq a$.

Ответ: если $2 < a \leq 4$, то $x \in [-a; \frac{-a\sqrt{4a - a^2}}{2}) \cup (\frac{a\sqrt{4a - a^2}}{2}; a]$;

если $a > 4$, то $x \in [-a; a]$;

если $a \in (-\infty; 2]$, то решений нет.

2.408. Решить неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{2ax - x^2} > a$ в зависимости от параметра a .

Решение.

1) При $a < 0$ решениями неравенства будут все допустимые значения из области допустимых значений, т.е. $a \leq x < 0$.

2) При $a = 0$ неравенство решений не имеет.

3) Пусть $a > 0$. Перепишем исходное неравенство в виде $\sqrt{a^2 - (x-a)^2} > a - \sqrt{a^2 - x^2}$ и рассмотрим на Ox графики функций $y = \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$, $z = a - \sqrt{a^2 - x^2}$.

График функции $y(x)$ — полуокружность радиусом a с центром в точке $(a; 0)$; график $z(x)$ — полуокружность радиусом a с центром в точке $(0; 0)$. Эти полуокружности пересекаются в точках $(0; 0)$ и $(a; a)$ (см. рис.).

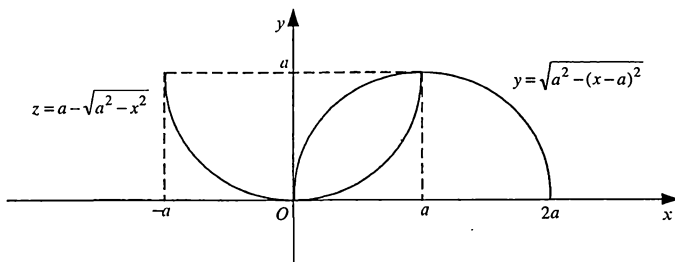


Рис. 2.4

Очевидно, что решениями исходного неравенства будут те значения x , при которых график функции $y(x)$ располагается выше графика функции $z(x)$, т.е. $y(x) > z(x)$.

Из рисунка ясно, что $x \in (0; a)$.

Ответ: если $a < 0$, то $x \in [a; 0]$;

если $a = 0$, то решений нет;

если $a > 0$, то $x \in (0; a)$.

2.409. Решить неравенство $2 \log_4(x-a+1) + \log_1(x-2a-3) \geq 2$ в зависимости от параметра a .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-a+1 > 0, \\ x-2a-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > a-1, \\ x > 2a+3. \end{cases}$$

$$\text{Из условия получаем: } 2 \log_4(x-a+1) - 2 \log_4(x-2a-3) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-a+1}{x-2a-3} \geq 4 \Leftrightarrow x-a+1 \geq 4(x-2a-3) \Leftrightarrow \frac{7a+13}{3}.$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, имеем: } \begin{cases} a-1 < \frac{7a+13}{3}, \\ 2a+3 < \frac{7a+13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a > -4. \text{ При } a > -4 \text{ выполняется неравенство } a-1 < 2a+3.$$

Ответ: если $a \leq -4$, то решений нет;

$$\text{если } a > -4, \text{ то } 2a+3 \leq x < \frac{7a+13}{3}.$$

2.410. Решить неравенство $\log_a \frac{1+\log_a^2 x}{1-\log_a x} < 0$ в зависимости от параметра a .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq a \text{ при } a \in (0; 1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

Рассмотрим два следующих случая:

$$1) \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \frac{1+\log_a^2 x}{1-\log_a x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \frac{\log_a^2 x + \log_a x}{\log_a x - 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \log_a x (\log_a x - 1)(\log_a x + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \log_a x < -1, \\ 0 < \log_a x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > \frac{1}{a}, \\ a < x < 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a > 1, \\ \frac{1+\log_a^2 x}{1-\log_a x} < 1, \\ \frac{1+\log_a^2 x}{1-\log_a x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ \frac{\log_a^2 x + \log_a x}{\log_a x - 1} > 0, \\ \log_a x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ \log_a x (\log_a x - 1)(\log_a x + 1) > 0, \\ \log_a x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ -1 < \log_a x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ \frac{1}{a} < x < 1. \end{cases}$$

Ответ: если $a \in (0; 1)$, то $x \in (a; 1) \cup \left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$;

если $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \left(\frac{1}{a}; 1\right)$;

при других a решений нет.

2.411. Решить неравенство $\log_a(1 - 8a^{-x}) \geq 2(1 - x)$ в зависимости от параметра a .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ 1 - 8a^{-x} > 0. \end{cases}$$

Из условия имеем: $\log_a(1 - 8a^{-x}) \geq \log_a a^{2(1-x)}$.

Рассмотрим два следующих случая:

$$1) \quad \begin{cases} 0 < a < 1, \\ a^{-x} < \frac{1}{8}, \\ \log_a(1 - 8a^{-x}) \geq \log_a a^{2(1-x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x < \log_a 8, \\ a^2 a^{-2x} + 8a^{-x} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x < \log_a 8, \\ a^{-x} \geq \frac{-4 + \sqrt{16 + a^2}}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x < \log_a 8, \\ -x \leq \log_a \frac{(\sqrt{16 + a^2} - 4)(\sqrt{16 + a^2} + 4)}{a^2(\sqrt{16 + a^2} + 4)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \log_a(\sqrt{16 + a^2} + 4) \leq x < \log_a 8; \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} a > 1, \\ a^{-x} < \frac{1}{8}, \\ \log_a(1 - 8a^{-x}) \geq \log_a a^{2(1-x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a^{-x} < \frac{1}{8}, \\ a^2 a^{-2x} + 8a^{-x} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a^{-x} < \frac{1}{8}, \\ a^{-x} \leq \frac{\sqrt{16 + a^2} - 4}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a^{-x} < \frac{1}{8}, \\ x \geq \log_a(4 + \sqrt{16 + a^2}). \end{cases}$$

Так как $\frac{\sqrt{16 + a^2} - 4}{a^2} < \frac{1}{8}$ — истинное неравенство при всех a , то $\begin{cases} a > 1, \\ x \geq \log_a(4 + \sqrt{16 + a^2}). \end{cases}$

Ответ: если $a \leq 0$ или $a = 1$, то решений нет;

если $0 < a < 1$, то $\log_a(4 + \sqrt{16 + a^2}) \leq x < \log_a 8$;

если $a > 1$, то $x \geq \log_a(4 + \sqrt{16 + a^2})$.

ТЕМА: ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

2.412. При продаже товара за 1540 долларов получено 10% прибыли. Найти себестоимость товара.

Решение.

Продажная цена составляет $100\% + 10\% = 110\%$ себестоимости. Если себестоимость составляет x долларов, то получаем

$$\text{пропорцию } \frac{x}{10} = \frac{1540}{110} \Leftrightarrow x = \frac{1540 \cdot 100}{110} = 1400.$$

Ответ: 1400 долларов.

2.413. В связи с инфляцией цену товара повысили сначала на 10%, а затем новую цену повысили еще на 15%, и в конце концов сделали повышение на 10%. Найти процент повышения первоначальной цены.

Решение.

Пусть x — первоначальная цена товара. После первого повышения цена стала $x + 0,1x = x(1 + 0,1)$; после второго — $x(1 + 0,1)(1 + 0,15)$; после третьего — $x(1 + 0,1)(1 + 0,15)(1 + 0,1) = 1,3915x$. Значит, первоначальную цену товара повысили на 39,15%.

Ответ: 39,15%.

2.414. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 80 кг морской воды, чтобы концентрация соли составила 2%?

Решение.

Пусть x кг соли в 80 кг морской воды, тогда $\frac{x}{5} = \frac{80}{100} \Leftrightarrow x = \frac{5 \cdot 80}{100} = 4$. В разбавленных y кг воды 4 кг соли составляет 2%,

следовательно, $\frac{y}{100} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \cdot 100}{2} = 200$. Значит, нужно добавить $200 - 80 = 120$ кг пресной воды.

Ответ: 120 кг.

2.415. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

Решение.

Если x — первоначальная цена товара, то после повышения на 25% она стала равной $x(1 + 0,25) = 1,25x$, а после понижения на $p\%$ — $1,25x \left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

По условию $1,25x \left(1 - \frac{p}{100}\right) = x \Leftrightarrow \frac{5}{4} \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{p}{100} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{p}{100} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow p = 20$.

Ответ: 20%.

2.416. Население города ежегодно увеличивается на 2% наличного состава жителей. Через сколько лет население утронется?

Решение.

Если x — первоначальное население города, то через n лет оно составит $x \left(1 + \frac{2}{100}\right)^n$, равное по условию $3x$.

$$\left(1 + \frac{1}{50}\right)^n = 3 \Rightarrow n \cdot \log_3 1,02 = 1, \quad n = \frac{1}{\log_3 1,02} = 55.$$

Ответ: через 55 лет.

2.417. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 1 т раствора, содержащего 90% воды, чтобы получить раствор с содержанием 50% воды?

Решение.

В растворе содержится $0,9 \cdot 1000 = 900$ кг воды. Если выпарить x кг воды, то получим, что $900 - x = 0,5(1000 - x) \Rightarrow x = 800$.

Ответ: 800 кг.

2.418. Смешали 30%-й раствор кислоты с 10%-м и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение.

Предположим, что было взято x г — первого раствора и y г — второго. Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 0,3x + 0,1y = 0,15 \cdot 600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 600, \\ 3x + y = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150, \\ y = 450. \end{cases}$$

Ответ: 150 и 450 г.

2.419. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

Решение.

По условию в 1 кг первого сплава содержится $\frac{1}{3}$ кг металла I и $\frac{2}{3}$ кг металла II, а в 1 кг второго сплава — $\frac{2}{5}$ кг металла I и $\frac{3}{5}$ кг металла II. Взяв x кг первого сплава и y кг второго, получим $(x + y)$ кг сплава, в котором будет $\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y\right)$

металла I и $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y\right)$ металла II. По условию $\frac{\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y}{\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y} = \frac{17}{27} \Leftrightarrow \frac{5x + 6y}{10x + 9y} = \frac{17}{27} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{9}{35}$.

Ответ: 9 частей первого сплава и 35 частей второго.

2.420. Имелось два разных сплава меди. Процент содержания меди в первом сплаве был на 40 меньше процента содержания меди во втором сплаве. После того как их сплавляли вместе, получили сплав, содержащий 36% меди. Известно, что меди в первом сплаве 6 кг, а во втором 12 кг. Найти процентное содержание меди в первом и во втором сплавах.

Решение.

Пусть в первом сплаве $p\%$ меди, тогда во втором $(p + 40)\%$, в третьем — 36%. Массы сплавов соответственно равны:

первого — $\frac{6 \cdot 100}{p}$, второго — $\frac{12 \cdot 100}{p+40}$, третьего — $\frac{18 \cdot 100}{36} = 50$.

Имеем уравнение

$$\frac{600}{p} + \frac{1200}{p+40} = 50 \Leftrightarrow 12(p+40) + 24p = p^2 + 40p \Leftrightarrow p^2 + 40p - 36p - 480 = 0 \Leftrightarrow p^2 + 4p - 480 = 0, \quad p = 20 \quad (p > 0)$$

Ответ: 20% и 60%.

2.421. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько олова содержится в полученном новом сплаве?

Решение.

Пусть x — процентное содержание цинка в первом сплаве. По условию $\frac{x}{100} \cdot 150 + \frac{x}{100} \cdot 250 = \frac{30}{100} (150 + 250) \Rightarrow x = 30$.

Тогда во втором сплаве содержится $100\% - (26\% + 30\%) = 44\%$ олова, а новый сплав содержит $\frac{40}{100} \cdot 150 + \frac{44}{100} \cdot 250 = 170$ (кг олова).

Ответ: 170 кг.

2.422. Катер спустился по течению реки на 28 км, а затем тут же вернулся назад, затратив на путь туда и обратно 7 ч. Известно, что скорость течения 3 км/ч. Найти скорость катера в стоячей воде.

Решение.

Пусть скорость катера в стоячей воде x км/ч. Из условия получаем уравнение

$$\frac{28}{x+3} + \frac{28}{x-3} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 4(x-3+x+3) \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 9 км/ч.

2.423. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки равна 1 км/ч. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 ч?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде, тогда из условия задачи получаем неравенство $3 \leq \frac{10}{x+1} + \frac{6}{x-1} \leq 4$, где $x > 1$.

Отсюда получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 3(x^2 - 1) \leq 10x - 10 + 6x + 6 \leq 4(x^2 - 1), \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 16x + 1 \leq 0, \\ 4x^2 - 16x \geq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{8 + \sqrt{61}}{3}, \\ x(x-4) \geq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq \frac{8 + \sqrt{61}}{3}.$$

Ответ: скорость лодки должна лежать в промежутке $\left[4; \frac{8 + \sqrt{61}}{3}\right]$.

2.424. Грузовик остановился для заправки горючим на 12 мин. После этого, увеличив скорость движения на 15 км/ч, он наверстал потерянное время на расстоянии 60 км. С какой скоростью он двигался после остановки?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость грузовика после остановки, t ч — время, за которое грузовик прошел бы 60 км со скоростью $(x - 15)$ км/ч, $(t - \frac{1}{5})$ ч — время, за которое грузовик прошел 60 км со скоростью x км/ч. Тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (t - \frac{1}{5})x = 60, \\ t(x - 15) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow tx - \frac{1}{5}x = tx - 15t, \quad x = 75t.$$

Из второго уравнения системы имеем: $75t^2 - 15t - 60 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1$ ($t > 0$), $x = 75$ км/ч.

Ответ: 75 км/ч.

2.425. Пловец, плывя против течения реки, оставляет в реке мяч у места старта. Проплыв 20 мин, он поворачивает и догоняет мяч через 2 км ниже по течению от места старта. Какова скорость течения реки, если собственная скорость пловца постоянна?

Решение.

Переходя в систему отсчета, связанную с мячом, получаем, что пловец плыл 20 мин от мяча и 20 мин назад, т.е. мяч свободно плыл по течению 40 мин = $\frac{2}{3}$ ч. Если x км/ч — скорость течения реки, то $\frac{2}{3}x = 2 \Rightarrow x = 3$ км/ч.

Ответ: 3 км/ч.

2.426. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B , расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя 2 ч после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход в B . Найти скорости пешехода и велосипедиста, полагая, что они оставались постоянными.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость пешехода, тогда скорость велосипедиста будет равна $\frac{40 - 2x}{2} = 20 - x$. По условию имеем:

$$\frac{40 - 2x}{x} - \frac{2x}{20 - x} = 7\frac{1}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 4 и 16 км/ч.

2.427. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта в одном и том же направлении. Одна машина идет со скоростью 50 км/ч, а вторая — 40 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на 1,5 ч позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость третьей машины ($x > 50$). За полчаса первая машина удалится от начального пункта на расстояние 25 км, а вторая — на 20 км. Таким образом, третья машина догонит первую через $\frac{25}{x - 50}$ ч, а вторую — через $\frac{20}{x - 40}$ ч. По

условию имеем: $\frac{25}{x - 50} - \frac{20}{x - 40} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 50x - 40 - 40x - 50 = 3x - 50x - 40 \Leftrightarrow 10x = 3x - 50x - 40 \Rightarrow x = 60$ (км/ч) ($x_2 < 50$).

Ответ: 60 км/ч.

2.428. Из двух городов, расстояние между которыми 650 км, отправляются навстречу друг другу два поезда. Если их время отправления одинаково, то они встретятся через 10 ч. Если же второй поезд отправится на 4 ч 20 мин раньше первого, то встреча произойдет через 8 ч после отправления первого. Найти среднюю скорость каждого поезда.

Решение.

Предположим, что x км/ч — скорость первого поезда, y км/ч — второго. Если они отправятся в одно и то же время, то первый поезд пройдет до встречи $10x$ км, а второй — $10y$ км, следовательно, $10x + 10y = 650$.

Во втором случае первый пройдет до встречи $8x$ км, а второй — $12\frac{1}{3}y$ км. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 10x + 10y = 650, \\ 8x + 12\frac{1}{3}y = 650 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 65, \\ 8x + \frac{37}{3}y = 650 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35, \\ y = 30. \end{cases}$$

Ответ: 35 и 30 км/ч.

2.429. Два вертолета вылетают одновременно навстречу друг другу. К моменту встречи первый вертолет прошел на 100 км меньше второго и на место отлета второго вертолета приходит через 3 часа после встречи. Второй вертолет прибывает на место отлета первого через 1 ч 20 мин после встречи. Найти скорости обоих вертолетов, а также расстояние между их точками взлета.

Решение.

Если первый вертолет пролетел до встречи x км, то второй — $(x + 100)$ км, при этом скорость первого — $\frac{x+100}{3}$ км/ч,

второго — $\frac{x}{1\frac{2}{3}}$ км/ч. От точки взлета до места встречи первый вертолет летел $x : \left(\frac{x+100}{3}\right) = \frac{3x}{x+100}$ (ч), а второй —

$$(x+100) : \left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{4(x+100)}{3x} \text{ (ч)}.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{3x}{x+100} = \frac{4(x+100)}{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{x+100}{x}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{x+100}{x}\right| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+100}{x} = \frac{3}{2} \quad (x > 0) \Leftrightarrow x = 200 \text{ (км/ч)}.$$

Тогда скорости вертолетов будут равны: $v_1 = \frac{200+100}{3} = 100$ (км/ч); $v_2 = \frac{3}{4}x = 150$ (км/ч).

Расстояние между их точками взлета: $200 + 300 = 500$ (км).

Ответ: 100 км/ч, 150 км/ч, 500 км.

2.430. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B , расстояние между которыми равно 600 км. В то время как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найти скорости движения мотоциклистов, если первый мотоциклист приходит в B на 3 ч раньше, чем второй в A , считая их движения равномерными.

Решение.

Если x (км/ч) — скорость первого мотоциклиста, y (км/ч) — скорость второго, то первый проходит 250 км за $\frac{250}{x}$ (ч),

а второй — 200 км за $\frac{200}{y}$ (ч). По условию $\frac{250}{x} = \frac{200}{y}$.

Первый приходит в B за $\frac{600}{x}$ (ч), а второй в A за $\frac{600}{y}$ (ч). По условию $\frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y}$.

Решив систему $\begin{cases} \frac{250}{x} = \frac{200}{y}, \\ \frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5}x, \\ \frac{200}{x} + 1 = \frac{5 \cdot 200}{4x}, \end{cases}$ получаем $x = 50$ км/ч, $y = 40$ км/ч.

Ответ: 50 км/ч, 40 км/ч.

2.431. Из пункта A в пункт B через равные промежутки времени отправляются три машины. В пункт B они прибывают одновременно, затем выезжают в пункт C , расположенный на расстоянии 120 км от пункта B . Первая машина прибывает туда через час после второй, третья машина, прибыв в пункт C , сразу поворачивает обратно и в 40 км от C встречает первую машину. Найти скорость первой машины.

Решение.

Пусть x, y, z — скорости первой, второй и третьей машины соответственно. Так как машины отправляются из пункта A через равные промежутки времени, то $\frac{|AB|}{x} - \frac{|AB|}{y} = \frac{|AB|}{y} - \frac{|AB|}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$.

Так как вторая машина прибыла в пункт C на 1 ч раньше первой, то получаем второе уравнение системы $\frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 1$.

Так как третья машина прошла $120 + 40 = 160$ км за то же время, за которое первая машина прошла $120 - 40 = 80$ км, то

третье уравнение системы принимает вид $\frac{160}{z} = \frac{80}{x} \Leftrightarrow z = 2x$.

Таким образом, имеем $\begin{cases} z = 2x, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{y}, \\ \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x, \\ y = \frac{4}{3}x, \\ \frac{120}{x} - \frac{3 \cdot 120}{4x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30, \\ y = 40, \\ z = 60. \end{cases}$

Ответ: 30 км/ч.

2.432. Двое рабочих совместно могут выполнить некоторую работу за 12 дней. Если первый рабочий сделает половину работы, а затем второй — вторую половину, то вся работа будет сделана за 25 дней. Сколько дней требуется каждому из рабочих в отдельности для выполнения работы?

Решение.

Пусть первому рабочему потребуется для выполнения работы W х дней, а второму — y дней соответственно. Тогда производительность первого рабочего составит $v_1 = \frac{W}{x}$, а второго — $v_2 = \frac{W}{y}$. Далее, из условия получаем:

$$\begin{cases} \frac{W}{v_1 + v_2} = 12, \\ \frac{W}{2v_1} + \frac{W}{2v_2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{50}{xy} = \frac{1}{12}, \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 600, \\ x + y = 50. \end{cases}$$

По теореме Виета имеем $x = 20$ (дней), $y = 30$ (дней). (Или наоборот.)

Ответ: 20 и 30 дней.

2.433. Один рабочий может выполнить некоторую работу за 12 дней, а другому для выполнения той же работы требуется 75% этого времени. После того как в течение 5 дней работал первый рабочий, к нему присоединился второй и они вместе закончили работу. Сколько дней работали рабочие вместе?

Решение.

Пусть t дней рабочие работали вместе, W — объем работы. Тогда производительность первого рабочего — $\frac{W}{12}$, а второго —

$$\frac{W}{12 \cdot 0,75} = \frac{W}{9}. \text{ По условию } \frac{W}{12} \cdot 5 + \left(\frac{W}{12} + \frac{W}{9} \right) t = W \Leftrightarrow \frac{7}{36} t = \frac{7}{12} \Leftrightarrow t = 3 \text{ (дня)}.$$

Ответ: 3 дня.

2.434. Баржа была разгружена с помощью двух подъемных кранов в течение 15 ч, причем первый кран приступил к работе на 7 ч позже второго. Известно, что первый кран, работая один, может разгрузить баржу на 5 ч скорее, чем второй. За сколько часов может разгрузить баржу каждый кран, работая отдельно?

Решение.

Пусть первый кран может разгрузить баржу за t ч, тогда второй может сделать это за $(t + 5)$ ч. Если W — объем работы, то производительность первого крана равняется $\frac{W}{t}$, а второго — $\frac{W}{t+5}$. По условию

$$W = \frac{15W}{t+5} + \frac{8W}{t} \Leftrightarrow t^2 + 5t = 15t + 8t + 40 \Leftrightarrow t^2 - 18t - 40 = 0, \quad t = 20 \text{ (ч)}.$$

Ответ: 20 ч; 25 ч.

2.435. Через две трубы одновременно бассейн наполняется за 12 ч. Через одну первую трубу можно наполнить бассейн на 10 ч быстрее, чем через одну вторую. За сколько часов можно наполнить бассейн через одну вторую трубу?

Решение.

Пусть вторая труба наполняет бассейн за время t (ч), тогда первая может сделать это за $(t - 10)$ (ч). Если V — объем бассейна, то производительность труб составляет $\frac{V}{t-10}$ и $\frac{V}{t}$ соответственно. По условию

$$\left(\frac{V}{t-10} + \frac{V}{t} \right) \cdot 12 = V \Leftrightarrow (t-10+t) \cdot 12 = t^2 - 10t \Leftrightarrow t^2 - 34t + 120 = 0, \quad t = 30 \text{ (ч)} \quad (t = 4 \text{ — не подходит по смыслу задачи)}.$$

Ответ: 30 ч.

2.436. В одном бассейне имеется 200 м^3 воды, а в другом — 112 м^3 . Открывают краны, через которые наполняются бассейны. Через сколько часов количество воды в бассейнах будет одинаковым, если во второй бассейн вливается в час на 22 м^3 больше воды, чем в первый?

Решение.

Пусть количество воды в бассейнах станет одинаковым через x часов, $y \text{ м}^3$ вливается воды в первый бассейн в час, $(y + 22) \text{ м}^3$ — во второй. По условию $200 + xy = 112 + x(y + 22) \Leftrightarrow 22x = 88, x = 4 \text{ (ч)}$.

Ответ: через 4 ч.

2.437. Два одинаковых бассейна одновременно начали заполняться водой. В первый бассейн поступает в час на 30 м^3 воды больше, чем во второй. В некоторый момент времени в двух бассейнах вместе оказалось столько воды, сколько составляет объем каждого из них. После этого через 2 ч 40 мин наполнился первый бассейн, а еще через 3 ч 20 мин — второй. Сколько воды поступало в час в каждый бассейн?

Решение.

Пусть $x + 30$ ($\text{м}^3/\text{ч}$) — скорость наполнения первого бассейна, x ($\text{м}^3/\text{ч}$) — второго, V (м^3) — объем каждого из бассейнов, t — время, когда в двух бассейнах оказалось вместе $V \text{ м}^3$ воды. По условию

$$\begin{cases} (x+30)t + xt = V, \\ (x+30)\left(t + 2\frac{2}{3}\right) = V, \\ x(t+6) = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xt + 30t = V, \\ xt + 30t + \frac{8}{3}x + 80 = V, \\ xt + 6x = V \end{cases} \Rightarrow x = 60.$$

Ответ: 60 и 90 м^3 .

2.438. Фирма планировала продать 216 изделий за несколько дней. Первые 3 дня изделия продавались согласно плану, а затем ежедневно продавалось на 8 изделий сверх плана, поэтому за день до срока было продано 232 изделия. Сколько изделий планировалось продавать ежедневно?

Решение.

Пусть планировалось продавать x изделий ежедневно в течение t дней. Тогда из условия имеем:

$$\begin{cases} xt = 216, \\ 3x + (t-4)(x+8) = 232 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xt = 216, \\ xt + 8t - x = 264 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xt = 216, \\ x = 8t - 48 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 6t - 27 = 0, \quad t = 9, \quad x = 24.$$

Ответ: 24.

2.439. Два оператора должны набрать 80 страниц текста на компьютерах. Если первый оператор начнет набирать текст через 3 ч после второго, то каждый из них наберет по половине текста. Если же они начнут работать одновременно, то через 5 ч останутся не набранными 15 страниц. За какое время может набрать текст каждый оператор по отдельности?

Решение.

Предположим, что 1-й оператор может набрать текст за x (ч), а второй — за y (ч). Первый оператор набирает одну страницу за $\frac{x}{80}$ (ч), а второй — за $\frac{y}{80}$ (ч). Скорость работы операторов: 1-го — $\frac{80}{x}$ (стр./ч), 2-го — $\frac{80}{y}$ (стр./ч). По

$$\text{условию получаем: } \begin{cases} \frac{40y}{80} - \frac{40x}{80} = 3, \\ \frac{80}{x} \cdot 5 + \frac{80}{y} \cdot 5 = 80 - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6, \\ \frac{80}{x} + \frac{80}{x+6} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 16. \end{cases}$$

Ответ: 10 и 16 ч.

2.440. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, выполняют всю работу за 7,5 ч, первый, третий и пятый — за 5 ч, первый, третий и четвертый — за 6 ч, четвертый, второй и пятый — за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все пять человек, работая вместе?

Решение.

Если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — производительность 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и 5-го рабочих соответственно, то из условия получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{15}, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_5} = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

К удвоенному последнему уравнению системы прибавим все остальные. В итоге имеем

$$3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, искомый промежуток времени $t = 3$ ч.

Ответ: 3 ч.

2.441. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение $\frac{1}{4}$ времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба также в течение $\frac{1}{4}$ времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить $\frac{11}{24}$ полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

Решение.

Весь объем бассейна примем за 1. Пусть x, y (л) в час протекает по первой и второй трубе соответственно. По условию

получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} 2\frac{24}{60}x + 2\frac{24}{60}y = 1, \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}\right)x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)y = 1 - \frac{11}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Тогда для наполнения бассейна первой трубой в отдельности потребуется $\frac{1}{x} = 4$ ч, а второй трубой — $\frac{1}{y} = 6$ ч.

Ответ: 4 и 6 ч.

2.442. Длина окружности заднего колеса трактора в два раза больше длины окружности первого. Если окружность переднего колеса увеличить на 5 дм, а окружность заднего колеса уменьшить на 5 дм, то на расстоянии 150 м переднее колесо сделало бы на 15 оборотов больше заднего. Найти длину окружности каждого колеса.

Решение.

Пусть x (дм) — длина окружности переднего колеса трактора, тогда длина окружности заднего колеса — $2x$ (дм). Из

условия получаем: $\frac{1500}{x+5} - \frac{1500}{2x-5} = 15 \Leftrightarrow 100(x-10) = (2x-5)(x+5) \Rightarrow x^2 - 95x + 975 = 0 \Rightarrow x_1 = 15; x_2 = \frac{65}{2} = 32,5.$

Ответ: длина переднего колеса 15 или 32,5 (дм);

длина заднего колеса 30 или 65 (дм).

2.443. Часы показывают в некоторый момент на 2 мин меньше, чем следует, хотя и идут вперед. Если бы они показывали на 3 мин меньше, чем следует, но уходили бы в сутки вперед на $\frac{1}{2}$ мин больше, чем уходят, то верное время они показывали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки спешат эти часы?

Решение.

Если часы спешат на x (мин) в сутки, то они покажут верное время через $\frac{2}{x}$ суток. Если бы часы показывали на 3 мин меньше, а спешили бы на $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ мин, то они показали бы верное время через $\frac{3}{x + \frac{1}{2}}$ суток.

Из условия получаем: $\frac{3}{x+1} + 1 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0, x = \frac{1}{2} (x = -2 < 0)$.

Ответ: на 0,5 мин.

2.444. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого из них постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше второго. Если они начнут пробег с общего старта в одном направлении, то еще раз сойдутся через 720 с. Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый бегун?

Решение.

Если x_1, x_2 — скорости спортсменов, l — длина дорожки, то из условия получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{l}{x_2} - \frac{l}{x_1} = 10, \\ 720x_1 - 720x_2 = l \end{cases} \Rightarrow \frac{l}{x_1} = 80, \frac{l}{x_2} = 90.$$

Тогда первый спортсмен пробегает $\frac{1}{80}$ часть длины всей дорожки в секунду, а второй — $\frac{1}{90}$ часть.

Ответ: $\frac{1}{80}$ и $\frac{1}{90}$.

2.445. Дорога от A до B имеет длину 11,5 км и идет сначала в гору, а затем по ровному месту и в конце под гору. Пешеход, идя из A в B , прошел всю дорогу за 2 ч 54 мин, а на обратный путь он затратил 3 ч 6 мин. Известны скорости: в гору 3 км/ч, по ровному месту — 4 км/ч, под гору — 5 км/ч. На каком протяжении дороги идет по ровному месту?

Решение.

Пусть x — длина дороги по ровному месту, y — длина дороги в гору. Из условия получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{x}{4} + \frac{11,5 - (x+y)}{5} = 2\frac{9}{10}, \\ \frac{11,5 - (x+y)}{3} + \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 3\frac{1}{10}. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем $\frac{x}{4} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{x}{3} + \frac{11,5}{5} + \frac{11,5}{3} = \frac{29}{10} + \frac{31}{10} \Rightarrow x = 4$.

Ответ: 4 км.

2.446. В сквере посажены тополя и липы общим количеством больше 14. Если количество тополей увеличить вдвое, а количество лип на 18, то лип станет больше. Если же количество лип увеличить вдвое, не изменяя количества тополей, то тополей все равно будет больше. Сколько тополей и лип посажено на самом деле?

Решение.

Пусть x, y — количество тополей и лип соответственно. По условию имеем

систему неравенств:
$$\begin{cases} x + y > 14, \\ y + 18 > 2x, \\ x > 2y. \end{cases}$$

Построим на координатной плоскости прямые $x + y = 14$ (1), $y + 18 = 2x$ (2), $x = 2y$ (3) (см. рис.). Из рисунка очевидно, что единственная точка

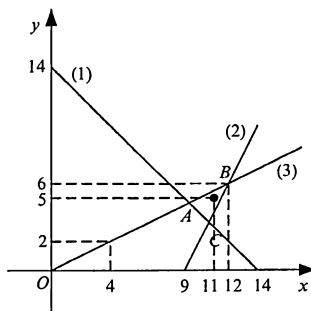


Рис. 2.5

с натуральными координатами, лежащая внутри треугольника ABC , а следовательно, удовлетворяющая системе неравенств, это точка $(11; 5)$.

Ответ: 11 тополей и 5 лип.

2.447. Рыболовы делили улов. Первый взял a штук и n -ю часть остатка. Второй взял $2a$ штук и n -ю часть остатка, а третий — $3a$ штук и n -ю часть остатка и т. д. Оказалось, что таким образом улов был разделен поровну. Сколько было рыбаков?

Решение.

Пусть x (штук) — количество улова, k — число рыбаков, x_i — полученное i -м рыбаком, где $i = 1, 2, \dots, k$. По условию $x_1 = x_2 = \dots = x_k$. Далее, имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \frac{x-a}{n} = x_2 = 2a + \frac{x-2a - \left(a + \frac{x-a}{n}\right)}{n} \Leftrightarrow an + x - a = 2an + x - 2a - a - \frac{x-a}{n} \Leftrightarrow \frac{x-a}{n} = \\ &= an - 2a \Leftrightarrow x = a(n-1)^2; \quad x_1 = a + \frac{a(n-1)^2 - a}{n} = a + \frac{a(n^2 - 2n)}{n} = a(n-1). \end{aligned}$$

$$\text{По условию } k = \frac{x}{x_1} = \frac{a(n-1)^2}{a(n-1)} = n-1.$$

Осталось проверить, что все рыбаки действительно получили поровну:

$$\begin{aligned} x_i &= ai + \frac{x - (i-1)x_1 - ai}{n} = \frac{ain + a(n-1)^2 - (i-1)a(n-1) - ai}{n} = \frac{a}{n}(in + n^2 - 2n + 1 - in + n + i - 1 - i) = \\ &= \frac{a}{n}(n^2 - n) = a(n-1) = x_1. \end{aligned}$$

Подсчитывая последовательно x_2, x_3, \dots, x_k , получаем, что все они равны x_1 , т.е. улов разделен поровну.

Ответ: $n-1$.

2.448. Имеется n мензурок с жидкостью. Из первой мензурки перелили $\frac{1}{n}$ -ую имеющейся там жидкости во вторую мензурку, затем из второй мензурки $\frac{1}{n}$, оказавшейся там после переливания из первой мензурки жидкости перелили в третью мензурку и т. д. Наконец, из n -й мензурки перелили $\frac{1}{n}$ -ую, оказавшейся в ней после переливания из предыдущей мензурки жидкости снова в первую мензурку. После этого в каждой мензурке оказалось по a см³ жидкости. Сколько жидкости было первоначально в каждой мензурке?

Решение.

Пусть x_k — первоначальное содержание жидкости в k -й мензурке. После того как из k -й мензурки (при $k \geq 2$) перелили $\frac{1}{n}$ -ую, в ней осталось по условию a см³, что составляет $\frac{n-1}{n}$ -ую от находившейся там жидкости до переливания. Таким образом, после переливания из $(k-1)$ -й мензурки в k -й было $\frac{an}{n-1}$ см³. Аналогично в $(k-1)$ -й мензурке перед переливанием из нее жидкости было $\frac{an}{n-1}$ см³, т.е. из нее в k -ю перелили $\frac{an}{n-1}$ см³ (рассуждения верны при $k \geq 3$).

Отсюда имеем $\frac{a}{n-1} + x_k = \frac{an}{n-1}$ при $k \geq 3 \Rightarrow x_k = a$ при $k \geq 3$.

Далее, $\frac{x_1}{n} + x_2 = \frac{an}{n-1}$ (после первого переливания) и $\frac{a}{n-1} + \frac{n-1}{n} x_1 = a$ (после последнего переливания), следовательно,

$$x_1 = \frac{n(n-2)a}{(n-1)^2}, \quad x_2 = \frac{(n^2 - 2n + 2)a}{(n-1)^2}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{n(n-2)a}{(n-1)^2}$, $x_2 = \frac{(n^2 - 2n + 2)a}{(n-1)^2}$, $x_3 = \dots = x_n = a$ (см³).

2.449. Вклад из a долларов положен в банк под $p\%$ годовых. В конце каждого года вкладчик берет b долларов. Через сколько лет после взятия соответствующей суммы остаток будет втрое больше первоначального вклада?

Решение.

В конце первого года вклад увеличился на $\frac{ap}{100}$ долларов, следовательно, после того как вкладчик забрал b долларов,

он составляет сумму $S_1 = a \left(1 + \frac{p}{100} \right) - b = qa - b$, где $q = 1 + \frac{p}{100}$.

В конце второго года вклад составит сумму $S_2 = S_1 q - b = (qa - b)q - b = q^2 a - b(1 + q)$,

а в конце третьего года — сумму $S_3 = S_2 q - b = q^3 a - b(1 + q + q^2)$.

Аналогичными рассуждениями получаем, что в конце n -го года вклад составит сумму

$$S_n = q^n a - b(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \frac{ap - 100b}{p} \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n + \frac{100b}{p}.$$

По условию задачи $S_n \geq 3a$, следовательно, $n \geq \frac{\lg(3ap - 100b) - \lg(ap - 100b)}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$.

Задача имеет смысл, если сумма вклада возрастает, т.е. если $ap > 100b$.

Ответ: $n \geq \frac{\lg(3ap - 100b) - \lg(ap - 100b)}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$.

2.450. В одном сосуде содержится a л $p\%$ -го раствора кислоты, а в другом — b л $q\%$ -го раствора той же кислоты. Из каждого сосуда отлили по одинаковому количеству литров и взятое из первого вылили во второй, а взятое из второго вылили в первый. Сколько литров было взято из каждого сосуда, если в сосудах оказался раствор одинаковой концентрации?

Решение.

Предположим, что из каждого сосуда отлили по x л раствора. Тогда в первом сосуде осталось $\frac{(a-x)p}{100}$ л кислоты, а во

втором — $\frac{(b-x)q}{100}$ л. Далее, в первый сосуд добавили $\frac{xq}{100}$ л кислоты, а во второй — $\frac{xp}{100}$ л. Полученные растворы

должны иметь одинаковые концентрации, следовательно,

$$\frac{1}{a} \left(\frac{(a-x)p}{100} + \frac{xq}{100} \right) = \frac{1}{b} \left(\frac{(b-x)q}{100} + \frac{xp}{100} \right) \Leftrightarrow bp(a-x) + bqx = aq(b-x) + apx \Leftrightarrow x(a+b)(p-q) = ab(p-q).$$

Если $p = q$, то x — любое; если $p \neq q$, то $x = \frac{ab}{a+b}$.

Ответ: $x = \frac{ab}{a+b}$ при $p \neq q$; при $p = q$ x — любое.

2.451. Среднегодовой процент прироста населения из года в год остается постоянным. Если бы годового процент прироста увеличился на p , то через n лет численность населения была бы в два раза больше, чем при обычных условиях. Найти годовой процент прироста населения.

Решение.

Пусть x — среднегодовой процент прироста населения. Если в начале первого года количество населения a человек, то к началу второго года оно составит $a_1 = a + \frac{ax}{100} = a \left(1 + \frac{x}{100} \right)$ к началу третьего — $a_2 = a_1 \left(1 + \frac{x}{100} \right) = a \left(1 + \frac{x}{100} \right)^2$, к началу n -го — $a \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{n-1}$, а к его концу — $a \left(1 + \frac{x}{100} \right)^n$.

Если годового прирост будет $(x+p)$ процентов, то число населения к концу n -го года составит $a \left(1 + \frac{x+p}{100} \right)^n$. По условию во втором случае численность населения в два раза больше, чем в первом. Таким образом, имеем:

$$a \left(1 + \frac{x+p}{100} \right)^n = 2a \left(1 + \frac{x}{100} \right)^n \Leftrightarrow 1 + \frac{x+p}{100} = \sqrt[n]{2} \left(1 + \frac{x}{100} \right) \Leftrightarrow (\sqrt[n]{2} - 1)x = p - 100(\sqrt[n]{2} - 1) \Leftrightarrow x = \frac{p - 100(\sqrt[n]{2} - 1)}{\sqrt[n]{2} - 1}$$

при $p - 100(\sqrt[n]{2} - 1) > 0$.

Ответ: $x = \frac{p - 100(\sqrt[n]{2} - 1)}{\sqrt[n]{2} - 1}$ при $p - 100(\sqrt[n]{2} - 1) > 0$.

2.452. Сплав из меди и цинка весом a кг при погружении в воду потерял в своем весе b кг. Определить количество меди и цинка в этом сплаве, если известно, что медь теряет в воде p процентов своего веса, а цинк — $q\%$.

Решение.

Предположим, что x, y — количество меди и цинка в сплаве соответственно. По условию $x + y = a$. При погружении в воду медь потеряет в весе $\frac{xp}{100}$ (кг), цинк — $\frac{yq}{100}$ (кг), а весь сплав — b (кг).

Таким образом, $\begin{cases} x + y = a, \\ \frac{px}{100} + \frac{qy}{100} = b \end{cases} \Rightarrow x = \frac{aq - 100b}{q - p}, y = \frac{100b - ap}{q - p}, q \neq p.$

Ответ: $x = \frac{aq - 100b}{q - p}$ (кг), $y = \frac{100b - ap}{q - p}$ (кг) при $q \neq p$.

2.453. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно S км, вышли одновременно два пешехода; в тот же момент из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Проехав путь S/k (от B к A), велосипедист встретил первого пешехода, затем, проехав $2/3$ всего пути, он встретил второго пешехода. На каком расстоянии L от них в момент встречи находился первый пешеход?

Решение.

Пусть x — скорость первого пешехода, y — скорость велосипедиста. Тогда в момент их встречи имеем:

$$\frac{S - \frac{S}{k}}{x} = \frac{S}{ky} \Rightarrow x = (k-1)y.$$

Время, которое потратил велосипедист от момента встречи с первым пешеходом до момента встречи со вторым

$$t = \frac{S}{y} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{k} \right).$$

За это время первый пешеход прошел от момента встречи с велосипедистом расстояние $xt = S \frac{(k-1)(2k-3)}{3k}$.

Таким образом, расстояние L , на котором находился первый пешеход от второго в момент встречи того с велосипедистом,

$$\text{равно } \frac{S(k-1)(2k-3)}{3k} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{k} \right) S = \frac{(2k-3)S}{3}.$$

Отсюда $k \geq \frac{3}{2}$ и $L \geq \frac{2S}{3}$ (первый пешеход далее пункта B не движется). Так как $\frac{(2k-3)}{3} S \leq \frac{2}{3} S$, то $k \geq \frac{5}{2}$.

$$\text{Ответ: } L = \frac{(2k-3)S}{3} \text{ при } \frac{3}{2} \leq k \leq \frac{5}{2};$$

$$L = \frac{2S}{3} \text{ при } k \geq \frac{5}{2}.$$

2.454. Пассажир, опоздавший на t часов на свой поезд, решил сначала догнать его на такси. Однако через некоторое время он пересел на автобус, заплатив за билет a р., и прибыл на одну из станций одновременно с поездом. Рассчитав скорость поезда, он обнаружил, что если бы продолжал ехать на такси, то догнал бы поезд станцией раньше, затратив при этом на b р. меньше. Какова скорость поезда и сколько времени пассажир ехал на такси, если скорость такси ϑ_1 , скорость автобуса ϑ_2 , стоимость проезда одного километра на такси a_1 р., а на автобусе a_2 р.?

Решение.

Пусть x — время поездки на такси, y — средняя скорость поезда. Тогда $\frac{a}{a_2}$ — расстояние, которое проехал пассажир на

автобусе, $\frac{a}{a_2 \vartheta_2}$ — время поездки на автобусе; $(\vartheta_1 - y)$ — относительная скорость такси и автобуса по отношению к поезду.

$$\text{Из условия имеем } (\vartheta_1 - y)x + (\vartheta_2 - y) \frac{a}{a_2 \vartheta_2} = yt.$$

На такси пассажир проехал $\vartheta_1 x$ (км) и потратил $a_1 \vartheta_1 x$ (р.). Если бы он продолжал ехать на такси, то потратил бы

$$(a_1 \vartheta_1 x + a - b) \text{ (р.)}, \text{ а поездка заняла бы } \frac{yt}{\vartheta_1 - y} \text{ (ч.)}. \text{ Отсюда } (a_1 \vartheta_1 x + a - b) = \frac{yt}{\vartheta_1 - y} \vartheta_1 a.$$

$$\text{Решаем систему уравнений: } \begin{cases} (\vartheta_1 - y)x + (\vartheta_2 - y) \frac{a}{a_2 \vartheta_2} = yt, \\ a_1 \vartheta_1 x + a - b = \frac{yt}{\vartheta_1 - y} \vartheta_1 a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a_1 a - a_2 (a - b)}{a_1 a (\vartheta_1 - \vartheta_2)} \vartheta_2 t - \frac{a - b}{a_1 \vartheta_1}, \\ y = \frac{a_1 a - a_2 (a - b)}{a_1 \vartheta_1 - a_2 \vartheta_2 (a - b)} \vartheta_1 \vartheta_2. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{a_1 a - a_2(a-b)}{a_1 a(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \vartheta_2 t - \frac{a-b}{a_1 \vartheta_1},$$

$$y = \frac{a_1 a - a_2(a-b)}{a_1 \vartheta_1 - a_2 \vartheta_2(a-b)} \vartheta_1 \vartheta_2.$$

2.455. Из пункта A в пункт B выехала машина. Через t мин за ней выехала вторая машина. Двигаясь со скоростью v км/ч, она нагнала первую и повернула назад. В пункт A вторая машина прибыла одновременно с прибытием первой в пункт B . Найти скорость первой машины, если расстояние между A и B равно b км.

Решение.

Пусть скорость первой машины x (км/ч). Первая машина проходит расстояние b (км) за $\frac{b}{x}$ (ч), а вторая находится в пути

на t мин меньше, т.е. $\left(\frac{b}{x} - \frac{t}{60}\right)$ (ч). Половину времени, в течение которого вторая машина находится в движении, она

тратит на то, чтобы догнать первую, и проходит при этом путь $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{x} - \frac{t}{60}\right)v$ (км). На путь первой машины от момента

выхода из A до момента встречи тратится $\frac{b}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{x} - \frac{t}{60}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{x} + \frac{t}{60}\right)$ (ч), за это время машина пройдет расстояние

$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{x} + \frac{t}{60}\right)x$ (км). Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{x} - \frac{t}{60}\right)v = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{x} + \frac{t}{60}\right)x \Rightarrow x = \frac{-(60b + tv) + \sqrt{(60b + tv)^2 + 240bvt}}{2t}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{(60b + tv)^2 + 240bvt} - (60b + tv)}{2t} \text{ (км/ч)}.$$

2.456. В один из двух сосудов, каждый емкостью по 6 л, налито 4 л 70%-го раствора кислоты, а во второй 3 л 90%-го раствора кислоты. Сколько раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился раствор концентрации $a\%$?

Решение.

По условию в первом сосуде содержится 2,8 л кислоты. Если из второго сосуда переливают в первый x (л) раствора, то при этом переливается $0,9x$ (л) кислоты. Таким образом, приходим к уравнению $\frac{2,8 + 0,9x}{4 + x} = \frac{a}{100} \Rightarrow x = \frac{280 - 4a}{a - 90}$.

Учитывая емкость сосудов, получаем $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{280 - 4a}{a - 90} \leq 2 \Leftrightarrow 70 \leq a \leq \frac{230}{3}$.

$$\text{Ответ: } x = \frac{280 - 4a}{a - 90}, \text{ где } 70 \leq a \leq \frac{230}{3}.$$

2.457. Бассейн наполняется из двух кранов. Сначала первый кран был открыт $\frac{1}{k}$ -й часть того времени, за которое

наполняет бассейн второй кран. Затем второй кран был открыт $\frac{1}{k}$ -й часть того времени, за которое наполняет бассейн

первый кран. После этого оказалось наполненной $\frac{1}{n}$ -ая часть бассейна. Оба крана вместе наполняют бассейн за a ч.

Сколько времени требуется для наполнения бассейна каждым краном отдельно?

Решение.

Пусть первый кран наполняет бассейн за x (ч), а второй кран — за y (ч). Тогда за 1 ч первый кран наполняет $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а второй кран $\frac{1}{y}$ часть бассейна. Из условия получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{k}y\frac{1}{x} + \frac{1}{k}x\frac{1}{y} = \frac{1}{n}, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2n}(2n + k \pm \sqrt{k^2 - 4n^2}), \\ y = \frac{a}{2n}(2n + k \pm \sqrt{k^2 - 4n^2}), \end{cases} \text{ где } k \geq 2n.$$

Ответ: $x = \frac{a}{2n}(2n + k \pm \sqrt{k^2 - 4n^2})$,

$y = \frac{a}{2n}(2n + k \pm \sqrt{k^2 - 4n^2})$.

2.458. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих m (кг) и n (кг), отрезано по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

Решение.

Пусть x (кг) — масса каждого из отрезанных кусков, y и z — проценты меди в первом и втором кусках соответственно.

Тогда в первом куске содержится $\frac{xy}{100}$ (кг), во втором — $\frac{xz}{100}$ (кг), а в остатках — $\frac{(n-x)y}{100}$ и $\frac{(n-x)z}{100}$. В новых сплавах

будет содержаться меди — $\frac{xy}{100} + \frac{(n-x)z}{100}$ (кг), $\frac{xz}{100} + \frac{(m-x)y}{100}$ (кг), причем первый из этих новых сплавов весит n (кг), а

второй — m (кг), процентное содержание меди по условию одинаково.

Получаем уравнение

$$\frac{\frac{xy}{100} + \frac{(n-x)z}{100}}{n} \cdot 100 = \frac{\frac{xz}{100} + \frac{(m-x)y}{100}}{m} \cdot 100 \Leftrightarrow \frac{xy + (n-x)z}{n} = \frac{xz + (m-x)y}{m} \Leftrightarrow xm(y-z) + xn(y-z) = mn(y-z)$$

Так как $y \neq z$ (по условию), то имеем $xm + xn = mn \Rightarrow x = \frac{mn}{m+n}$.

Ответ: $\frac{mn}{m+n}$.

2.459. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же сплавы в отношении 2:3. Из скольких частей каждого из сплавов можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении $a:b$?

Решение.

Предположим, что новый сплав состоит из x частей первого сплава и из y частей второго сплава. Тогда в новом сплаве

будет $\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}$ частей первого металла и $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5}$ частей второго металла, поэтому получаем

$$\frac{\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}}{\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5}} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{5x+6y}{10x+9y} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\frac{5x}{y} + 6}{\frac{10x}{y} + 9} = \frac{a}{b} \quad (x > 0, y > 0) \Leftrightarrow 5(b-2a)\frac{x}{y} = 3(3a-2b).$$

Пусть $b = 2a$, тогда уравнение решений не имеет.

Если $b \neq 2a$, то $\frac{x}{y} = \frac{3(3a-2b)}{5(b-2a)}$. $\frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{3(3a-2b)}{5(b-2a)} > 0$.

Имеем два следующих случая:

- 1) $\begin{cases} 3a-2b > 0, \\ b-2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < \frac{3a}{2}, \\ b > 2a, \end{cases} \quad \emptyset;$
- 2) $\begin{cases} 3a-2b < 0, \\ b-2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}a < b < 2a.$

Ответ: из $3(2b-3a)$ частей первого сплава и из $5(2a-b)$ частей второго сплава, где $\frac{3}{2}a < b < 2a, a > 0, b > 0$.

2.460. По одной и той же окружности движутся два тела в одну и ту же сторону. Длина окружности равна a (м). Одно тело проходит окружность за p (мин) быстрее другого тела. Найти, сколько метров в минуту проходит каждое тело, зная, что они при движении сходятся каждые q (мин).

Решение.

Пусть x (м/мин) — скорость первого тела, которое проходит окружность за $\frac{a}{x}$ (мин). Второе тело проходит окружность за $\left(\frac{a}{x} + p\right)$ (мин), а его скорость $\frac{a}{\frac{a}{x} + p}$ (м/мин). За q (мин) первое тело проходит путь xq (м), второе — $\frac{aq}{\frac{a}{x} + p}$ (м), причем

первое проходит на a (м) больше второго, так как за это время они сходятся. Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{aq}{\frac{a}{x} + p} + a = qx \Rightarrow x = \frac{ap \pm \sqrt{a^2 p^2 + 4a^2 pq}}{2pq}.$$

Учитывая, что $x > 0$, получаем скорости тел $x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4pq}}{2pq} a$ (м/мин), $\frac{a}{\frac{a}{x} + p} = \frac{\sqrt{p^2 + 4pq} - p}{2pq} a$ (м/мин).

Ответ: $\frac{p + \sqrt{p^2 + 4pq}}{2pq}$ и $\frac{\sqrt{p^2 + 4pq} - p}{2pq}$ (м/мин).

2.461. Известно, что масса вещества при радиоактивном распаде уменьшается по закону $m = m_0 2^{-\frac{t}{\lambda}}$, где m и m_0 — количество вещества в моменты времени t и 0, λ — постоянная, зависящая от природы вещества.

Из двух радиоактивных веществ первого было взято в два раза меньше, чем второго. Через двадцать лет общая масса обоих веществ уменьшилась в восемь раз. Найти период полураспада обоих веществ, если период полураспада второго вещества в два раза меньше, чем первого вещества.

Решение.

Если m_0 — начальное количество первого вещества, а λ_1 и λ_2 — постоянные, соответствующие первому и второму веществам, то начальное количество второго вещества будет $2m_0$. Если x и $2x$ — периоды полураспада второго и первого веществ, то из условия имеем:

$$\begin{cases} m_0 \cdot 2^{-\lambda_1 \cdot 2x} = \frac{m_0}{2}, \\ 2m_0 \cdot 2^{-\lambda_2 x} = m_0, \\ m_0 \cdot 2^{-\lambda_1 \cdot 20} + 2m_0 \cdot 2^{-\lambda_2 \cdot 20} = \frac{3m_0}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-2\lambda_1 x+1} = 1, \\ 2^{-\lambda_2 x+1} = 1, \\ 8 \cdot 2^{-20\lambda_1} + 16 \cdot 2^{-20\lambda_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2x}, \lambda_2 = \frac{1}{x}; 16 \cdot 2^{-\frac{20}{x}} + 8 \cdot 2^{-\frac{10}{x}} - 3 = 0.$$

Пусть $y = 2^{-\frac{10}{x}} > 0$, тогда получаем уравнение $16y^2 + 8y - 3 = 0$, $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = -\frac{3}{4} < 0$.

Отсюда $2^{-\frac{10}{x}} = 2^{-2} \Leftrightarrow -\frac{10}{x} = -2$, $x = 5$.

Ответ: 10,5 лет.

3. ФУНКЦИИ

3.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

3.1.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Соответствие, при котором каждому натуральному числу n соответствует элемент a_n числового множества A , называется *бесконечной числовой последовательностью*; число a_n называется *членом* последовательности, а n — номером члена последовательности.

Числовая последовательность обозначается так:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \text{ или } \{a_n\}.$$

Суммой, произведением, разностью и частным двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются соответственно последовательности $\{s_n\}$, $\{p_n\}$, $\{r_n\}$, $\{q_n\}$, члены которых находятся по формулам:

$$S_n = a_n + b_n; p_n = a_n \cdot b_n; r_n = a_n - b_n; q_n = \frac{a_n}{b_n}, b_n \neq 0; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность часто задается формулой, с помощью которой по номеру члена последовательности находится этот член. Такая формула называется *формулой общего члена* числовой последовательности.

Так, например формулы $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$; $b_n = \cos n$ задают чис-

ловые последовательности $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \dots$ и $\cos 1, \cos 2, \cos 3, \dots$

Последовательность может также задаваться *рекуррентным способом*. В этом случае задаются несколько первых членов

последовательности и указывается способ вычисления последующих членов последовательности через предыдущие.

Пример 3.1. $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Эта последовательность $\{a_n\}$ называется *последовательностью чисел Фибоначчи*.

Существуют и другие способы задания последовательностей. Так, например последовательность приближенных значений иррационального числа $\sqrt{2}$ имеет следующий вид: $1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots$. Обычно члены последовательности действительных чисел изображаются как точки числовой прямой.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существуют такие числа m и M , что

$$m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей*, если $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

убывающей, если $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

неубывающей, если $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

невозрастающей, если $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*.

3.1.2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 3.1. Число a называют *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$:

$$|a_n - a| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{a_n\}$, записывается следующим образом: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Неравенство (3.1) может быть переписано в виде

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Промежуток $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ называется ε -окрестностью точки a . Таким образом, число a называется пределом последовательности, если все члены последовательности $\{a_n\}$ с номерами $n > N(\varepsilon)$ принадлежат ε -окрестности числа a .

Если $\{a_n\}$ — сходящаяся последовательность, то найдутся два таких числа m и M , что для всех n

$$m \leq a_n \leq M.$$

Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно не убывает и ограничена сверху членом b , то она имеет предел a , причем $a \leq b$.

Если последовательность монотонно не возрастает и ограничена снизу числом b , то она имеет предел a , причем $b \leq a$.

Критерий Коши: последовательность $\{a_n\}$ имеет предел тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \begin{cases} n \geq N \\ m \geq N \end{cases} \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

3.1.3. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Известны следующие *теоремы о пределах последовательностей*.

1) Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то только один (единственность предела).

2) Если $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = c$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

3) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $a > b$ ($a < c$), то все члены последовательности, начиная с некоторого, также будут больше b (меньше c).

4) Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы, то их сумма (разность) также имеет предел, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

5) Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы, то их произведение также имеет предел, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Отсюда и из теоремы 2 следует, что постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

6) Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы, причем $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, то и их частное также имеет предел, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

3.1.4. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Последовательность, у которой задан первый член a_1 , а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d , называется *арифметической прогрессией*.

Число d называется *разностью* арифметической прогрессии. Если $d > 0$, то прогрессия называется *возрастающей*, если $d < 0$ — *убывающей*.

Последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда $\forall n > 1$ выполняется равенство

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}).$$

Члены арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3 и a_{n-k} ($n > k$) связаны между собой равенством

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k}).$$

Если заданы первый член a_1 и разность арифметической прогрессии d , то n -й член арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Сумма первых n членов S_n арифметической прогрессии $\{a_n\}$ находится по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно задать ее первый член a_1 и разность d .

3.1.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Последовательность, у которой задан первый член $b_1 \neq 0$, а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q , называется *геометрической прогрессией*.

Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $\forall n > 1$ выполняется равенство

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Члены геометрической прогрессии b_n, b_{n+k} ($n > k$) связаны между собой равенством

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}.$$

Если заданы первый член b_1 и знаменатель геометрической прогрессии q , то n -й член геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Сумма первых n членов S_n геометрической прогрессии $\{b_n\}$ находится по формуле

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

При $q = 1$, $S_n = b_1 \cdot n$.

Если $|q| < 1$, то существует предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Число S называется *суммой членов* бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно задать ее первый член b_1 и знаменатель q .

3.2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

3.2.1. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ

Пусть X и Y — два подмножества множества действительных чисел R .

Правило f , при котором каждому числу $x \in X$ соответствует единственное число $y \in Y$, называется *числовой функцией* аргумента x и записывается:

$$y = f(x).$$

При этом x называется *аргументом* или *независимой переменной*, y — *функцией* или *зависимой переменной*, множество X — *областью определения* функции $f(x)$ (записывается: $X = D(f)$), множество $Y = f(X)$ — *множеством значений* функции $f(x)$ (записывается: $Y = E(f)$) или *областью изменения*.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *равными*, если соблюдаются следующие равенства:

$$1) D(f) = D(g); \quad 2) f(x) = g(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Суммой (разностью) двух функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных соответственно на $D(f)$ и $D(g)$, называется функция $S(x) = f(x) \pm g(x)$, $\forall x \in D(f) \cap D(g)$.

Аналогично определяется *произведение и частное двух функций*, причем частное двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено только для тех значений $x \in D(f) \cap D(g)$, при которых функция $g(x)$ не обращается в нуль.

Предположим, что заданы функции $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ и $E(\varphi) \subset D(f)$. Тогда определяется функция

$$y = f(\varphi(t))$$

с областью определения $D(\varphi)$, которая называется *сложной функцией* от t . Отметим, что сложную функцию также называют *композицией функций*.

3.2.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Функции могут задаваться различными способами. Рассмотрим некоторые из них.

1) *Аналитический способ* заключается в том, что указывается формула, по которой можно вычислить единственное значение $f(x)$ для каждого $x \in D(f)$. При этом функция может быть задана явным образом — формулой $y = f(x)$, неявным образом уравнением $F(x, y) = 0$ или параметрически — системой уравнений

$$\begin{cases} y = \alpha(t), \\ x = \beta(t). \end{cases}$$

2) *Графический способ* состоит в следующем. Предположим, что на координатной плоскости xOy задано такое множество точек $\Gamma = \{(x; y)\}$, что на любой прямой, параллельной оси ординат, лежит не более одной точки этого множества. Тогда множество Γ определит функцию $y = f(x)$, если абсциссе любой точки этого множества поставить в соответствие ее ординату.

Само множество $\Gamma = \{(x; f(x))\}$ называется *графиком функции* $f(x)$.

Если функция задана графически, то ее область определения $D(f)$ совпадает с множеством абсцисс всех точек ее графика, а область изменения $E(f)$ — с множеством ординат.

3) Следующий способ задания функций называется *табличным*. При исследовании зависимости между величинами опытным путем часто на основании имеющихся данных составляются таблицы, содержащие некоторые отдельные значения аргумента и соответствующие им значения функции. Получение аналитического задания функции с помощью таких таблиц составляет задачу *интерполяции*.

Существуют и другие способы задания функций. В частности, известная *функция Дирихле* вводится ее словесным описанием: $D(x) = 0$ для всех иррациональных чисел и $D(x) = 1$ для всех рациональных.

3.2.3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

Функция $y = f(x)$ называется *четной (нечетной)*, если соблюдаются следующие условия

$$1) \forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f);$$

$$2) \forall x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = f(x) \text{ (} f(-x) = -f(x) \text{)}.$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции — относительно начала координат.

Отметим, что сумма, разность, произведение и частное двух четных функций есть четная функция; сумма и разность двух нечетных функций — нечетная функция, а произведение и частное — четная функция.

Функция, которая не является ни четной, ни нечетной, называется функцией *общего вида*.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что

$$1) \forall x \in D(f) \Rightarrow x - T, x + T \in D(f);$$

$$2) \forall x \in D(f) \Rightarrow f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Обычно под *периодом* функции T_0 понимают наименьший из всех положительных периодов, если он существует. В этом случае произвольный период

$$T = kT_0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0.$$

Функция Дирихле $D(x)$ является примером периодической функции, не имеющей наименьшего положительного периода.

Для построения графика периодической функции достаточно построить ее график на полуинтервале $(0, T_0]$ и затем перенести его вдоль оси Ox на каждый полуинтервал $(kT_0, (k+1)T_0]$, где k — любое целое число.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует такое число $M(m)$, что $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$), $\forall x \in D(f)$.

Функция, ограниченная сверху и снизу, называется просто *ограниченной*, т.е. $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in D(f)$.

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке $(a; b)$. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в промежутке $(a; b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a; b) x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; *убывающей* — $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$; *неубывающей* — $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$; *невозрастающей* — $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Рассмотрим теперь понятие *обратной* функции. Предположим, что для данной функции $y = f(x)$ каждому значению $x \in D(f)$ соответствует единственное значение $y \in E(f)$. Тогда определяется обратное соответствие, при котором каждому значению $y \in E(f)$ соответствует одно и только одно значение $x \in D(f)$, для которого $f(x) = y$. Таким образом, получается функция $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$, которая называется *обратной* функции f и обозначается f^{-1} .

Свойства взаимно обратных функций:

$$1) f(f^{-1}(y)) = y \text{ и } f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D(f), \forall y \in E(f).$$

Функции f и f^{-1} являются *взаимно обратными*;

$$2) D(f) = E(f^{-1}) \text{ и } E(f) = D(f^{-1});$$

3) графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 3.1);

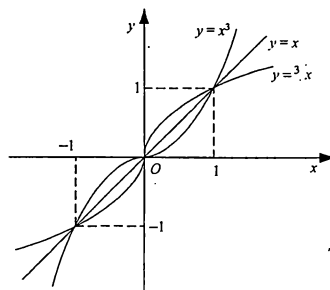


Рис. 3.1

4) если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве $D(f)$ и имеет обратную функцию f^{-1} , то обратная функция возрастает (убывает) на множестве $D(f^{-1})$.

3.2.4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение 3.2. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, где $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$, x_n сходится к a , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к A .

Отметим, что число a может и не принадлежать $D(f)$. При этом применяется такая форма записи:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Часто используется следующее, эквивалентное определение.

Определение 3.3. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in D(f)$, $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Известны следующие *теоремы о пределах функций*.

1) Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$, то этот предел единственен.

2) Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow a$ и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены для одних и тех же значений x в некоторой окрестности точки a , то существуют пределы суммы, произве-

дения и частного (в последнем случае предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ в достаточно малой окрестности точки a и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0$) при $x \rightarrow a$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}.$$

3) Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c$, $b \leq c$, то $f(x) \leq \varphi(x)$ в некоторой окрестности точки a .

4) Предел постоянной функции C совпадает с C и постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C, \quad \lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Имеют место следующие важные пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e, \quad e = 2,71828\dots;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

3.2.5. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Предположим, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна* в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в каждой точке промежутка $(a; b)$, то функция называется *непрерывной* на этом промежутке.

Известны следующие *теоремы о непрерывных функциях*.

1) Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в промежутке $(a; b)$ и непрерывны в точке $x_0 \in (a; b)$, то в этой точке также непрерывны функции

$$f(x) \pm \varphi(x), f(x) \cdot \varphi(x), \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

(последняя функция непрерывна, если $\varphi(x_0) \neq 0$).

2) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, а функция $z = \varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна в точке $x = x_0$.

3) Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в интервале $(a; b)$, а числа $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то внутри этого промежутка найдется по крайней мере одна точка $x = c$ такая, что $f(c) = 0$.

4) Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в интервале $(a; b)$, то на этом отрезке она ограничена, т.е. найдутся числа m и M такие, что

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a; b].$$

Рассмотрим так называемые *основные элементарные функции*: $y = x^n, n \in \mathbb{Z}$; $y = \sin x, y = \cos x, y = \lg x, y = \operatorname{ctg} x$; $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccotg} x$; $y = a^x, a > 0$; $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.

Функции, которые получаются из основных элементарных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, композиции, называются *элементарными*.

Оказывается, что интервалы непрерывности элементарных функций в точности совпадают с их интервалами области определения.

3.3. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

3.3.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Предположим, что $f(x)$ — некоторая функция, определенная на интервале $(a; b)$, и $x_0 \in (a; b)$. Если x — произвольная точка из промежутка $(a; b)$, то разность $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением аргумента* функции $f(x)$, а разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0 .

Определение 3.4. *Производной* функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения (если он существует) приращения Δy функции $y = f(x)$ к приращению Δx аргумента при Δx , стремящемся к нулю.

Для производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 используют различные обозначения:

$$y'(x_0), f'(x_0), y'_x, \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом,

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Отметим, что если функция $y = f(x)$ имеет производную $y'(x)$ в точке x , то она непрерывна. Обратное утверждение неверно.

Например, функция $y = |x|$ непрерывна на всей числовой оси и не имеет производной при $x = 0$.

3.3.2. ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема 3.1 (производная суммы двух функций). Если в некоторой точке x функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные, то существует производная суммы (разности) этих функций в точке x , причем

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x),$$

$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x),$$

Доказательство. Пусть $y(x) = u(x) + v(x)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} [y(x + \Delta x) - y(x)] = \\ &= \frac{1}{\Delta x} [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)] = \\ &= \frac{1}{\Delta x} [u(x + \Delta x) - u(x)] + \frac{1}{\Delta x} [v(x + \Delta x) - v(x)] = \\ &= \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Используя теорему о пределе суммы функций, получаем

$$\begin{aligned} (u + v)' = y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v' \end{aligned}$$

Для разности $u(x) - v(x)$ доказательство аналогично. **QED.**

Методом математической индукции можно доказать эту теорему для любого конечного числа слагаемых, т.е.

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n)' = u_1' + u_2' + \dots + u_n'.$$

Теорема 3.2 (производная произведения (частного) двух функций). Если в некоторой точке x функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные, то существует производная произведения (частного) этих функций в точке x , причем

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (3.2)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \Delta u = u(x + \Delta x) - u(x), \\ \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u, \\ v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v. \end{cases}$$

Пусть $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} [u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)] = \\ &= \frac{1}{\Delta x} [(u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x)] = \\ &= \frac{1}{\Delta x} [u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v] = \\ &= u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Используя теоремы о пределах, получаем

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' = y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x] = \\ &= u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = \\ &= u(x)v'(x) + v(x)u'(x) + u'(x) \cdot v'(x) \cdot 0 = \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \end{aligned}$$

QED.

Теорема 3.3 Производная постоянной функции равна нулю и постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(C)' = 0, \quad (Cf(x))' = C f'(x).$$

Доказательство. Если $y = C$, то $\Delta y = C - C = 0$ и

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0. \text{ По формуле (3.2) получаем}$$

$$(Cf(x))' = (C)'f(x) + C \cdot (f(x))' = C f'(x).$$

QED.

Теорема 3.4 Если в точке x функция $\varphi(x)$ имеет производную $\varphi'(x)$, а в точке $u = \varphi(x)$ функция $f(u)$ имеет производную $f'(u)$, то производная от функции $f(\varphi(x))$ существует в точке x , причем $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

3.3.3. Производные основных элементарных функций

$$1) f(x) = c, f'(x) = 0;$$

$$2) f(x) = x^\alpha, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$3) f(x) = a^x, f'(x) = a^x \ln a, a > 0; f(x) = e^x, f'(x) = e^x;$$

$$4) f(x) = \log_a x, f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, x > 0, 0 < a \neq 1;$$

$$f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0;$$

$$5) f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x;$$

$$6) f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x;$$

$$7) f(x) = \operatorname{tg} x, f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$8) f(x) = \operatorname{ctg} x, f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$9) f(x) = \arcsin x, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$10) f(x) = \arccos x, f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$11) f(x) = \operatorname{arctg} x, f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$12) f(x) = \operatorname{arccotg} x, f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

3.3.4. Уравнение касательной и нормали к графику функции, заданной в явном виде (ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ)

Предположим, что $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ — две какие-либо точки графика непрерывной функции $y = f(x)$, причем точка M_0 фиксирована, а точка M стремится к точке M_0 , перемещаясь по кривой (рис. 3.2).

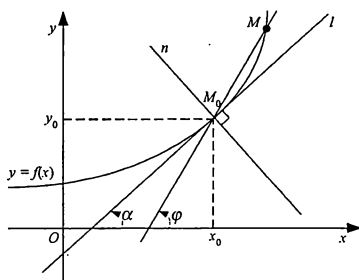


Рис. 3.2

Предельное положение секущей M_0M (если оно существует) при неограниченном стремлении точки M по кривой к точке M_0 называется *касательной* к кривой в точке M_0 , а сама точка M_0 называется *точкой касания* или *точкой прикосновения*.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0 , тогда уравнение касательной l к графику $f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Значение производной $f'(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла α , образованного касательной l и положительным направлением оси абсцисс:

$$k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Нормалью n к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной в этой точке.

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Так как угловые коэффициенты k_1 и k_2 взаимно перпендикулярных прямых удовлетворяют условию $k_1 \cdot k_2 = -1$, то при $f'(x) \neq 0$ уравнение нормали n к графику $f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ можно записать так:

Если $f'(x_0) = 0$, то касательная параллельна оси Ox , поэтому нормаль параллельна оси Oy , и ее уравнение принимает вид $x = x_0$.

3.3.5. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Предположим, что некоторая материальная точка движется прямолинейно под действием некоторых сил и известен закон ее движения $s = s(t)$, где $s(t)$ — расстояние до некоторой начальной точки отсчета в каждый момент времени t .

Тогда мгновенную скорость $v(t)$ и мгновенное ускорение $a(t)$ движущейся материальной точки находят по формулам:

$$v(t) = s'(t), \quad a(t) = v'(t).$$

3.3.6. УСЛОВИЯ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМЫ.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена и имеет производную в интервале $(a; b)$.

Заметим также, что функция $f(x) = x$ имеет минимум в точке $x = 0$, хотя производная в этой точке не существует.

Если $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a; b)$, то функция $f(x)$ — возрастающая в промежутке $(a; b)$; если $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a; b)$, то $f(x)$ — убывающая в промежутке $(a; b)$.

Достаточное условие существования экстремума функции $f(x)$ определяет следующая теорема.

Сформулированные условия являются достаточными, но не необходимыми. Так, функция $y = x^3$ возрастает, хотя в точке $x = 0$ $y'(0) = (3x^2)_{x=0} = 0$.

Теорема 3.6. Предположим, что в некоторой δ -окрестности точки x_0 функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ положительна слева и отрицательна справа от точки x_0 . Тогда x_0 — точка максимума функции $f(x)$.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум (максимум), если найдется δ -окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 , принадлежащая области определения $f(x)$, такая, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta), x \neq x_0, f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$).

Если же $f'(x)$ отрицательна слева и положительна справа от точки x_0 , то x_0 — точка минимума функции $f(x)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а соответственные значения функции в этих точках — *экстремальными значениями* функции.

Отметим, что в самой точке экстремума x_0 производная $f'(x)$ может и не существовать (например, $f(x) = |x|, x_0 = 0$).

Необходимое условие существования экстремума функции определяет следующая теорема.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, на котором $f(x)$ определена и непрерывна, необходимо найти все максимальные (минимальные) значения функции в промежутке $(a; b)$, выбрать из них наибольшее (наименьшее) и сравнить полученное значение с $f(a)$, $f(b)$. Наибольшее (наименьшее) из этих чисел и будет наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Теорема 3.5 (теорема Ферма). Предположим, что функция $f(x)$ имеет производную в промежутке $(a; b)$ и в точке $x_0 \in (a; b)$ — экстремум. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Если функция $f(x)$ имеет на промежутке $[a; b]$ единственную точку экстремума $x = x_0$, то $f(x_0)$ будет наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если x_0 — точка максимума (минимума).

Отметим, что это условие не является достаточным. Например, для функции $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, но функция $f(x)$ — возрастающая, следовательно, в точке $x = 0$ экстремума нет.

3.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

3.4.1. СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Исследование функции и построение ее графика обычно проводится по следующей схеме:

- 1) находят область определения $D(f)$ функции $f(x)$;
- 2) исследуют функцию на четность, нечетность, периодичность;
- 3) находят точки пересечения графика функции с осью Ox и знаки $f(x)$, решая уравнение $f(x) = 0$ и неравенства $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, а также точку пересечения кривой с осью Oy , определяя $f(0)$;
- 4) если область определения функции содержит промежутки $[a; +\infty)$ или $(-\infty; b]$, то исследуют поведение функции «на бесконечности», подсчитывая пределы:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$$

5) находят производную $f'(x)$ функции $f(x)$;

6) определяют критические точки, промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения функции;

7) строят график;

8) находят множество значений $E(f)$, проектируя точки графика на ось Oy .

При исследовании конкретных функций некоторые из перечисленных пунктов могут опускаться. Например, из всех элементарных функций только тригонометрические функции являются периодическими.

3.4.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Предположим, что известен график функции $y = f(x)$.

- 1) График функции $y = f(x) + a$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на a единиц вверх, если $a > 0$, и на a единиц вниз, если $a < 0$ (рис. 3.3).

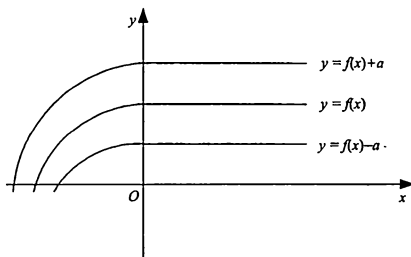


Рис. 3.3

- 2) График функции $y = f(x - a)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на a единиц вправо, если $a > 0$, и на a единиц влево, если $a < 0$ (рис. 3.4).

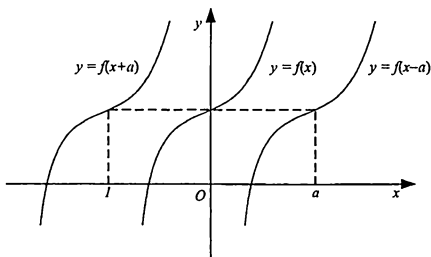


Рис. 3.4

- 3) График функции $y = -f(x)$ получается симметрией графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox (рис. 3.5).

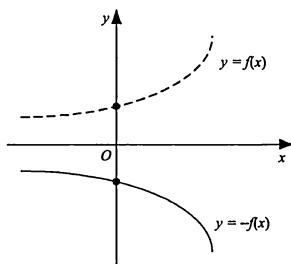


Рис. 3.5

4) График функции $y = f(-x)$ получается симметрией графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy (рис. 3.6).

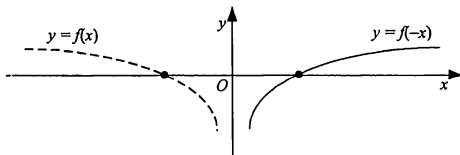


Рис. 3.6

5) График функции $y = |f(x)|$ строится с помощью графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика, где $f(x) \geq 0$, остается без изменения, а часть графика, где $f(x) < 0$, отображается симметрично относительно оси Ox с нижней на верхнюю полуплоскость (рис. 3.7).

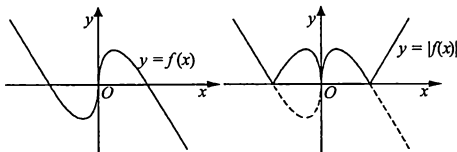


Рис. 3.7

6) График функции $y = f(|x|)$ симметричен относительно оси Oy , так как эта функция четная. Таким образом, график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$, а при $x < 0$ получается из графика $f(x)$, построенного для $x \geq 0$, симметрией относительно оси Oy (рис. 3.8).

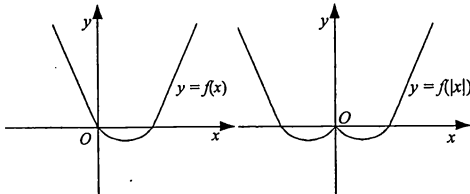


Рис. 3.8

7) График функции $y = af(x)$, $a > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением его в a раз от оси Ox ,

если $a > 1$, и сжатием его в $\frac{1}{a}$ раз к оси Ox , если $0 < a < 1$ (рис. 3.9).

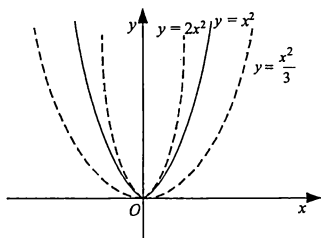


Рис. 3.9

8) График функции $y = f(ax)$, $a > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием его в a раз к оси Oy , если $a > 1$, и

растяжением его в $\frac{1}{a}$ раз от оси Oy , если $0 < a < 1$ (рис. 3.10).

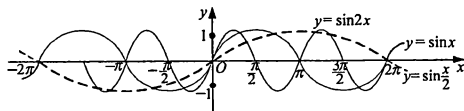


Рис. 3.10

3.4.3. Свойства функции $y = ax + b$ и ЕЕ ГРАФИК

Линейной называется функция вида $y = ax + b$, где a и b — любые действительные числа.

Свойства функции:

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел \mathbb{R} , так как $ax + b$ имеет смысл для всех x из \mathbb{R} .

2) Функция $f(x) = ax + b$ — четная, если $a = 0$; нечетная, если $b = 0$; общего вида, если $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Доказательство.

а) Если $a = 0$, то $f(-x) = f(x) = b$, $x \in \mathbb{R}$, и функция является четной.

6) Если $b = 0$, то $f(-x) = a(-x) = -ax = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и функция является нечетной.

в) Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $f(-x) = -ax + b \neq ax + b = f(x)$, т.е. функция — общего вида. QED.

3) При $a = 0$ и $b = 0$ функция равна нулю для всех x . При $a = 0$, $b \neq 0$ функция не обращается в нуль. При $a \neq 0$, $ax + b = 0$ при $x = -\frac{b}{a}$.

При $a > 0$, $y = ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$, $x \in (-\frac{b}{a}; +\infty)$,

$y = ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$, $x \in (-\infty; -\frac{b}{a})$.

При $a < 0$, $y > 0$ для $x \in (-\infty; -\frac{b}{a})$, $y < 0$ для $x \in (-\frac{b}{a}; +\infty)$.

4) При $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

При $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

5) Линейная функция непрерывна и $y' = a$ для всех x .

6) При $a > 0$ линейная функция возрастает, а при $a < 0$ убывает для всех $x \in \mathbb{R}$. При $a = 0$, $f(x) = b$ функция постоянна. Линейная функция не имеет экстремумов ни при каких значениях a и b .

7) Графиком линейной функции является прямая линия, совпадающая с касательной, проведенной к графику функции в произвольной точке:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x) = a.$$

Отметим, что функция $y = ax + b$ может иметь своим графиком любую прямую координатной плоскости Oxy , за исключением вертикальных (рис. 3.11).

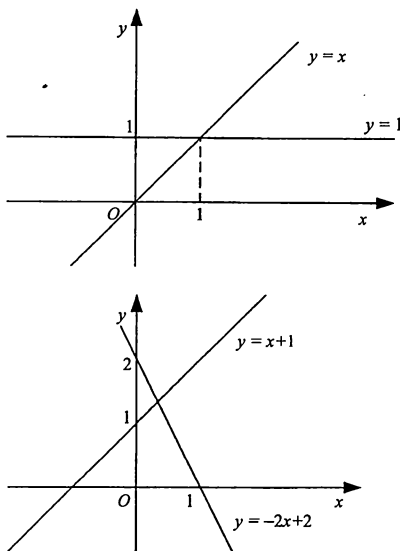


Рис. 3.11

При $b = 0$ получаем прямую пропорциональность $y = ax$, ее графиком является прямая, проходящая через начало координат.

8) Множество значений $E(f) = \mathbb{R}$ при $a \neq 0$, множество значений $E(f) = \{b\}$ при $a = 0$.

3.4.4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Предположим, что заданы две линейные функции $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, графиками которых являются соответствующие прямые. Тогда возможны следующие случаи взаимного расположения этих прямых на координатной плоскости:

1) если $k_1 = k_2 = k$, $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны, так как система уравнений $\begin{cases} y = kx + b_1, \\ y = kx + b_2 \end{cases}$ не имеет решений при $b_1 \neq b_2$;

2) если $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$, то прямые совпадают. Система уравнений $\begin{cases} y = kx + b, \\ y = kx + b \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений;

3) если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются в некоторой точке. Система уравнений $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

3.4.5. Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ и ее график

Функция вида $y = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, называется *функцией обратной пропорциональности*, а ее график — *гиперболой*.

Свойства функции:

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) функция $f(x) = \frac{k}{x}$ — нечетная, так как $f(-x) = -\frac{k}{x} = -f(x)$, $\forall x \in D(y)$, следовательно, график $f(x)$ симметричен относительно точки O ;

3) график функции осей координат не пересекает и расположен в первом и третьем координатных углах, если $k > 0$, и во втором и четвертом координатных углах, если $k < 0$;

4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x} = 0$;

5) функция непрерывна и $y' = \left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2} \Rightarrow y' > 0$ при $k < 0$, $y' < 0$ при $k > 0$;

6) при $k < 0$ функция $f(x)$ монотонно возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$, а при $k > 0$ функция $f(x)$ монотонно убывает на этих же промежутках. Экстремумов функция не имеет;

7) график функции изображен на рис. 3.12 при $k > 0$ и на рис. 3.13 при $k < 0$;

8) множество значений $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

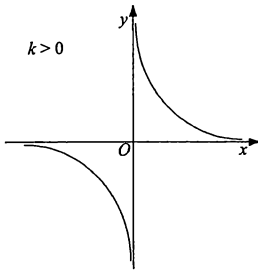


Рис. 3.12

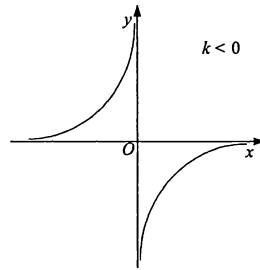


Рис. 3.13

3.4.6. Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график

Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией*, а ее график — *параболой*.

Проведя выделение полного квадрата, можно переписать $f(x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$:

1) $D(y) = \mathbb{R}$;

2) если $b = 0$, то $f(x) = ax^2 + c$ — четная функция, так как $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; если $b \neq 0$, то функция — общего вида;

3) $f(x) = 0$ при $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$. Если $D < 0$, то парабола ось Ox не пересекает, $f(0) = c$;

при $a > 0$ $f(x) > 0$ для $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, $f(x) < 0$ для $x \in (x_1; x_2)$;

при $a < 0$ $f(x) > 0$ для $x \in (x_1; x_2)$, $f(x) < 0$ для $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ при $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ при $a < 0$;

5) функция непрерывна и $f'(x) = 2ax + b$, $f'(x) = 0$

$$\text{при } x_0 = -\frac{b}{2a};$$

6) при $a > 0$ функция $f(x)$ убывает для $x \in (-\infty; -\frac{b}{2a})$, возрастает для $x \in (-\frac{b}{2a}; +\infty)$ и в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$ имеет мини-

мум. Наименьшее значение функции $y_0 = f(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

При $a < 0$ функция $f(x)$ возрастает для $x \in (-\infty; -\frac{b}{2a})$, убывает для $x \in (-\frac{b}{2a}; +\infty)$ и в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$ имеет максимум.

Наибольшее значение функции $y_0 = f(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$;

7) график функции симметричен относительно вертикальной прямой $x = -\frac{b}{2a}$.

Различные случаи расположения парабол приведены на рис. 3.14;

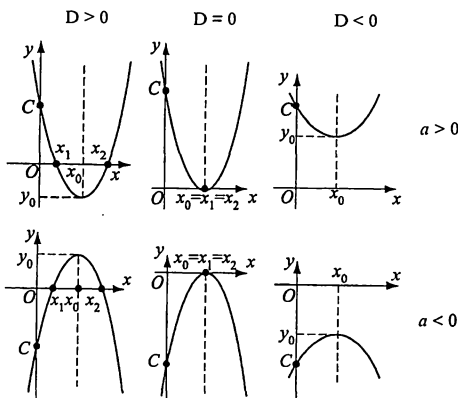


Рис. 3.14

8) область изменения функции: при $a > 0$ $E(y) = [y_0; +\infty)$,

при $a < 0$ $E(y) = (-\infty; y_0]$, где $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

3.4.7. Свойства функции $y = \sqrt{x}$ и ЕЕ ГРАФИК

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2$, $x \in [0; +\infty)$. Эта функция монотонно возрастающая, следовательно, каждому значению $x \in D(\varphi)$ соответствует единственное значение $\varphi(x) \in E(\varphi) = [0; +\infty)$. Таким образом, функция φ имеет обратную функцию $f = \varphi^{-1}$, которая обозначается $f(x) = \sqrt{x}$.

Используя свойства взаимно обратных функций, получаем следующие свойства функции $f(x) = \sqrt{x}$:

1) $D(f) = E(f) = [0; +\infty)$;

2) функция общего вида;

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$;

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

5) $f(x)$ — непрерывная функция,

6) функция \sqrt{x} монотонно возрастает на $D(f)$;

7) график функции $f(x)$ симметричен графику функции $\varphi(x)$ относительно прямой $y = x$ (рис. 3.15).

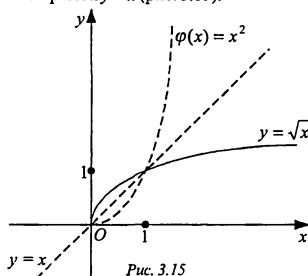


Рис. 3.15

3.4.8. Свойства функции $y = ax^n$ ($a \neq 0, n \in \mathbb{N}$) и ее график

Функция вида $y = ax^n, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$, называется *степенной*.

Рассмотрим два случая.

Первый случай. $n = 2k, y = ax^{2k}$. Имеют место следующие свойства функции:

- 1) $D(y) = \mathbb{R}$;
- 2) функция четная, график симметричен относительно оси Oy ;
- 3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, y > 0$ при $a > 0, x \neq 0; y < 0$ при $a < 0, x \neq 0$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ при $a > 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ при $a < 0$;
- 5) $f(x)$ непрерывна, $f'(x) = 2akx^{2k-1}$.

6) При $a > 0$ функция убывает для $x \in (-\infty; 0)$, возрастает для $x \in (0; +\infty)$, $x = 0$ — точка минимума; при $a < 0$ функция возрастает для $x \in (-\infty; 0)$, убывает для $x \in (0; +\infty)$, $x = 0$ — точка максимума;

7) график функции называется параболой (рис. 3.16);

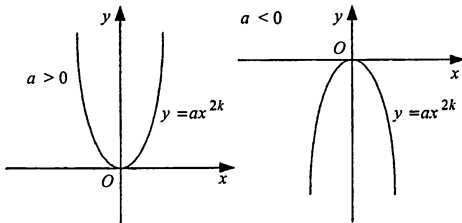


Рис. 3.16

8) $E(y) = (-\infty; 0]$ при $a < 0, E(y) = [0; +\infty)$ при $a > 0$.

Второй случай. $n = 2k + 1, y = ax^{2k+1}$. Рассмотрим следующие свойства функции:

- 1) $D(y) = \mathbb{R}$;
- 2) функция нечетная, график симметричен относительно точки $O(0; 0)$;
- 3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. При $a > 0, f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.
При $a < 0, f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0, f(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$;
- 4) при $a > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
при $a < 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

5) $f(x)$ непрерывна, $f'(x) = a(2k+1)x^{2k} = 0$ при $x = 0$;

$f'(x) > 0$ при $a > 0, x \neq 0, f'(x) < 0$ при $a < 0, x \neq 0$;

6) функция возрастает в $D(y)$ при $a > 0$ и убывает при $a < 0$; экстремумов $f(x)$ не имеет;

7) график функции называется параболой (рис. 3.17);

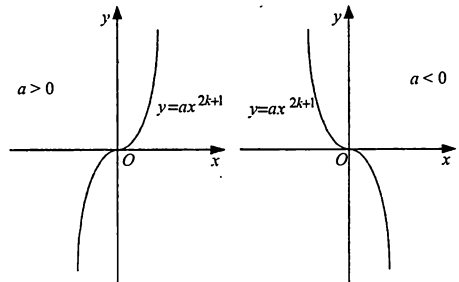


Рис. 3.17

8) $E(y) = \mathbb{R}$.

3.4.9. Свойства функции $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) и ее график

Функция вида $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$, называется *показательной*, а число a *основанием степени*.

Свойства функции $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$):

- 1) $D(f) = \mathbb{R}$;

2) функция общего вида;

3) $f(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$;

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ при $a > 1$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ при } 0 < a < 1;$$

5) $f(x)$ — непрерывная, $f'(x) = a^x \ln a$, $f'(x) < 0$ при $0 < a < 1$, $f'(x) > 0$ при $a > 1$;

6) функция монотонно убывает при $0 < a < 1$ и монотонно возрастает при $a > 1$ во всей области определения. Экстремумов $f(x)$ не имеет;

7) графики показательной функции изображены на рис. 3.18; 8) $E(f) = (0; +\infty)$.

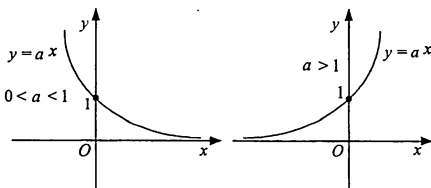


Рис. 3.18

3.4.10. ЛОГАРИФИМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Показательная функция имеет обратную функцию, которая называется *логарифмической* и обозначается $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$.

Число a называется *основанием* логарифмической функции; логарифмическую функцию с основанием 10 обозначают $\lg x$, а с основанием $e = 2,71828 \dots$ — $\ln x$.

Используя свойства взаимно обратных функций, получаем следующие свойства логарифмической функции $y = \log_a x$:

1) $D(y) = (0; +\infty)$;

2) функция общего вида;

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. При $0 < a < 1$ $f(x) > 0$ для $x \in (0; 1)$ и $f(x) < 0$ для $x \in (1; +\infty)$;

при $a > 1$, $f(x) < 0$ для $x \in (0; 1)$ и $f(x) > 0$ для $x \in (1; +\infty)$;

4) при $0 < a < 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, а при $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

5) $f(x)$ — непрерывная функция, $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$, $f'(x) < 0$ при

$0 < a < 1$, $f'(x) > 0$ при $a > 1$;

6) функция монотонно убывает при $0 < a < 1$ и монотонно возрастает при $a > 1$ во всей области определения. Экстремумов $f(x)$ не имеет;

7) график логарифмической и соответствующий график показательной функции симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 3.19);

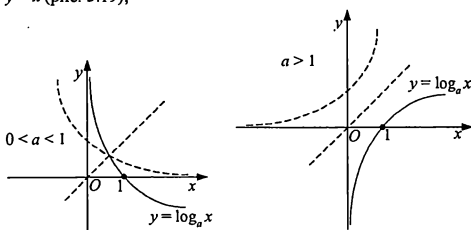


Рис. 3.19

8) $E(y) = \mathbb{R}$.

Согласно свойствам взаимно обратных функций получаем:

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0, 0 < a \neq 1.$$

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1.$$

3.5. ИНТЕГРАЛЫ

3.5.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на заданном промежутке числовой прямой, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x). \quad (3.3)$$

Любая первообразная функции $f(x)$ на данном промежутке имеет вид $F(x) + C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная, а C — произвольная постоянная. Это выражение называется *неопределённым интегралом* и записывается в виде

$$F(x) + C = \int f(x) dx.$$

Нахождение множества всех первообразных функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции.

С помощью производных основных элементарных функций получаем следующую *таблицу интегралов*:

$$1) \int 0 \cdot dx = C;$$

$$2) \int 1 \cdot dx = x + C;$$

$$3) \int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1);$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$5) \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$6) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$8) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$9) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$11) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

3.5.2. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Предположим, что $u'(x)$ — производная функции $u(x)$. Выражение $u'(x)dx$, где $dx = \Delta x$ — приращение аргумента функции $u(x)$, называется *дифференциалом* функции $u(x)$ и обозначается du :

$$du = u'(x) dx.$$

$$1) \int u'(x) dx = u(x) + C \text{ или } \int du = u + C.$$

2) Постоянный множитель можно вывести из-под знака интеграла:

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

3) Интеграл алгебраической суммы двух функций равен сумме интегралов слагаемых:

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx.$$

$$4) \text{ Если } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то}$$

$$\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C.$$

5) Интеграл вычисляется независимо от того, какой переменной записано подынтегральное выражение. Таким образом, если

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то}$$

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(u(x)) + C.$$

6) Формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

3.5.3. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Предположим, что f — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, S — площадь соответствующей криволинейной трапеции, т.е. фигуры, ограниченной графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ оси Ox и перпендикулярами, проведенными к оси Ox в точках a и b (рис. 3.20).

Если $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$ на интервале, содержащем отрезок $[a; b]$, то

$$S = F(b) - F(a).$$

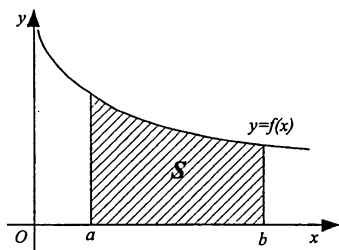


Рис. 3.20

Величина $F(b) - F(a)$ называется *определенным интегралом* от a до b функции $f(x)$ и записывается следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) называется формулой Ньютона – Лейбница.

При практическом вычислении определенного интеграла применяются те же методы (таблица интегралов), что и при вычислении неопределенного интеграла (*пределы* a и b интегрирования расставляются в той переменной, в которой производится интегрирование), а затем применяется формула (3.4).

3.5.4. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

Во многих случаях вычисление объема тела можно свести к вычислению определенного интеграла. Предположим, что имеется тело, которое ограничено некоторой поверхностью и плоскостями $x = a$ и $x = b$, перпендикулярными к оси Ox (рис. 3.21).

Рассмотрим секущую тело плоскость, перпендикулярную к оси Ox , проведенную в точке x . Предположим, что $S(x)$ — площадь полученного сечения (см. рис. 3.21), которая, вообще говоря, зависит от $x \in [a; b]$, т.е. является некоторой функцией $S(x)$. Если эта функция определена и непрерывна, то объем V данного тела находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (3.5)$$

В частности, если тело получается вращением криволинейной трапеции (рис. 3.22) вокруг оси Ox , то $S(x) = \pi y^2(x)$ (площадь круга радиусом $y(x)$), и объем этого тела равен

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx. \quad (3.6)$$

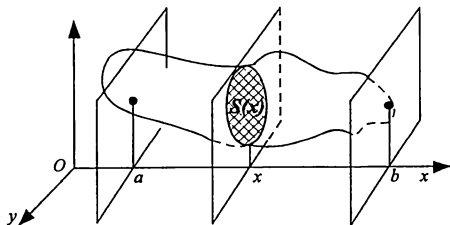


Рис. 3.21

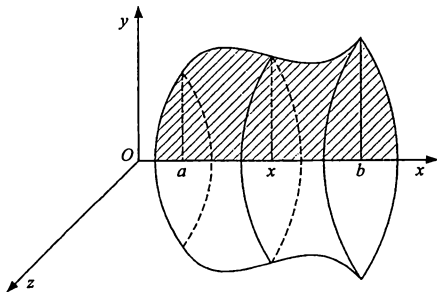


Рис. 3.22

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ТЕМА: ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

3.001. Последовательность $\{a_n\}$ задана формулой $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Найти a_1 ; a_{10} ; a_{n+2} ; $a_{n+2} - a_{n+1}$.

Решение.

$$a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2} = 1,5; \quad a_{10} = \frac{20 + 1}{10 + 1} = \frac{21}{11}; \quad a_{n+2} = \frac{2(n+2) + 1}{(n+2) + 1} = \frac{2n+5}{n+3};$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2n+5}{n+3} - \frac{2n+3}{n+2} = \frac{2n^2 + 5n + 4n + 10 - 2n^2 - 3n - 6n - 9}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)}.$$

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{3}{2}; \quad a_{10} = \frac{21}{11}; \quad a_{n+2} = \frac{2n+5}{n+3}; \quad a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{(n+3)(n+2)}.$$

3.002. Найти первые пять членов последовательности:

$$\text{а) } a_n = n^2 - 5n; \quad \text{б) } b_n = \frac{3n + (-1)^n}{4n}.$$

Решение.

$$\text{а) } a_1 = 1^2 - 5 = -4; \quad a_2 = 4 - 10 = -6; \quad a_3 = 9 - 15 = -6; \quad a_4 = 16 - 20 = -4; \quad a_5 = 0;$$

$$\text{б) } b_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}; \quad b_2 = \frac{6+1}{8} = \frac{7}{8}; \quad b_3 = \frac{9-1}{12} = \frac{2}{3}; \quad b_4 = \frac{12+1}{16} = \frac{13}{16}; \quad b_5 = \frac{15-1}{20} = \frac{7}{10}.$$

$$\text{Ответ: а) } a_1 = -4, a_2 = -6, a_3 = -6, a_4 = -4, a_5 = 0; \quad \text{б) } b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{7}{8}, \quad b_3 = \frac{2}{3}, \quad b_4 = \frac{13}{16}, \quad b_5 = \frac{7}{10}.$$

3.003. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1}^2 - na_{n-2}$ при $n \geq 3$. Найти a_5 .

Решение.

$$a_3 = a_2^2 - 3a_1 = 1 - 3 = -2, \quad a_4 = a_3^2 - 4a_2 = 4 - 4 = 0, \quad a_5 = a_4^2 - 5a_3 = 10.$$

$$\text{Ответ: } a_5 = 10.$$

3.004. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ при $n \geq 3$. Найти a_{90}, a_{999} .

Решение.

$a_3 = a_2 - a_1 = 1$. Складывая равенства $a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3}$ и $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, получаем, что $a_n = -a_{n-3}$ при $n \geq 4, a_n = a_{n-6}$ при $n \geq 7$. Отсюда имеем:

$$a_{90} = a_{15 \cdot 6} = \dots = a_6 = -a_3 = -1,$$

$$a_{999} = a_{990+9} = a_9 = a_3 = 1.$$

Ответ: $a_{90} = -1, a_{999} = 1$.

3.005. Предположим, что последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ ($\beta \neq 0$), а также заданы два первых члена a_1, a_2 этой последовательности и уравнение $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ имеет различные корни x_1 и x_2 . Доказать, что можно подобрать такие числа c_1 и c_2 , однозначно определяемые a_1 и a_2 , что для всех n $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$.

Решение.

Если x_1 и x_2 — различные корни уравнения $x^2 - \alpha x - \beta = 0$, то по теореме Виета $\alpha = x_1 + x_2, \beta = x_1 x_2$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ a_2 = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (\text{см. 2.172}), \text{ где } \Delta = x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 = x_1 x_2 (x_2 - x_1) = -\beta (x_2 - x_1) \neq 0.$$

Таким образом, если a_1, a_2 заданы, то c_1 и c_2 определяются по ним однозначно. По методу математической индукции, предполагая, что наша формула верна для $n = k-1, k-2$, покажем, что она верна для $n = k$:

$$\begin{aligned} a_k &= \alpha a_{k-1} + \beta a_{k-2} = \alpha (c_1 x_1^{k-1} + c_2 x_2^{k-1}) + \beta (c_1 x_1^{k-2} + c_2 x_2^{k-2}) = (x_1 + x_2)(c_1 x_1^{k-1} + c_2 x_2^{k-1}) - \\ &- x_1 x_2 (c_1 x_1^{k-2} + c_2 x_2^{k-2}) = c_1 x_1^k + c_1 x_1^{k-1} x_2 + c_2 x_1 x_2^{k-1} + c_2 x_2^k - c_1 x_2 x_1^{k-1} - c_2 x_1 x_2^{k-1} = c_1 x_1^k + c_2 x_2^k. \end{aligned}$$

Таким образом, формула верна для всех натуральных n .

QED.

3.006. Последовательность задана рекуррентным способом:

$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} (n \geq 3).$$

Найти для нее формулу общего члена.

Решение.

Используя решение 3.005, получаем $\alpha = 5, \beta = -6, x^2 - 5x + 6 = 0, x_1 = 2, x_2 = 3$. Далее рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = 2, \\ 4c_1 + 9c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}, \\ c_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что $a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot 3^n = 2^{n-1} + 3^{n-1}$.

Ответ: $a_n = 2^{n-1} + 3^{n-1}$.

3.007. Найти формулу общего члена последовательности чисел Фибоначчи:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Решение.

Используя решение 3.005, получаем $\alpha = \beta = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}c_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2 = 0, \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}c_1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}, \\ c_2 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что

$$a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}.$$

Ответ: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right).$

3.008. Предположим, что последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$, $\beta \neq 0$, заданы два первых члена a_1 и a_2 , дискриминант уравнения $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ равен нулю. Доказать, что можно подобрать такие числа c_1 и c_2 , однозначно определяемые a_1 и a_2 , что для всех n

$$a_n = (c_1 + c_2 n) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^n.$$

Решение.

Если x_1, x_2 — совпадающие корни уравнения $x^2 - \alpha x - \beta = 0$, то по теореме Виета $x_1 = x_2 = \frac{\alpha}{2}$, $\beta = -\frac{\alpha^2}{4} \neq 0$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 = (c_1 + c_2) \frac{\alpha}{2}, \\ a_2 = (c_1 + 2c_2) \frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{2a_1}{\alpha}, \\ c_1 + 2c_2 = \frac{4a_2}{\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{4a_1}{\alpha} - \frac{4a_2}{\alpha^2}, \\ c_2 = \frac{4a_2}{\alpha^2} - \frac{2a_1}{\alpha}. \end{cases}$$

Таким образом, если a_1 и a_2 заданы, то c_1 и c_2 определяются по ним однозначно. По методу математической индукции, предполагая, что наша формула верна для $n = k - 1$, $n = k - 2$, покажем, что она верна и для $n = k$.

$$\begin{aligned} a_k &= \alpha a_{k-1} + \beta a_{k-2} = \alpha(c_1 + c_2(k-1))\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k-1} - \frac{\alpha^2}{4}(c_1 + c_2(k-2))\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k-2} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k (2c_1 + 2c_2(k-1) - \\ &- c_1 - c_2(k-2)) = (c_1 + 2c_2k - 2c_2 - c_2k + 2c_2)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k = (c_1 + c_2k)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

Таким образом, формула верна для всех натуральных n .

QED.

3.009. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным способом:

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 3.$$

Найти для нее формулу n -го члена.

Решение.

Используя решение 3.008, получаем $\alpha = 4$, $\beta = -4$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x_1 = x_2 = 2$. Далее рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(c_1 + c_2) = 0, \\ 4(c_1 + 2c_2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2}, \\ c_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что $a_n = 2^n \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\right) = (n-1)2^{n-1}$.

Ответ: $a_n = (n-1)2^{n-1}$.

3.010. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ такова, что заданы два первых члена a_1 и a_2 и $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + d$, то последовательность $b_n = a_n - a_{n-1}$ удовлетворяет соотношению $b_n = \alpha b_{n-1} + \beta b_{n-2}$.

Решение.

По условию имеем $b_n = a_n - a_{n-1}$, $b_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$, $b_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-3}$, следовательно,

$$\alpha b_{n-1} + \beta b_{n-2} = \alpha a_{n-1} - \alpha a_{n-2} + \beta a_{n-2} - \beta a_{n-3} = a_n - a_{n-1} = b_n.$$

QED.

3.011. Доказать, что предел последовательности $\{a_n\}$, где $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, равен 1.

Решение.

По определению предела числовой последовательности $\{a_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ нужно найти такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow (n+1)\varepsilon > 1 \Leftrightarrow n\varepsilon > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Таким образом, если в качестве $N(\varepsilon)$ взять ближайшее справа к $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ натуральное число, то $n > N(\varepsilon) > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Leftrightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$
и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. QED.

Вычислить (3.012 – 3.018).

3.012. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n}{n^2 + n + 1}.$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{100n}{n}}{\frac{n^2 + n + 1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n + 1 + \frac{1}{n}} = 100 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + 1} = 0, \text{ так как } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ответ: 0.

3.013. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n + 5}{3 - 2n - 2n^2}.$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n + 5}{3 - 2n - 2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6n^2 + 3n + 5}{n^2}}{\frac{3 - 2n - 2n^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n} - 2} = \frac{6}{-2} = -3, \text{ так как } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Ответ: -3.

3.014. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 0$, получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Ответ: 0.

3.015. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1})(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1})}{(\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+2) - (n-1))(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1})}{(3n+4) - (3n+1)(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{4}{n}} + \sqrt{3 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

3.016. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n-1} + 7^{n-1}}{2^{n+1} + 3^{n+1} + 7^{n+1}}$.

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n-1} + 7^{n-1}}{2^{n+1} + 3^{n+1} + 7^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n + 4^{n-1} + 7^{n-1}}{7^{n+1}}}{\frac{2^{n+1} + 3^{n+1} + 7^{n+1}}{7^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^n + \frac{1}{49} \left(\frac{4}{7}\right)^{n-1} + \frac{1}{49}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{49},$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ при $0 < a < 1$.

Ответ: $\frac{1}{49}$.

3.017. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} \right)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} - \\ &- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3+1} - n)(\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2)}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2} = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

3.018. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^3 n}{n+5}.$

Решение.

Так как $-1 < \sin n < 1$, то $-\frac{1}{n+5} < \frac{\sin^3 n}{n+5} < \frac{1}{n+5}$. Учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n+5}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+5} = 0$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^3 n}{n+5} = 0$.

Ответ: 0.

3.019. Предположим, что для последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ $a_{n+1} < a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $0 < a < 1$.

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Решение.

По условию имеем ряд неравенств $a_{n+1} < a \cdot a_n$, $a_n < a \cdot a_{n-1}$, ..., $a_2 < a \cdot a_1$. Перемножая эти неравенства, получаем $a_{n+1} \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_2 < a^n (a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1) \Leftrightarrow a_{n+1} < a^n \cdot a_1$. Так как $0 < a < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 a^n = a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, следовательно и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

QED.

3.020. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Решение.

Рассмотрим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow n > 2$. Таким образом, при $n > 2$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{3}{4}$.

Так как предел последовательности не зависит от первых нескольких членов последовательности, то, используя решение 3.019, получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

QED.

3.021. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Решение.

Рассмотрим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$; $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow n+1 > 3 \Leftrightarrow n > 2$. Таким образом, при $n > 2$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{2}{3}$.

Так как предел последовательности не зависит от первых нескольких членов последовательности, то, используя решение 3.019, получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

QED.

3.022. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a > 0$.

Решение.

Рассмотрим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow n+1 > \frac{3}{2}a$. Очевидно, что всегда можно подобрать такое число

k , что при $n > k$, $n+1 > \frac{3}{2}a$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{2}{3}$. Так как предел последовательности не зависит от первых нескольких членов

последовательности, то, используя решение 3.019, получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

QED.

3.023. Найти сумму n членов последовательности, а также сумму всех ее членов (если она существует) при $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение.

Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

По определению сумма S всех членов последовательности находится по формуле $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$.

Ответ: $S_n = \frac{n}{n+1}$, $S = 1$.

3.024. Найти сумму первых n членов последовательности, а также сумму всех ее членов (если она существует) при

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}.$$

Решение.

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + B(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{(A+B)n + (A+2B)}{n^2 + 3n + 2}.$$

Отсюда получаем $(A+B)n + (A+2B) = 1$. Многочлены тождественно равны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих степенях неизвестного равны, следовательно:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A+2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1, \\ B=1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем $a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-2}{2(n+2)} = \frac{n}{2n+4}.$$

Далее находим сумму S всех членов этой последовательности: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $S_n = \frac{n}{2n+4}$, $S = \frac{1}{2}$.

3.025. Найти сумму первых n членов последовательности $\{a_n\}$, а также сумму всех ее членов (если она существует)

при $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Решение.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

Отсюда получаем $A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1) = 1$. Многочлены тождественно равны тогда и только тогда, когда их значения равны при всех значениях неизвестного, следовательно:

$$n=0 \Rightarrow 2A=1, A=\frac{1}{2}; n=-1 \Rightarrow -B=1, B=-1; n=-2 \Rightarrow 2C=1, C=\frac{1}{2}. \text{ Отсюда}$$

$$a_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right).$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} - \frac{1}{4} \frac{n}{n+2} = \frac{n(2n+4-n-1)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Находим сумму S всех членов этой последовательности:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}, S = \frac{1}{4}.$$

3.026. Найти сумму первых n членов последовательности $\{a_n\}$, а также сумму всех ее членов (если она существует) при $a_n = \frac{n-1}{n!}$.

Решение.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) = 1 - \frac{1}{n!} = \frac{n!-1}{n!}.$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n!} \right) = 1.$$

$$\text{Ответ: } S_n = \frac{n!-1}{n!}, S = 1.$$

3.027. Найти сумму первых n членов последовательности $\{a_n\}$, а также сумму всех ее членов (если она существует) при $a_n = (-1)^n$.

Решение.

Рассмотрим два случая:

$$1) n = 2k, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2k-1} + a_{2k} = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots - 1 + 1 = 0;$$

$$2) n = 2k + 1, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{2k-1} + a_{2k} + a_{2k+1} = -1 + 1 - \dots - 1 + 1 - 1 = -1.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ имеет предел, то только один, следовательно, не существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Ответ: $S_n = 0$ при $n = 2k$; $S_n = -1$ при $n = 2k + 1$; S — не существует.

3.028. Пусть дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с заданным первым членом a_1 и $a_n = a_{n-1} + d$. Доказать, что $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Решение.

По условию имеем $(n-1)$ равенств $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d, \dots, a_n = a_{n-1} + d$.

Складывая полученные равенства, находим $a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + (n-1)d \Rightarrow a_n = a_1 + d(n-1)$.

QED.

3.029. Пусть задана геометрическая прогрессия $\{b_n\}$ с заданным первым членом b_1 и $b_n = b_{n-1} \cdot q, b_1 \neq 0, q \neq 0$. Доказать, что $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Решение.

По условию имеем $(n-1)$ равенств $b_2 = b_1 q, b_3 = b_2 q, \dots, b_n = b_{n-1} q$, где b_1, b_2, \dots, b_n — отличны от нуля.

Перемножая полученные равенства, находим $b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot b_n = (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{n-1}) q^{n-1} \Rightarrow b_n = b_1 q^{n-1}$.

QED.

3.030. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и разностью d . Доказать, что сумма S_n первых n членов этой прогрессии находится по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Решение.

Докажем сначала, что $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$. Действительно, $a_{1+k} = a_1 + kd, a_{n-k} = a_1 + (n-k-1)d, k = 1, 2, \dots, n-1, a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + a_1 + kd + (n-1)d - kd = a_1 + a_n = 2a_1 + d(n-1)$. Далее, складывая два ниже записанных равенства, получаем

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n, S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1,$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n)n.$$

$$\text{Окончательно имеем } S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

QED.

3.031. Пусть $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия с первым членом $b_1 \neq 0$ и знаменателем $q \neq 1$. Доказать, что сумма S_n первых n членов этой прогрессии находится по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, и при $|q| < 1$, $q \neq 0$, существует сумма S всех членов геометрической прогрессии, которая находится по формуле $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Решение.

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n \Rightarrow qS_n = qb_1 + qb_2 + \dots + qb_{n-1} + qb_n = b_2 + b_3 + \dots + b_n + qb_n.$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем

$$qS_n - S_n = qb_n - b_1 \Leftrightarrow S_n(q - 1) = b_1q^n - b_1 \Rightarrow S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, следовательно, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 - b_1q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q}$.

QED.

3.032. Найти три первых числа a_1, a_2, a_3 арифметической прогрессии, если известно, что $a_1 + a_3 + a_5 = -12$, $a_1 a_3 a_5 = 80$.

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -12, \\ a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = -12, \\ a_1(a_1 + 2d)(a_1 + 4d) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = -4, \\ a_1(a_1 + 2d)(a_1 + 2d + 2d) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4 - 2d, \\ a_1(-4 + 2d) = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4 - 2d, \\ 16 - 4d^2 = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4 - 2d, \\ d^2 = 9. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = -3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_1 = -10, \\ d = 3. \end{cases}$$

Тогда для первого случая имеем: $a_1 = 2$, $a_2 = 2 - 3 = -1$, $a_3 = 2 - 6 = -4$, для другого — $a_1 = -10$, $a_2 = -7$, $a_3 = -4$.

Ответ: 1) 2, -1, -4; 2) -10, -7, -4.

3.033. Сумма S_n первых n членов последовательности $\{a_n\}$ находится по формуле $S_n = 2n^2 - 3n$. Доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией и найти ее первые три члена.

Решение.

$$a_1 = S_1 = 2 - 3 = -1, \quad a_1 + a_2 = S_2 = 8 - 6 = 2 \Rightarrow a_2 = 3, \quad a_2 - a_1 = 4.$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 3n - 2(n-1)^2 + 3(n-1) = 2n^2 - 3n - 2n^2 + 4n - 2 + 3n - 3 = 4n - 3.$$

$a_{n-1} = 4(n-1) - 3 = 4n - 7$. Таким образом, получаем $d = a_n - a_{n-1} = (4n - 3) - (4n - 7) = 4$, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью $d = 4$.

$$a_1 = -1, a_2 = 3, a_3 = 7.$$

Ответ: $a_1 = -1, a_2 = 3, a_3 = 7$.

3.034. Найти 4 числа между числами 4 и 40 так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

Решение.

По условию нужно найти a_2, a_3, a_4, a_5 , где $a_1 = 4, a_6 = 40$; $a_6 = a_1 + 5d = 4 + 5d = 40, d = \frac{36}{5} = 7,2$.

$$a_2 = 4 + 7,2 = 11,2; a_3 = 11,2 + 7,2 = 18,4; a_4 = 18,4 + 7,2 = 25,6; a_5 = 25,6 + 7,2 = 32,8.$$

Ответ: 11,2; 18,4; 25,6; 32,8.

3.035. Найти сумму всех двузначных натуральных чисел.

Решение.

Двузначные натуральные числа образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 10, d = 1, a_n = 99$.

Так как $a_n = a_1 + d(n-1)$, то получаем $99 = 10 + n - 1 \Rightarrow n = 90$. Далее,

$$S_{90} = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{10 + 99}{2} 90 = 4905.$$

Ответ: 4905.

3.036. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму 11 первых членов этой прогрессии.

Решение.

По условию имеем $a_3 + a_9 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 10d = 8 \Rightarrow a_1 + 5d = 4$. $S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = 4 \cdot 11 = 44$.

Ответ: 44.

3.037. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма этих чисел равна 3, а сумма их кубов равна 4. Найти эти числа.

Решение.

По условию $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 3a_1 + 3d = 3 \Rightarrow a_1 = 1 - d$. $a_2 = 1, a_3 = 1 + d$. Далее, имеем

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = (1-d)^3 + 1 + (1+d)^3 = 1 - 3d + 3d^2 - d^3 + 1 + 1 + 3d + 3d^2 + d^3 = 3 + 6d^2 = 4, d^2 = \frac{1}{6}, d = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Рассмотрим два случая:

$$1) d = -\frac{\sqrt{6}}{6}, a_1 = \frac{6+\sqrt{6}}{6}, a_2 = 1, a_3 = \frac{6-\sqrt{6}}{6};$$

$$2) d = \frac{\sqrt{6}}{6}, a_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{6}, a_2 = 1, a_3 = \frac{6+\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\frac{6-\sqrt{6}}{6}, 1, \frac{6+\sqrt{6}}{6}.$

3.038. Могут ли числа $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{8}$ быть некоторыми членами одной и той же арифметической прогрессии?

Решение.

Пусть $a_k = \sqrt{3}$, $a_m = 2$, $a_n = \sqrt{8}$ ($d > 0$), тогда $k < m < n$ и

$$2 = \sqrt{3} + (m-k)d, \sqrt{8} = \sqrt{3} + (n-k)d \Rightarrow \frac{m-k}{n-k} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{5}(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = \frac{1}{5}(4-2-6+3-3).$$

В этом равенстве слева стоит рациональное число, а справа иррациональное. Полученное противоречие показывает, что такого быть не может.

Ответ: нет.

3.039. Найти сумму S_{20} первых двадцати членов арифметической прогрессии, если $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

Решение.

$$a_6 + a_{15} = a_9 + a_{12} = 2a_1 + 19d = a_1 + a_{20} \Rightarrow 2(a_1 + a_{20}) = 20, a_1 + a_{20} = 10. \text{ Тогда } S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 100.$$

Ответ: 100.

3.040. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 2.

Решение.

Любое такое число $a = 3n + 2$, следовательно, ряд этих чисел $a_1 = 101, a_2 = 104, a_3 = 107, \dots, a_n = 998$ представляет собой арифметическую прогрессию с $d = 3$. Так как $a_n = 998 = 101 + 3(n-1) \Rightarrow n-1 = \frac{897}{3}, n = 300$, и сумма всех этих чисел равна $S_{300} = \frac{101+998}{2} \cdot 300 = 164850$.

Ответ: 164 850.

3.041. Доказать, что если положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$,

$\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ также образуют арифметическую прогрессию.

Решение.

По условию имеем $b - a = c - b = d$, $c - a = 2d$, где d — разность первоначальной арифметической прогрессии. Рассмотрим выражения

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}.$$

Если $d = 0$, то $a = b = c$ и $x_1 = x_2 = 0$. Пусть $d \neq 0$, тогда имеем:

$$x_1 = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{c - a} - \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{b - c} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{2d} - \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{d} = \frac{1}{2d} (\sqrt{c} - \sqrt{a} - 2\sqrt{c} + 2\sqrt{b}) = \frac{1}{2d} (2\sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{c});$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{d} - \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{2d} = \frac{1}{2d} (2\sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{c}). \quad \text{Получили, что } x_1 = x_2.$$

QED.

3.042. Решить уравнение $\frac{x-1}{5x} + \frac{x-2}{5x} + \dots + \frac{1}{5x} = 1$, где x — натуральное число.

Решение.

Из условия имеем $(x-1) + (x-2) + \dots + 1 = 5x$.

Левая часть этого уравнения есть сумма арифметической прогрессии, у которой $a_1 = x-1$, $d = -1$, $a_n = 1$,

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{1 - x + 1}{-1} + 1 = x - 1, \quad S_n = \frac{x-1+1}{2} (x-1) = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Получаем уравнение $\frac{x(x-1)}{2} = 5x \Leftrightarrow x-1=10, x=11 \ (x \neq 0)$.

Ответ: 11.

3.043. Доказать, что любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое между любыми двумя членами, равноудаленными от него.

Решение.

Пусть a_k — произвольный член арифметической прогрессии, тогда a_{k-l} , a_{k+l} — два равноудаленных от него члена. Тогда по формуле n -го члена имеем

$$a_{k-l} = a_1 + d(k-l-1), \quad a_{k+l} = a_1 + d(k+l-1).$$

Складывая эти равенства, получим

$$a_{k-l} + a_{k+l} = 2a_1 + 2d(k-1) = 2(a_1 + d(k-1)) = 2a_k \Leftrightarrow a_k = \frac{1}{2} (a_{k-l} + a_{k+l}).$$

QED.

3.044. Доказать, что если в арифметической прогрессии $S_m = S_n$, то $S_{m+n} = 0$, где S_{m+n} — сумма первых $(m+n)$ членов прогрессии.

Решение.

$$S_m = S_n \Leftrightarrow \frac{2a_1 + d(m-1)}{2} m = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n \Leftrightarrow 2a_1(m-n) + d(m^2 - m - n^2 + n) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (m-n)[2a_1 + d(m+n-1)] = 0 \Leftrightarrow 2a_1 + d(m+n-1) = 0 \quad (m \neq n).$$

Далее, получаем $S_{m+n} = \frac{2a_1 + d(m+n-1)}{2} (m+n) = 0$.

QED.

3.045. Доказать, что если числа $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ ($0 < x \neq 1$) образуют арифметическую прогрессию, то $n^2 = (kn)^{\log_k m}$.

Решение.

Используя решение 3.043, получаем

$$2 \log_m x = \log_k x + \log_n x \Leftrightarrow \frac{2}{\log_x m} = \frac{1}{\log_x k} + \frac{1}{\log_x n} \Leftrightarrow 2 = \frac{\log_x m}{\log_x k} + \frac{\log_x m}{\log_x n} \Leftrightarrow 2 = \log_k m + \log_n m \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_n n^2 = \log_n m + \log_n n^{\log_k m} \Leftrightarrow n^2 = mn^{\log_k m} = (kn)^{\log_k m}.$$

QED.

3.046. Доказать, что если в арифметической прогрессии $\frac{S_k}{S_n} = \frac{k^2}{n^2}$, то $\frac{a_k}{a_n} = \frac{2k-1}{2n-1}$.

Решение.

Так как $S_k = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} k$, $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$, то

$$\frac{S_k}{S_n} = \frac{(2a_1 + d(k-1))k}{(2a_1 + d(n-1))n} = \frac{k^2}{n^2} \Leftrightarrow (2a_1 + d(k-1))n = (2a_1 + d(n-1))k \Leftrightarrow 2a_1(n-k) + \\ + d((k-1)n - (n-1)k) = 0 \Leftrightarrow 2a_1(n-k) - d(n-k) = 0 \Leftrightarrow d = 2a_1 \quad (n \neq k).$$

Тогда имеем: $\frac{a_k}{a_n} = \frac{a_1 + d(k-1)}{a_1 + d(n-1)} = \frac{a_1 + 2a_1(k-1)}{a_1 + 2a_1(n-1)} = \frac{2k-1}{2n-1}$.

QED.

3.047. Четвертый член геометрической прогрессии больше второго на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

Решение.

По условию $b_4 - b_2 = 24$, $b_2 + b_3 = 6$, следовательно, получаем систему:

$$\begin{cases} b_1 q^3 - b_1 q = 24, \\ b_1 q + b_1 q^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^3 - q = 4 \\ q^2 + q = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{q^3 - 1}{q + 1} = 4 \Rightarrow q^2 - 4q - 5 = 0, q = 5 \quad (q = -1 \text{ — не подходит}).$$

$$b_1(q^2 + q) = 6 \Rightarrow b_1(25 + 5) = 6, b_1 = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $b_1 = \frac{1}{5}$; $q = 5$.

3.048. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна (-7) , а сумма средних членов равна 2.

Решение.

По условию имеем:

$$\begin{cases} b_1 + b_4 = -7, \\ b_2 + b_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q^3 = -7, \\ b_1 q + b_1 q^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q)(1 - q + q^2) = -7, \\ b_1 q(1 + q) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b_1(1 + q)(1 - q + q^2)}{b_1 q(1 + q)} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - q + q^2}{1 + q} = -\frac{7}{2} \Rightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0, q_1 = -\frac{1}{2}, q_2 = -2.$$

Так как $b_1 = \frac{2}{q^2 + q}$, то $b_1^1 = -8$, $b_1^2 = 1$.

Окончательно получаем два случая:

1) $-8, 4, -2, 1$; 2) $1, -2, 4, -8$.

Ответ: $1, -2, 4, -8$.

3.049. Разность между четвертым и первым членами геометрической прогрессии равна 52, а сумма первых трех членов прогрессии равна 26. Найти сумму первых четырех членов этой прогрессии.

Решение.

Из условия получаем:

$$\begin{cases} b_4 - b_1 = 52, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q^3 - b_1 = 52, \\ b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 26 \end{cases} \Rightarrow \frac{b_1(q^3 - 1)}{b_1(q^2 + q + 1)} = \frac{52}{26} \Rightarrow \frac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{q^2 + q + 1} = 2, q = 3.$$

Из первого уравнения системы находим: $b_1 = \frac{52}{q^3 - 1} = \frac{52}{26} = 2$.

$$S_4 = b_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 81 - 1 = 80.$$

Ответ: $S_4 = 80$.

3.050. Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Найти сумму первых пяти членов этой прогрессии.

Решение.

По условию имеем:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13, \\ b_1 b_2 b_3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 13, \\ b_1^3 q^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 13, \\ b_1 q = 3. \end{cases}$$

$$\frac{b_1(1 + q + q^2)}{b_1 q} = \frac{13}{3} \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0, \quad q_1 = \frac{1}{3}, q_2 = 3; \quad b_1^4 = 9, \quad b_1^2 = 1.$$

Так как прогрессия возрастающая, то $b_1 = 1$, $q = 3$. $S_5 = b_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121$.

Ответ: 121.

3.051. Сумма трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 13, а сумма их квадратов равна 91. Найти эти числа.

Решение.

По условию имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 91 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 13, \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1^2(1 + q + q^2)^2 = 13^2, \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 13 \cdot 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_1^2(1 + q^2 + q^4) + 2b_1^2 q(1 + q + q^2) = 169, \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 13 \cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 \cdot 7 + 2b_1 q \cdot 13 = 169, \\ b_1(1 + q + q^2) = 13 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q = 3, \\ b_1(1 + q + q^2) = 13 \end{cases} \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0, \quad q_1 = \frac{1}{3}, \quad q_2 = 3; \quad b_1^4 = 9, \quad b_1^2 = 1. \end{aligned}$$

Получаем: 1) 9, 3, 1; 2) 1, 3, 9.

Ответ: 1, 3, 9.

3.052. Доказать, что любой член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему пропорциональному между любыми членами, равноудаленными от него.

Решение.

Пусть b_k — произвольный член геометрической прогрессии, тогда b_{k-l}, b_{k+l} — два равноудаленных от него члена. По формуле n -го члена имеем: $b_{k-l} = b_1 q^{k-l-1}$, $b_{k+l} = b_1 q^{k+l-1}$.

Перемножая эти равенства, получим:

$$b_{k-l} \cdot b_{k+l} = b_1^2 q^{2(k-l)} \Rightarrow (b_1 q^{k-1})^2 = b_{k-l} \cdot b_{k+l} \Leftrightarrow b_k^2 = b_{k-l} \cdot b_{k+l} \Leftrightarrow |b_k| = b_{k-l} \cdot b_{k+l}. \quad \text{QED.}$$

3.053. Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех членов прогрессии в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

Решение.

Пусть $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_{2n-1}, b_{2n}$ — данная геометрическая прогрессия, имеющая знаменатель q , тогда $b_1, b_3, \dots, b_{2n-1}$ также составляют геометрическую прогрессию, но уже со знаменателем q^2 и числом членов n . По условию имеем:

$$b_1 \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = 3b_1 \frac{(q^2)^n - 1}{q^2 - 1} \Rightarrow (q^{2n} - 1)(q^2 - 1) = 3(q^{2n} - 1)(q - 1) \Rightarrow q + 1 = 3, \quad q = 2.$$

Ответ: 2.

3.054. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128, сумма всех членов равна 126. Найти число членов прогрессии.

Решение.

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n$ — данная геометрическая прогрессия, имеющая знаменатель q . По условию имеем:

$$\begin{cases} b_1 + b_n = 66, \\ b_2 b_{n-1} = 128, \\ S_n = 126 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q^{n-1} = 66, \\ b_2 b_1 q^{n-2} = 128, \\ b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 126 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q^{n-1} = 66, \\ b_1 (b_1 q^{n-1}) = 128, \\ b_1 (q^n - 1) = 126(q - 1) \end{cases} \Rightarrow b_1 = 2, \quad b_1 q^{n-1} = 64$$

так как прогрессия возрастающая, то по теореме Виета $q^{n-1} = 32$. Из последнего уравнения системы находим:

$$2(q \cdot q^{n-1} - 1) = 126(q - 1) \Leftrightarrow 32q - 1 = 63q - 63 \Leftrightarrow 31q = 62, \quad q = 2. \quad 2^{n-1} = 32 \Leftrightarrow n - 1 = 5, \quad n = 6.$$

Ответ: 6.

3.055. Найти сумму первых восьми членов бесконечно-убывающей геометрической прогрессии, если ее второй член равен

$$4, \text{ а отношение суммы всех ее членов к сумме квадратов всех ее членов равно } \frac{3}{16}.$$

Решение.

Квадраты членов геометрической прогрессии также образуют геометрическую прогрессию, причем ее знаменатель равен q^2 , где q — знаменатель исходной геометрической прогрессии. По условию $|q| < 1$, следовательно, $q^2 < 1$. Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} b_2 = 4, \\ \frac{b_1 + b_2 + \dots}{b_1^2 + b_2^2 + \dots} = \frac{3}{16}, \\ |q| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q = 4, \\ \frac{b_1}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{b_1} = \frac{3}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q = 4, \\ b_1 = \frac{16}{3}(q+1) \end{cases} \Rightarrow 4q^2 + 4q - 3 = 0, \quad q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = -\frac{3}{2} \text{ — не подходит, так как}$$

$$|q| < 1. \text{ Отсюда: } b_1 = \frac{4}{q} = 8, \quad S_8 = b_1 \frac{1-q^8}{1-q} = 8 \frac{1-\frac{1}{2^8}}{1-\frac{1}{2}} = 2^4 \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) = 16 - \frac{1}{16} = \frac{255}{16}.$$

Ответ: $\frac{255}{16}$.

3.056. Первый член бесконечно-убывающей геометрической прогрессии $b_1 = 2$, а ее сумма $S = 4$. Квадраты членов этой прогрессии образуют новую бесконечно-убывающую геометрическую прогрессию. Найти ее сумму.

Решение.

По условию $b_1 = 2$, $q < 1$, $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2}{1-q} = 4 \Rightarrow 1-q = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Новая геометрическая прогрессия имеет первый член

$$b_1^2 = 4 \text{ и знаменатель } q^2 = \frac{1}{4}, \text{ следовательно, ее сумма } S' = \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

3.057. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

Решение.

Пусть b_1 , $b_1 q$, $b_1 q^2$, $b_1 q^2 + d$ — данные числа, тогда по условию имеем:

b_1 , $b_1 q$, $b_1 q^2$ — члены геометрической прогрессии,

$b_1 q$, $b_1 q^2$, $b_1 q^2 + d$ — члены арифметической прогрессии, т.е. $b_1 q^2 = b_1 q + d$,

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q^2 + d = 14, \\ b_1 q + b_1 q^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q + 2d = 14, \\ b_1 q + b_1 q + d = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q + 2(b_1 q^2 - b_1 q) = 14, \\ 2b_1 q + b_1 q^2 - b_1 q = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_1(1+q+2q^2-2q)}{b_1(q+q^2)} = \frac{14}{12} \Rightarrow \frac{2q^2-q+1}{q^2+q} = \frac{7}{6} \Rightarrow 5q^2-13q+6=0, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = \frac{3}{5}.$$

Получаем два случая:

$$1) q_1 = 2, b_1 = \frac{12}{q^2 + q} = 2, b_1 q = 4, b_1 q^2 = 8, d = b_1 q^2 - b_1 q = 4, b_1 q^2 + d = 12, \text{ искомые числа } - 2, 4, 8, 12;$$

$$2) q_2 = \frac{3}{5}, b_1 = \frac{12}{q^2 + q} = \frac{25}{2}, b_1 q = \frac{15}{2}, b_1 q^2 = \frac{9}{2}, d = b_1 q^2 - b_1 q = \frac{9}{2} - \frac{15}{2} = -3, b_1 q^2 + d = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}, \text{ искомые числа } -$$

$$\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ответ: 1) } 2, 4, 8, 12; 2) \frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}.$$

3.058. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второй ее член увеличить на 8, то прогрессия станет арифметической, а если затем последнее число увеличить на 64, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение.

Пусть b_1, b_2, b_3 — члены геометрической прогрессии, $b_1, b_2 + 8, b_3$ — члены арифметической прогрессии, $b_1, b_2 + 8, b_3 + 64$ — члены геометрической прогрессии.

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} 2(b_1 q + 8) = b_1 + b_1 q^2, \\ (b_1 q + 8)^2 = b_1 (b_1 q^2 + 64) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1 q + 16 = b_1 + b_1 q^2, \\ b_1^2 q^2 + 16b_1 q + 64 = b_1^2 q^2 + 64b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 (q^2 - 2q + 1) = 16, \\ b_1 (64 - 16q) = 64 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{64}{64 - 16q} = \frac{4}{4 - q}, \frac{4(q^2 - 2q + 1)}{4 - q} = 16 \Rightarrow q^2 - 2q + 1 = 16 - 4q \Leftrightarrow q^2 + 2q - 15 = 0, q_1 = 3, q_2 = -5.$$

Получаем два случая:

$$1) q = 3, b_1 = 4, b_2 = 12, b_3 = 36; \quad 2) q = -5, b_1 = \frac{4}{9}, b_2 = \frac{-20}{9}, b_3 = \frac{100}{9}.$$

$$\text{Ответ: 1) } 4, 12, 36; \quad 2) \frac{4}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{100}{9}.$$

3.059. Три различных числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа $x + y, y + z, z + x$ образуют арифметическую прогрессию. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

Решение.

Из условия имеем: $y^2 = xz, 2(y + z) = (x + y) + (z + x)$. Если $\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = q$, то

$$2(xq + xq^2) = (x + xq) + (x + xq^2) \Leftrightarrow 2q + 2q^2 = 2 + q + q^2 \Leftrightarrow q^2 + q - 2 = 0, q_1 = -2, q_2 = 1.$$

Ответ: -2 или 1 .

3.060. В некоторой геометрической прогрессии, содержащей $2n$ положительных членов, произведение первого члена на последний равно e^5 . Найти сумму натуральных логарифмов всех членов прогрессии.

Решение.

Если b_1, b_2, \dots, b_{2n} — члены геометрической прогрессии, то $b_1 b_{2n} = e^5$.

$$\begin{aligned} x &= \ln b_1 + \ln b_2 + \dots + \ln b_n = \ln (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot (b_1 q^{2n-1})) = \ln ((b_1)^{2n} q^{1+2+\dots+2n-1}) = \\ &= \ln ((b_1)^{2n} q^{n(2n-1)}) = \ln (b_1 \cdot b_1 \cdot q^{2n-1})^n = \ln (b_1 \cdot b_{2n})^n = n \ln e^5 = 5n. \end{aligned}$$

Ответ: $5n$.

3.061. Три ненулевых числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, составляют геометрическую прогрессию. Найти знаменатель этой геометрической прогрессии.

Решение.

Если $x-d, x, x+d$ — члены данной арифметической прогрессии, то $(x-d)^2, x^2, (x+d)^2$ составляют по условию геометрическую прогрессию, следовательно, ее знаменатель

$$q = \frac{x^2}{(x-d)^2} = \frac{(x+d)^2}{x^2} \Rightarrow x^4 = (x^2 - d^2)^2 \Leftrightarrow x^4 = x^4 - 2x^2 d^2 + d^4, \quad x^2 = \frac{d^2}{2}, \quad x = \pm \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad \text{или } d = 0, q = 1.$$

Рассмотрим остальные два случая:

$$1) x = -\frac{d}{\sqrt{2}}, d \neq 0, q = \frac{(x+d)^2}{x^2} = \frac{2\left(d - \frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2}{d^2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3-2\sqrt{2};$$

$$2) x = \frac{d}{\sqrt{2}}, d \neq 0, q = \frac{(x+d)^2}{x^2} = \frac{2\left(d + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2}{d^2} = 3+2\sqrt{2}.$$

Ответ: $1, 3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}$.

3.062. Вычислить сумму $\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) + \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} + \dots$

Решение.

$$\text{Пусть } b_1 = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2), b_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, b_3 = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}.$$

Вычислим

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{(3-2\sqrt{3})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)} = \frac{(3-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+2)}{3(3-2)(\sqrt{3}+2)} = \frac{3 \cdot 3 - 6 + 6 - 4\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{\sqrt{3}-2}{3-2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-2)(3+2\sqrt{3})}{(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{3}-6+6-4\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом, нам требуется найти сумму S бесконечноубывающей геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1.$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{3}(3\sqrt{3}-6+3-2\sqrt{3})}{6} = \frac{1}{2}(3-3\sqrt{3}).$$

Ответ: $\frac{1}{2}(3-3\sqrt{3})$.

3.063. Вычислить сумму $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$.

Решение.

Если S_n — искомая сумма, то:

$$\begin{aligned} 2S_n &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^2}\right) + \left(\frac{2}{2^3} + \frac{5}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{2}{2^{n-1}} + \frac{2n-3}{2^{n-1}}\right) = \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-1}{2^n}\right) = \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} + S_n - \frac{2n-1}{2^n} \Rightarrow S_n = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}. \end{aligned}$$

Ответ: $3 - \frac{2n+3}{2^n}$.

3.064. Вычислить сумму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \dots + n(2^n - 1)$.

Решение.

Если S_n — сумма первых n членов последовательности данных слагаемых, то

$$S_n = (1 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 2^2 - 2) + (3 \cdot 2^3 - 3) + \dots + (n \cdot 2^n - n) = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^n) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) = S'_n - \frac{1+n}{2} \cdot n,$$

где $\frac{1}{2}S'_n - S'_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n \Leftrightarrow -\frac{1}{2}S'_n = \frac{1-2^n}{1-2} - n \cdot 2^n \Rightarrow S'_n = 2^{n+1}(n-1) + 2$.

Окончательно имеем: $S_n = 2^{n+1}(n-1) + 2 - \frac{(n+1)n}{2}$.

Ответ: $2^{n+1}(n-1) + 2 - \frac{(n+1)n}{2}$.

3.065. Найти сумму $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n$, $x \neq 1$.

Решение.

Если S_{n+1} — искомая сумма, то:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - xS_{n+1} &= (1 + 2x + \dots + (n+1)x^n) - (x + 2x^2 + \dots + nx^n + (n+1)x^{n+1}) = \\ &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n - (n+1)x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1} \Rightarrow (1-x)S_{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}, \end{aligned}$$

$$S_{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.$$

Ответ: $\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}$.

3.066. Найти сумму $1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 27 + \dots + (2n-1)3^n$.

Решение.

Рассмотрим сумму

$S_n = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1}$. Используя решение 3.065 при $x = 3$, получим

$$S_n = \frac{1-3^n}{4} + \frac{n3^n}{2} = \frac{1-3^n + 2n \cdot 3^n}{4}.$$

Далее, преобразуем искомую сумму:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 3^3 + \dots + (2n-1)3^n &= (2 \cdot 3 - 3) + (4 \cdot 3^2 - 3^2) + (6 \cdot 3^3 - 3^3) + \dots + (2n \cdot 3^n - 3^n) = \\ &= (2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + \dots + 2n3^n) - (3 + 3^2 + \dots + 3^n) = 6(1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n3^{n-1}) - (3 + 3^2 + \dots + 3^n) = \\ &= 6(1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n3^{n-1}) - \frac{3(1-3^n)}{1-3} = 6S_n + \frac{3}{2}(1-3^n) = \frac{3}{2}(1-3^n + 2n \cdot 3^n + 1-3^n) = 3((n-1)3^n + 1) = 3^{n+1}(n-1) + 3. \end{aligned}$$

Ответ: $3^{n+1}(n-1) + 3$.

3.067. Вычислить сумму $nx + (n-1)x^2 + \dots + 2x^{n-1} + 1 \cdot x^n, x \neq 1$.

Решение.

Будем преобразовывать искомую сумму S_n следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n &= (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x^n) + \\ &+ (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}) + \\ &+ (x + x^2 + \dots + x^{n-2}) + \\ &\dots \\ &+ (x + x^2) \\ &+ x = \\ &= x \frac{x^n - 1}{x - 1} + x \frac{x^{n-1} - 1}{x - 1} + x \frac{x^{n-2} - 1}{x - 1} + \dots + x \frac{x^2 - 1}{x - 1} + x \frac{x - 1}{x - 1} = \\ &= \frac{x}{x - 1} (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x^n - n) = \frac{x}{x - 1} \left(x \frac{x^n - 1}{x - 1} - n \right) = \frac{x^2 (x^n - 1)}{(x - 1)^2} - \frac{nx}{x - 1}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{x^2 (x^n - 1)}{(x - 1)^2} - \frac{nx}{x - 1}$.

3.068. Найти сумму $\left(5 + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(25 + \frac{1}{25}\right)^2 + \dots + \left(5^n + \frac{1}{5^n}\right)^2$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(5 + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(25 + \frac{1}{25}\right)^2 + \dots + \left(5^n + \frac{1}{5^n}\right)^2 &= \left(5^2 + 2 + \frac{1}{5^2}\right) + \left(5^4 + 2 + \frac{1}{5^4}\right) + \dots + \left(5^{2n} + 2 + \frac{1}{5^{2n}}\right) = \\ &= (5^2 + 5^4 + \dots + 5^{2n}) + 2n + \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{5^{2n}}\right) = 5^2 \frac{5^{2n} - 1}{5^2 - 1} + \frac{1}{5^2} \frac{1 - \frac{1}{5^{2n}}}{1 - \frac{1}{25}} + 2n = \frac{25}{24} \left(5^{2n} - 1 + \frac{1}{5^{2n+2}}\right) + 2n = \\ &= \frac{25}{24} \left(5^{2n} - \frac{1}{5^{2n+2}}\right) + 2n - 1. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{25}{24} \left(5^{2n} - \frac{1}{5^{2n+2}}\right) + 2n - 1$.

3.069. Вычислить сумму $7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + \underbrace{77\dots7}_n$

Решение.

$$\begin{aligned}
 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + \underbrace{77\dots7}_n &= 7 \left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \dots + \frac{10^n-1}{9} \right) = \frac{7}{9} (10 + 10^2 + \dots + 10^n - n) = \\
 &= \frac{7}{9} \left(10 \cdot \frac{10^n-1}{10-1} - n \right) = \frac{7}{81} (10^{n+1} - 10 - 9n).
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{7}{81} (10^{n+1} - 10 - 9n)$.

3.070. Доказать, что $\underbrace{11\dots155\dots56}_k = \underbrace{33\dots34^2}_{k-1}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{11\dots155\dots56}_k &= (10^{2k-1} + 10^{2k-2} + \dots + 10 + 1) + 4(10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1) + 1 = \\
 &= \frac{10^{2k}-1}{10-1} + 4 \frac{10^k-1}{10-1} + 1 = \frac{1}{9} (10^{2k} + 4 \cdot 10^k + 4) = \left(\frac{10^k+2}{3} \right)^2 = \left(\frac{10^k-1}{3} + 1 \right)^2 = \\
 &= \left(\frac{3 \left(\frac{10^k-1}{10-1} \right) + 1}{1} \right)^2 = \left(3(10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1) + 1 \right)^2 = (3 \cdot 10^{k-1} + 3 \cdot 10^{k-2} + \dots + 3 \cdot 10 + 4)^2 = \underbrace{33\dots34^2}_{k-1}.
 \end{aligned}$$

QED.

3.071. Предположим, что b_1, b_2, \dots, b_n — последовательные члены геометрической прогрессии, S_n — сумма ее n первых членов. Доказать, что

$$S_n = b_1 b_n \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \right).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 b_1 b_n \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \right) &= b_1 b_n q^{n-1} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1 q} + \dots + \frac{1}{b_1 q^{n-1}} \right) = b_1 q^{n-1} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} \right) = \\
 &= b_1 q^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{1}{q} \right)^n}{1 - \frac{1}{q}} = b_1 q^{n-1} \frac{q^n - 1}{q^n} \cdot \frac{q}{q-1} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = S_n.
 \end{aligned}$$

QED.

3.072. Доказать, что для любой арифметической прогрессии при всех n выполняется тождество:

$$S_{2n} = S_n + \frac{1}{3} S_{3n}, \text{ где } S_k \text{ — сумма } k \text{ первых членов прогрессии.}$$

Решение.

Так как при всех k $S_k = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} k$, то

$$S_n + \frac{1}{3} S_{3n} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n + \frac{1}{3} \cdot \frac{2a_1 + d(3n-1)}{2} \cdot 3n = \frac{4a_1 + d(4n-2)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(2n-1)}{2} \cdot 2n = S_{2n}. \quad \text{QED.}$$

3.073. Найти произведение n первых членов геометрической прогрессии с положительными членами, зная их сумму S и сумму S' их обратных величин.

Решение.

По условию имеем: $S = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, $S' = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}$. Используя решение 3.052, находим:

$$x^2 = (b_1 b_2 \dots b_n)^2 = (b_1 \cdot b_n)(b_2 \cdot b_{n-1})(b_3 \cdot b_{n-2}) \dots (b_{n-1} \cdot b_2)(b_n \cdot b_1) = (b_1 b_n)^n,$$

$$S = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{b_1 b_n}{b_n} + \frac{b_2 b_{n-1}}{b_{n-1}} + \dots + \frac{b_n b_1}{b_1} = b_1 b_n \left(\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n-1}} + \dots + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_1} \right) = (b_1 b_n) S' \Rightarrow b_1 b_n = \frac{S}{S'}. \text{ И } x = (b_1 b_n)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{S}{S'} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Ответ: $\left(\frac{S}{S'} \right)^{\frac{n}{2}}.$

3.074. Известен первый член a , последний член b и сумма S нескольких первых членов некоторой геометрической прогрессии. Найти сумму квадратов всех этих членов.

Решение.

Пусть b_1, b_2, \dots, b_n — члены геометрической прогрессии, по условию имеем $b_1 = a$, $b_n = b$, $S_n = S$. Тогда:

$$x = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \dots + b_1^2 q^{2n} = b_1^2 \frac{q^{2n+1} - 1}{q^2 - 1} = a^2 \frac{q^{2n+1} - 1}{q^2 - 1}.$$

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} b &= a q^{n-1} \Rightarrow q^n = \frac{b}{a} q, S = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \frac{\left(\frac{b}{a} q - 1 \right)}{q - 1} = \frac{bq - a}{q - 1} \Rightarrow Sq - S = bq - a \Rightarrow (S - b)q = \\ &= S - a, q = \frac{S - a}{S - b}, q^n = \frac{b}{a} q = \frac{b}{a} \cdot \frac{S - a}{S - b}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}
 x &= a^2 \frac{(q^n)^2 - 1}{q^2 - 1} = a^2 \frac{\frac{b^2}{a^2} \frac{(S-a)^2}{(S-b)^2} - 1}{\frac{(S-a)^2}{(S-b)^2} - 1} = \frac{b^2(S-a)^2 - a^2(S-b)^2}{(S-a)^2 - (S-b)^2} = \\
 &= \frac{(bS - ba - aS + ab)(bS - ba + aS - ab)}{(S-a-S+b)(S-a+S-b)} = \frac{S(b-a)(aS + bS - 2ab)}{(b-a)(2S - (a+b))} = \frac{(a+b)S - 2ab}{2S - (a+b)} S.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{(a+b)S - 2ab}{2S - (a+b)} S$.

3.075. Существуют ли числа a_1, a_2, a_3 такие, чтобы они были одновременно первыми, вторыми и третьими членами некоторых арифметической и геометрической прогрессий?

Решение.

Пусть a_1, a_2, a_3 — такие числа, тогда получаем:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2a_2 = a_1 + a_3 \\ a_2^2 = a_1 a_3 \end{cases} &\Leftrightarrow \left(\frac{a_1 + a_3}{2} \right)^2 = a_1 a_3 \Leftrightarrow a_1^2 + a_3^2 + 2a_1 a_3 - 4a_1 a_3 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a_3^2 - 2a_3 a_1 + a_1^2 = 0 \Leftrightarrow (a_3 - a_1)^2 = 0, \quad a_3 = a_1, \quad a_2 = a_1.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что верно и обратное:

если $a_1 = a_2 = a_3$, то эти числа являются членами арифметической прогрессии с разностью $d = 0$ и одновременно членами геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1$.

Ответ: $a_1 = a_2 = a_3$.

ТЕМА: ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

3.076. Какие из множеств точек (рис. 3.23, 3.24, 3.25, 3.26) задают функции? Найти области определения и множества значений этих функций.

Решение.

Множество точек координатной плоскости Oxy определяет функцию $y = f(x)$ в том случае, если на любой прямой, параллельной оси ординат, лежит не более одной точки этого множества, т.е. множества точек, изображенные на рис. 3.24, 3.26, задают функции, а на рис. 3.23, 3.25 — нет. Если функция задана графически, то ее область определения $D(f)$ совпадает с множеством абсцисс всех точек ее графика, а область изменения $E(f)$ — с множеством ординат.

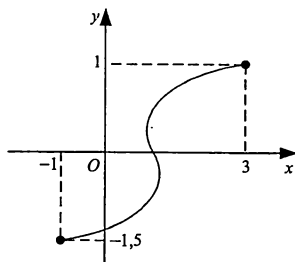


Рис. 3.23

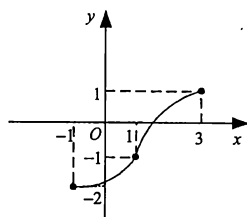


Рис. 3.24

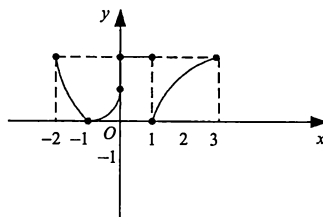


Рис. 3.25

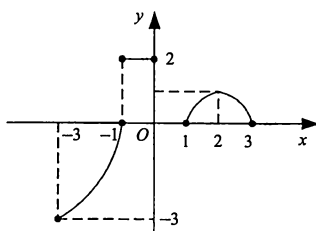


Рис. 3.26

Таким образом, имеем:

- 1) (рис. 3.24) $D(f_1) = [-1; 1) \cup (1; 3]$, $E(f_1) = [-2; -1) \cup (-1; 1]$;
- 2) (рис. 3.26) $D(f_2) = [-3; 0] \cup (1; 3]$, $E(f_2) = [-3; 1] \cup \{2\}$.

Найти области определения и множества значений следующих функций (3.077–3.083).

3.077. $y = \frac{x+2}{|x+2|} + \frac{x+1}{|x+1|}$.

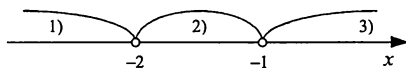
Решение.

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; +\infty).$$

Рассмотрим следующие три случая:

1) $x \in (-\infty; -2)$, $y = -\frac{x+2}{x+2} - \frac{x+1}{x+1} = -2$;

2) $x \in (-2; -1)$, $y = \frac{x+2}{x+2} - \frac{x+1}{x+1} = 0$;



$$3) x \in (-1; +\infty), y = \frac{x+2}{x+2} + \frac{x+1}{x+1} = 2.$$

$$\text{Ответ: } D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; +\infty); E(y) = \{-2; 0; 2\}.$$

$$3.078. y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}.$$

Решение.

Пусть $z = -x^2 + 3x - 2$, тогда $D(y): z \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$. Найдем координаты вершины параболы $x_0 = \frac{3}{2}$, $z_0 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{4}$, следовательно, в силу непрерывности квадратичной функции и корня квадратного

$$\text{для } x \in [1; 2], z \in \left[0; \frac{1}{4}\right], y = \sqrt{z} \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Ответ: } D(y) = [1; 2]; E(y) = \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

$$3.079. y = \log_2(x - x^2).$$

Решение.

Пусть $z = x - x^2$, тогда $D(y): z > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Найдем координаты вершины параболы $x_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = \frac{1}{4}$, следовательно, в силу непрерывности квадратичной и логарифмической функций для

$$x \in (0; 1), z \in \left(0; \frac{1}{4}\right), y = \log_2 z \in \left(-\infty; \log_2 \frac{1}{4}\right) = (-\infty; -2).$$

$$\text{Ответ: } D(y) = (0; 1); E(y) = (-\infty; -2).$$

$$3.080. y = \sqrt{2x - x^2} + \lg(2x - x^2).$$

Решение.

$$D(y): \begin{cases} 2x - x^2 \geq 0, \\ 2x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x(2-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Пусть $z = 2x - x^2$, тогда координаты вершины параболы $x_0 = 1$, $z_0 = 1$, следовательно, в силу непрерывности всех функций для $x \in (0; 2)$, $z \in (0; 1)$, $y_1 = \sqrt{z} \in (0; 1)$, $y_2 = \lg z \in (-\infty; 0)$, $y = \sqrt{z} + \lg z \in (-\infty; 1)$.

$$\text{Ответ: } D(y) = (0; 2), E(y) = (-\infty; 1).$$

3.081. $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 3}$.

Решение.

$$D(y): \begin{cases} x^2 - 3 \geq 0, \\ |\sqrt{x^2 - 3}| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq \sqrt{3}, \\ x^2 - 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq |x| \leq 2, x \in [-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2].$$

Если $\sqrt{3} \leq x \leq 2$, то $0 \leq x^2 - 3 \leq 1$, $0 \leq \sqrt{x^2 - 3} \leq 1$, следовательно, $E(y) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $D(y) = [-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2]$, $E(y) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.082. $y = \log_3 \log_5 x$.

Решение.

$$D(y): \begin{cases} x > 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_5 x > \log_5 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

При $x \in (1; +\infty)$ $t = \log_5 x \in (0; +\infty)$, $y = \log_3 t \in (-\infty; +\infty)$, следовательно, $E(y) = \mathbb{R}$.

Ответ: $D(y) = (1; +\infty)$; $E(y) = \mathbb{R}$.

3.083. $y = \arcsin \left(\lg \frac{x}{10} \right)$.

Решение.

$$D(y): \begin{cases} x > 0, \\ -1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \lg 10^{-1} \leq \lg \frac{x}{10} \leq \lg 10 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 100.$$

Если $x \in [1; 100]$, то $t = \lg \frac{x}{10} \in [-1; 1]$ и $y = \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $D(y) = [1; 100]$; $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Определить, какие из следующих функций являются четными, какие — нечетными, а какие — общего вида (3.084–3.092).

3.084. $y = \operatorname{ctg}^3 x - x^3$.

Решение.

а) Функция $y = \operatorname{ctg}^3 x - x^3$ определена в области $x \neq \pi, n \in \mathbb{Z}$, которая является симметричной относительно начала координат;

б) $y(-x) = (\operatorname{ctg}(-x))^3 - (-x)^3 = -\operatorname{ctg}^3 x + x^3 = -(\operatorname{ctg}^3 x - x^3) = -y(x)$. Таким образом, y — нечетная функция.

Ответ: функция нечетная.

3.085. $y = x^2|x| + \cos x$.

Решение.

Очевидно, что область определения $D(y) = \mathbb{R}$ — симметрична относительно начала координат. Далее,

$$y(-x) = (-x)^2|-x| + \cos(-x) = x^2|x| + \cos x = y(x), \text{ следовательно, } y \text{ — четная функция.}$$

Ответ: y — четная.

3.086. $y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}, a > 0$.

Решение.

Так как $a^x > 0$, то $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

$$\text{Далее, получаем } y(-x) = \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = \frac{a^x(a^{-x} - 1)}{a^x(a^{-x} + 1)} = \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = -\frac{a^x - 1}{a^x + 1} = -y(x), \text{ следовательно, } y \text{ — нечетная функция.}$$

Ответ: функция нечетная.

3.087. $y = \lg \frac{1-x}{1+x}$.

Решение.

$$\text{а) Область определения } D(y): \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} > 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1, \text{ следовательно, область определения симметрична относительно}$$

начала координат;

$$\text{б) } y(-x) = \lg \frac{1+x}{1-x} = \lg \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\lg \frac{1-x}{1+x}, \text{ следовательно, } y \text{ — нечетная функция.}$$

Ответ: функция нечетная.

3.088. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Решение.

Область определения $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ — не симметрична относительно начала координат, следовательно, y — общего вида.

Ответ: функция общего вида.

3.089. $y = a$.

Решение.

$D(y) = \mathbb{R}$ — симметрична относительно начала координат.

$$y(-x) = a = y(x) \text{ для всех } x \in D(y) \text{ при } a \neq 0;$$

$$y(-x) = 0 = \pm y(x) \text{ для всех } x \in D(y) \text{ при } a = 0.$$

Ответ: при $a \neq 0$, y — четная;

при $a = 0$, y — четная и нечетная.

3.090. Функция Дирихле: $D(x) = 0$ для всех иррациональных чисел и $D(x) = 1$ для всех рациональных.

Решение.

Область определения этой функции \mathbb{R} . Если x — рациональное число, то очевидно, что $(-x)$ также рациональное; в случае, если x — иррациональное число, то $(-x)$ рациональным быть не может, так как при противном $(-x) = x$ — рациональное и получаем противоречие, следовательно, $(-x)$ — иррациональное. Таким образом, в обоих случаях $D(-x) = D(x)$ и функция Дирихле — четная.

Ответ: четная.

3.091. $y = f(x)$ задана на промежутке $[-a; a]$ графически (рис. 3.27).

Решение.

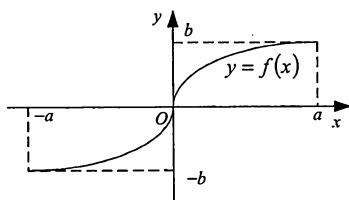


Рис. 3.27

Область определения $[-a; a]$ симметрична относительно начала координат, а график функции также симметричен относительно точки O , следовательно, $y = f(x)$ — нечетная функция.

Ответ: нечетная.

3.092. $y = f(x)$ задана на промежутке $[-3a; 3a]$ графически (рис. 3.28).

Решение.

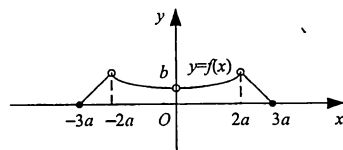


Рис. 3.28

Область определения $[-3a; -2a] \cup (-2a; 0) \cup (0; 2a) \cup (2a; 3a]$ симметрична относительно начала координат. Так как график функции симметричен относительно оси Oy , то функция $y = f(x)$ — четная.

Ответ: четная.

3.093. Доказать, что любую функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке $(-a; a)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

Решение.

Рассмотрим функции $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, определенные, очевидно, для всех x из $(-a; a)$.

Очевидно, что $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. $f_1(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f_1(x)$, следовательно, $f_1(x)$ — четная функция;

$$f_2(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)), \text{ поэтому } f_2(x) \text{ — нечетная функция.}$$

QED.

Выяснить, какие из данных функций являются периодическими, и определить для каждой из них наименьший положительный период, если он существует (3.094 – 3.100).

3.094. 1) $y = \sin(ax + b)$; 2) $y = \cos(ax + b)$; $a \neq 0$.

Решение.

1) $D(y) = \mathbf{R}$. Пусть для всех $x \in D(y)$ и некоторого числа T

$$\sin(ax + b) = \sin(a(x + T) + b) \Leftrightarrow \sin(ax + b) - \sin(ax + aT + b) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{aT}{2} \cos(ax + b + \frac{aT}{2}) = 0.$$

Отсюда $\frac{aT}{2} = \pi k$, $T = \frac{2\pi k}{a}$, $k \in \mathbf{Z}$; $ax + b + \frac{aT}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $T = \frac{\pi + 2\pi l}{a} - 2x - \frac{2b}{a}$, $l \in \mathbf{Z}$. Второе значение не подходит, так как T зависит от x , что не удовлетворяет определению периода. Таким образом, функция $y = \sin(ax + b)$ имеет период

$$T = \frac{2\pi k}{a}, k \in \mathbf{Z}, \text{ и наименьший положительный период } T_0 = \frac{2\pi}{|a|}.$$

$$2) D(y) = \mathbf{R}. y = \cos(ax + b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - ax - b\right) = \sin\left(-ax + \frac{\pi}{2} - b\right). \text{ Используя 1), получаем } T_0 = \frac{2\pi}{|a|}.$$

Ответ: $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.

3.095. $f(x) = \cos x + \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{5}$.

Решение.

Функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin \frac{x}{2}$, $y_3 = \sin \frac{x}{5}$ имеют своими периодами числа $T_1 = 2\pi$, $T_2 = 4\pi$, $T_3 = 10\pi$ соответственно (см. 3.094). Тогда период функции $f(x)$ будет равен наименьшему общему кратному: $T = \text{НОК}(T_1; T_2; T_3) = 20\pi$.

Ответ: 20π .

3.096. $y = \sin x + \cos 2\pi x$.

Решение.

Функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos 2\pi x$ имеют своими периодами числа $T_1 = 2\pi$, $T_2 = 1$ соответственно (см. 3.094). Если бы период функции y существовал, то он был бы наименьшим общим кратным: $T = \text{НОК}(T_1; T_2)$, следовательно, должен

был бы делиться нацело на 1 и быть числом целым, а с другой стороны, делиться нацело на 2π , т.е. быть числом иррациональным. Полученное противоречие показывает, что периода T не существует.

Ответ: функция непериодическая.

3.097. $y = \sin^4 x + \cos^2 x$.

Решение.

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x + \cos^2 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} (1 + \cos 4x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

Функция $y_1 = \frac{7}{8}$ периодична с любым периодом $T_1 > 0$, а функция $y_2 = \frac{1}{8} \cos 4x$ имеет период $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (см. 3.094),

следовательно, для исходной функции y период $T = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

3.098. $f(x) = 2\sin^2 2x - 3\sin^2 3x$.

Решение.

$$f(x) = 2 \frac{1 - \cos 4x}{2} - 3 \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{1}{2} (2 - 2 \cos 4x - 3 + 3 \cos 6x) = \frac{3}{2} \cos 6x - \cos 4x - \frac{1}{2}.$$

Функции $y_1 = \frac{3}{2} \cos 6x$, $y_2 = -\cos 4x$, $y_3 = -\frac{1}{2}$ имеют своими периодами числа $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, T_3 — любое положительное соответственно. Значит, периодом исходной функции $f(x)$ будет число $T = \text{НОК}(T_1; T_2)$. Так как $\text{НОК}(60^\circ; 90^\circ) = 180^\circ$, то $T = \pi$.

Ответ: π .

3.099. $y = \sin x^2$.

Решение.

$D(y) = \mathbb{R}$. Пусть для всех $x \in D(y)$ и некоторого числа T

$$\begin{aligned} \sin(x+T)^2 &= \sin x^2 \Leftrightarrow \sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \left(xT + \frac{T^2}{2} \right) \cos \left(x^2 + xT + \frac{T^2}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнение относительно T , получим, что T зависит от x , что не удовлетворяет определению периода.

Ответ: функция неперiodическая.

3.100. Функция Дирихле: $D(x) = 0$ для всех иррациональных чисел и $D(x) = 1$ для всех рациональных.

Решение.

Отметим, что область определения этой функции \mathbf{R} . Пусть q — любое рациональное фиксированное число. Сумма двух рациональных чисел всегда рациональное число, а сумма рационального и иррационального числа есть число иррациональное, так как при противном получили бы, что разность рациональных чисел есть число иррациональное. Таким образом, имеем:

$$1) \forall x \in \mathbf{Q}, x \pm q \in \mathbf{Q} \Rightarrow D(x \pm q) = D(x) = 1;$$

$$2) \forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, x \pm q \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \Rightarrow D(x \pm q) = D(x) = 0.$$

Получили, что любое рациональное число $q \in \mathbf{Q}$ является периодом функции Дирихле. Покажем, что иррациональное число $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ не может быть периодом. Действительно, $D(t - t) = D(0) = 1$, а $D(t) = 0$, т.е. $D(t - t) \neq D(t)$.

Ответ: период — любое рациональное число.

Для следующих функций найти обратные функции, если они существуют (3.101 – 3.105).

$$3.101. y = 5x + 4.$$

Решение.

$$D(y) = \mathbf{R}, E(y) = \mathbf{R}.$$

Решаем уравнение $y = 5x + 4$ относительно x : $x = \frac{y-4}{5}$, следовательно, $z = \frac{x-4}{5}$ — функция, обратная функции y ;

$$D(z) = E(z) = \mathbf{R}.$$

$$\text{Ответ: } z = \frac{x-4}{5}.$$

$$3.102. f(x) = \frac{2x-3}{3x+5}.$$

Решение.

$$D(f) = (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup (-\frac{5}{3}; +\infty).$$

Решаем уравнение $z = \frac{2x-3}{3x+5}$ относительно x : $z(3x+5) = 2x-3 \Leftrightarrow 3zx+5z = 2x-3 \Leftrightarrow x(2-3z) = 5z+3 \Rightarrow \frac{5z+3}{2-3z}$, $z \neq \frac{2}{3}$.

Таким образом, обратная функция $f^{-1}(x) = \frac{5z+3}{2-3z}$.

$$\text{Ответ: } f^{-1}(x) = \frac{5z+3}{2-3z}.$$

3.103. а) $y = x^{2k+1}$; б) $y = x^{2k}$.

Решение.

$D(y) = \mathbb{R}$.

а) Решая уравнение $y = x^{2k+1}$ относительно x , получаем $x = \sqrt[2k+1]{y}$, следовательно, обратная функция $z = \sqrt[2k+1]{x}$.

б) Решая уравнение $y = x^{2k}$ относительно x , имеем $|x| = \sqrt[2k]{y}$, где $y \geq 0$. Таким образом, приходим к двум случаям:

1) если $x \in [0; +\infty)$, то $x = \sqrt[2k]{y}$; 2) если $x \in (-\infty; 0]$, то $x = -\sqrt[2k]{y}$.

Обратной функции для $y = x^{2k}$, $x \in (-\infty; +\infty)$, не существует.

Ответ: а) $z = \sqrt[2k+1]{x}$; б) $z = \sqrt[2k]{x}$ при $x \in [0; +\infty)$;

$$z = -\sqrt[2k]{x} \text{ при } x \in (-\infty; 0].$$

3.104. $y = \cos x$, $x \in [\pi; 2\pi]$.

Решение.

На промежутке $[\pi; 2\pi]$ функция $y = \cos x$ монотонно возрастающая, следовательно, имеет обратную.

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \pm \arccos y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, |y| \leq 1. \pi \leq x \leq 2\pi \Rightarrow x = -\arccos y + 2\pi.$$

Получили обратную функцию $z = 2\pi - \arccos x$, $|x| \leq 1$.

Ответ: $z = 2\pi - \arccos x$.

3.105. $f(x) = \log_2(x^2 - 3)$, $x \in [2; +\infty)$.

Решение.

Решая уравнение $y = \log_2(x^2 - 3)$ относительно x , получим: $x^2 - 3 = 2^y \Leftrightarrow x^2 = 2^y + 3 \Rightarrow x = \sqrt{2^y + 3}$, так как $x > 0$.

При $x \in [2; +\infty)$, $(x^2 - 3) \in [1; +\infty)$, $y \in [0; +\infty)$. Имеем $f^{-1}(x) = \sqrt{2^x + 3}$, $x \in [0; +\infty)$.

Ответ: $f^{-1}(x) = \sqrt{2^x + 3}$, $x \in [0; +\infty)$

3.106. Доказать, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ возрастающая.

Решение.

$D(y) = \mathbb{R}$. Пусть $x_2 > x_1$. Требуется доказать, что $f(x_2) > f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$.

$$\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_1} = \frac{(\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_1})(\sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_1 x_2} + \sqrt[3]{x_1^2})}{(\sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_1 x_2} + \sqrt[3]{x_1^2})} = \frac{x_2 - x_1}{(\sqrt[3]{x_2})^2 + \sqrt[3]{x_1 x_2} + (\sqrt[3]{x_1})^2} > 0, \text{ так как } x_2 - x_1 > 0 \text{ и } a^2 + ab + b^2 > 0.$$

QED.

3.107. Доказать, что функция $y = ax + b$ ($a < 0$) убывающая.

Решение.

$D(y) = \mathbb{R}$. Пусть $x_2 > x_1$, требуется доказать, что $f(x_2) < f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Leftrightarrow (ax_2 + b) - (ax_1 + b) < 0 \Leftrightarrow a(x_2 - x_1) < 0$.
Последнее неравенство истинно, так как $a < 0$, $x_2 - x_1 > 0$. QED.

3.108. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Решение.

Область определения $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

По определению предела функции требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq 1$ $|x - 1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$.

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = \left| \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2 \right| = |(x+1) - 2| = |x - 1|.$$

Взяв $\delta = \varepsilon$, получим, что $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$, $x \neq 1$.

QED.

3.109. Доказать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела при x , стремящемся к нулю.

Решение.

$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Рассмотрим две последовательности:

$$1) \frac{2}{5\pi}; \frac{2}{9\pi}; \dots; \frac{2}{\pi(4n+1)}; \dots;$$

$$2) \frac{2}{7\pi}; \frac{2}{11\pi}; \dots; \frac{2}{\pi(4n+3)}; \dots.$$

Обе последовательности сходятся к нулю.

Последовательности значений функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, соответствующие этим двум последовательностям аргумента, имеют вид:

$$1) 1; 1; \dots; 1; \dots;$$

$$2) -1; -1; \dots; -1; \dots$$

Пределами последних последовательностей являются числа 1 и -1 соответственно. Таким образом, не выполняются условия определения 3.2, следовательно, предел не существует. **QED.**

Найти пределы (3.110 – 3.140).

$$3.110. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+2} = \frac{1+3}{1+2} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

$$3.111. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x + x - 2}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 4) + (x - 2)}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+2) + (x-2)}{x^3 - 8} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 1)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{4 + 4 + 1}{4 + 4 + 4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

$$3.112. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}.$$

Решение.

Разделим числитель и знаменатель функции на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x + 2 & x - 1 \\ \hline x^4 - x^3 & \\ \hline -x^3 - 3x & \\ -x^3 - x^2 & \\ \hline x^2 - 3x & \\ -x^2 - x & \\ \hline -2x + 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array} ; \quad \begin{array}{r|l} x^5 - 4x + 3 & x - 1 \\ \hline x^5 - x^4 & \\ \hline -x^4 - 4x & \\ -x^4 - x^3 & \\ \hline x^3 - 4x & \\ -x^3 - x^2 & \\ \hline x^2 - 4x & \\ -x^2 - x & \\ \hline -3x + 3 & \\ -3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x - 3} = 1.$$

Ответ: 1.

$$3.113. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4 - 12}{x^3 - 8} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{2+4}{4+4+4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

$$3.114. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1} = \frac{m}{n}.$$

Ответ: $\frac{m}{n}$.

$$3.115. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 3}{2x^2 - 5x + 5}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 3}{2x^2 - 5x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-2}(x^2 + x - 3)}{x^{-2}(2x^2 - 5x + 5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

$$3.116. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x} \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ: 1.

$$3.117. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x-2} - 2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x-2} - 2)(\sqrt{3x-2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{3x-2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2-4}{(x-2)(\sqrt{3x-2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x-2} + 2)} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

$$3.118. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+13-4x-4}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = -3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \frac{-3}{6 \cdot (4+4)} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1}{16}$.

$$3.119. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{2x+1})}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{2x+1})(3 + \sqrt{2x+1})(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3 + \sqrt{2x+1})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(9-2x-1)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(3 + \sqrt{2x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(3 + \sqrt{2x+1})} = -2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}+2}{3 + \sqrt{2x+1}} = \frac{-2 \cdot 4}{6} = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

$$3.120. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(\sqrt[3]{1+x}^2 + \sqrt[3]{1-x}^2 + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})(\sqrt[3]{1+x}^2 + \sqrt[3]{1-x}^2 + \sqrt[3]{(1-x)^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x-1+x)(\sqrt[3]{1+x}^2 + \sqrt[3]{1-x}^2 + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{(1+x-1+x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}^2 + \sqrt[3]{1-x}^2 + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

$$3.121. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right).$$

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\left(\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{1-\left(\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-t^{\frac{1}{6}}} - \frac{2}{1-t^{\frac{1}{3}}} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-t^{\frac{1}{6}}} - \frac{2}{1-t^{\frac{1}{3}}} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3(1+t)-2(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)(1+t+t^2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1+t-2t^2}{(1-t)(1+t)(1+t+t^2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1-t)(1+2t)}{(1-t)(1+t)(1+t+t^2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1+2t}{(1+t)(1+t+t^2)} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3.122. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}).$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2}.$

3.123. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}).$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})(\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)(x^3 - x^2 + 1)} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2 + 1)^2})}{(\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)(x^3 - x^2 + 1)} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2 + 1)^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + x^2 + 1) - (x^3 - x^2 + 1)}{(\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)(x^3 - x^2 + 1)} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2 + 1)^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^2}} = \frac{2}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{3}.$

3.124. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}.$

Решение.

Воспользуемся первым замечательным пределом: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \left| \begin{matrix} t = 7x, x \rightarrow 0 \\ x = \frac{t}{7}, t \rightarrow 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\frac{3t}{7}} = \frac{7}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{7}{3}.$$

Ответ: $\frac{7}{3}$.

3.125. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \left| \begin{matrix} t = \frac{x}{2}, x \rightarrow 0 \\ x = 2t, t \rightarrow 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 t}{4t^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3.126. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{ctg} 5x.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{ctg} 5x = \left| \begin{matrix} t = 5x, x \rightarrow 0 \\ x = \frac{t}{5}, t \rightarrow 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{5} \operatorname{ctg} t = \frac{2}{5} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t}{\sin t} = \frac{2}{5} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos t \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{-1} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $\frac{2}{5}$.

3.127. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sin 2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^{-1} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

3.128. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 3x}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{\sin^2 3x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{3x}{\sin 3x} \right)^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^{-1} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{9}$.

3.129. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 7x + \sin 3x}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 7x + \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos 4x}{2 \sin 5x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)^{-1} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

3.130. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \left[t = \frac{x-a}{2}, \right]_{x \rightarrow a, t \rightarrow 0} = \cos a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos a.$$

Ответ: $\cos a$.

3.131. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{\cos x \cos a \cdot (x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos x \cos a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} = \frac{1}{\cos^2 a} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} =$$

$$= \left[t = x-a, \right]_{x \rightarrow a, t \rightarrow 0} = \frac{1}{\cos^2 a} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

при $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{1}{\cos^2 a}$ при $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3.132. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{\arcsin 2x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{\arcsin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{\frac{1}{2} \sin v} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{x} \cdot \frac{x}{\arcsin 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin 2x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\frac{1}{3} \operatorname{tg} u} \cdot \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin v}{v} = \frac{3}{2} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin v}{v} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \cos u = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

3.133. $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$.

Решение.

Воспользуемся вторым замечательным пределом: $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} (1+2-2x)^{\frac{x}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+y)^{\frac{x}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+y)^{\frac{1}{\frac{1-x}{x}}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{\frac{1}{y}}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left((1+y)^{\frac{1}{y}} \right)^2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{-1} = e^2. \end{aligned}$$

Ответ: e^2 .

3.134. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+5)[\ln(x+5) - \ln x]$.

Решение.

Воспользуемся вторым замечательным пределом: $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+5)[\ln(x+5) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+5} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x+5} = \ln \lim_{\substack{y = \frac{5}{x}, x = \frac{5}{y} \\ x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0}} \left(1 + y \right)^{\frac{15}{y} + 5} \\ &= \ln \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{15}{y} + 5} = \ln \left[\left(\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right)^{15} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^5 \right] = \ln e^{15} = 15. \end{aligned}$$

Ответ: 15.

3.135. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e.$$

Ответ: $\log_a e$.

3.136. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left| y = a^x - 1, a^x = y + 1, \right. \left. x = \log_a(y+1), x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\log_a(y+1)}{y} \right)^{-1} = (\log_a e)^{-1} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a \quad (\text{см. 3.135}).$$

Ответ: $\ln a$.

3.137. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}, a > 0.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \left| y = \frac{x-a}{a} = \frac{x}{a} - 1; \frac{x}{a} = y + 1, \right. \left. x = ay + a; x \rightarrow a, y \rightarrow 0 \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{ay} = \frac{1}{a} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \frac{1}{a} \quad (\text{см. 3.135}).$$

Ответ: $\frac{1}{a}.$

$$3.138. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a+2a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^x = \left| \begin{array}{l} y = \frac{2a}{x-a}, \quad x = \frac{2a}{y} + a \\ x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{2a}{y}+a} = \\ &= \left(\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right)^{2a} \cdot \left(\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^a \right) = e^{2a}. \end{aligned}$$

Ответ: e^{2a} .

$$3.139. \lim_{x \rightarrow 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+e^x-1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+e^x-1)^{\frac{x+e^x-1}{(x+e^x-1)x}} = \left| \begin{array}{l} y = x+e^x-1, \\ x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \left(\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} z} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} z},$$

$$\text{где } z = \frac{x+e^x-1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} z = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+e^x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{e^x-1}{x} \right) = 2 \quad (\text{см. 3.136}).$$

Ответ: e^2 .

$$3.140. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha x - \beta x} \cdot \frac{\alpha x - \beta x}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x}(e^{\alpha x - \beta x} - 1)}{\alpha x - \beta x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x - \beta x}{2 \sin \frac{\alpha x - \beta x}{2} \cos \frac{\alpha x + \beta x}{2}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \alpha x - \beta x, \quad t = \frac{u}{2}, \\ x \rightarrow 0, \quad u \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\beta x} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \frac{\alpha x + \beta x}{2}} = 1 \quad (\text{см. 3.136}). \end{aligned}$$

Ответ: 1.

Построить графики функций (3.141 – 3.180).

3.141. а) $y = x^2 - 4x + 3$;

б) $y = x^2 - 4|x| + 3$;

в) $y = |x^2 - 4x + 3|$;

г) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

Решение.

а) $y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1$. График функции $y = (x - 2)^2 - 1$ получается из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом на 2 единицы вправо и на 1 единицу вниз. Координаты вершины параболы: $x_0 = 2, y_0 = -1$; $y = 0$ при $x_1 = 1, x_2 = 3$; при $x = 0, y = 3$; ветви параболы направлены вверх (рис. 3.29).

б) При $x \geq 0$ получаем параболу $y = x^2 - 4x + 3$, а при $x < 0$ — параболу $y = x^2 + 4x + 3$. Так как функция $y = x^2 - 4|x| + 3$ четная, то ее график симметричен относительно оси Oy (рис. 3.30).

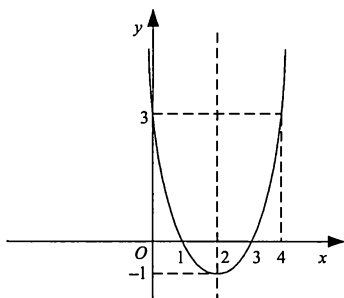


Рис. 3.29

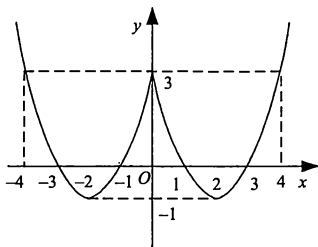


Рис. 3.30

в) Для построения графика этой функции нужно отобразить отрицательную часть графика функции $y = x^2 - 4x + 3$ симметрично относительно оси Ox (рис. 3.31).

г) Для построения графика этой функции нужно отобразить отрицательную часть графика функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ симметрично относительно оси Oy (рис. 3.32).

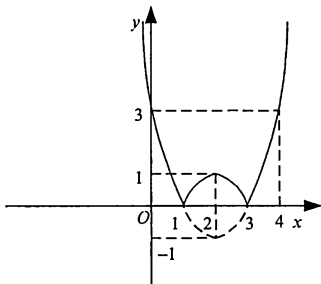


Рис. 3.31

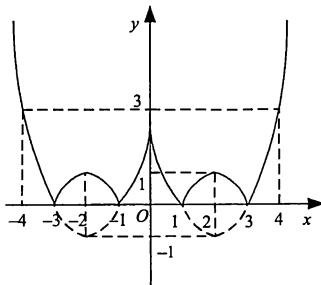


Рис. 3.32

3.142. $y = (x-1)\sqrt{(x+1)^2}$.

Решение.

$$y = (x-1)\sqrt{(x+1)^2} = (x-1)|x+1| = \begin{cases} -(x-1)(x+1), & x < -1, \\ (x-1)(x+1), & x \geq -1 \end{cases} = \begin{cases} -(x^2-1), & x < -1, \\ x^2-1, & x \geq -1. \end{cases}$$

Строим обе параболы для соответствующих значений x (рис. 3.33).

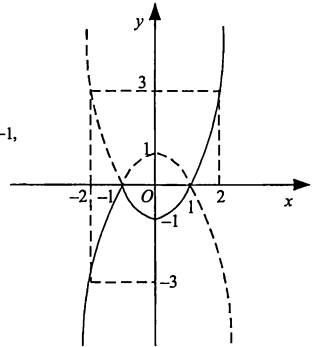


Рис. 3.33

3.143. $y = x|x| - 2x - 3$.

Решение.

$$y = x|x| - 2x - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & x \geq 0, \\ -x^2 - 2x - 3, & x < 0. \end{cases}$$

Строим обе параболы для соответствующих значений x (рис. 3.34).

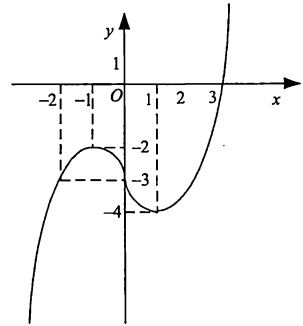


Рис. 3.34

3.144. $y = \frac{x+1}{|x+2|}(x^2 + x - 2)$.

Решение.

$$y = \frac{x+1}{|x+2|}(x^2 + x - 2) = \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{|x+2|} = \begin{cases} x^2 - 1, & x > -2, \\ 1 - x^2, & x < -2. \end{cases}$$

Строим обе параболы для соответствующих значений x (рис. 3.35).

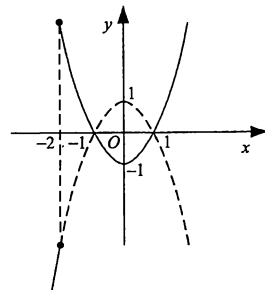


Рис. 3.35

3.145. $y = \frac{(x-1)(x^2+3)}{|x-1|}$.

Решение.

$$y = \frac{(x-1)(x^2+3)}{|x-1|} = \begin{cases} x^2+3, & x > 1, \\ -(x^2+3), & x < 1. \end{cases}$$

Строим обе параболы для соответствующих значений x (рис. 3.36).

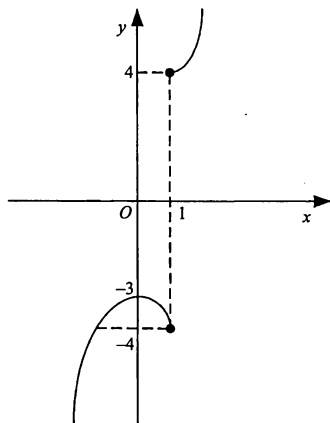


Рис. 3.36

3.146. $y = x^2 - 2|x+1| - 1$.

Решение.

$$y = x^2 - 2|x+1| - 1 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & x \geq -1, \\ x^2 + 2x + 1, & x < -1. \end{cases}$$

Строим обе параболы для соответствующих значений x (рис. 3.37).

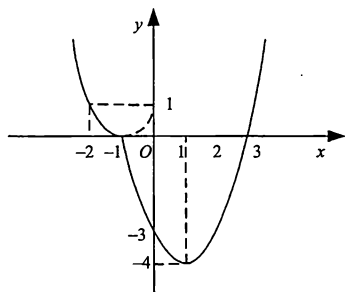


Рис. 3.37

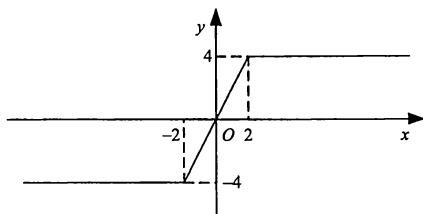


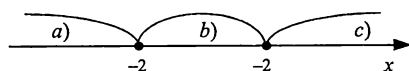
Рис. 3.38

Рассмотрим следующие случаи, а затем построим графики (рис. 3.38) на соответствующих промежутках:

a) $x \in (-\infty; -2)$, $y = -x - 2 + x - 2 = -4$;

b) $x \in [-2; 2)$, $y = x + 2 + x - 2 = 2x$;

c) $x \in [2; +\infty)$, $y = x + 2 - x + 2 = 4$.



3.148. $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2}$.

Решение.

Будем строить график функции (рис. 3.39).

$$y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} = |x| + |x-2| = \begin{cases} -x-x+2, & x < 0, \\ x-x+2, & 0 \leq x < 2, \\ x+x-2, & x \geq 2, \end{cases} = \begin{cases} 2-2x, & x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 2, \\ 2x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

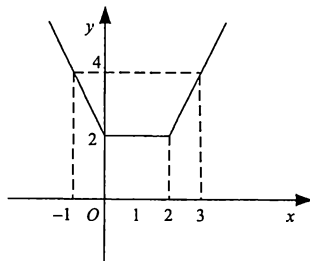


Рис. 3.39

3.149. $y = |x-1| + |x-2| + x$.

Решение.

Будем строить график функции (рис. 3.40).

$$y = |x-1| + |x-2| + x = \begin{cases} 1-x+2-x+x, & x < 1, \\ x-1+2-x+x, & 1 \leq x < 2, \\ x-1+x-2+x, & x \geq 2, \end{cases} = \begin{cases} 3-x, & x < 1, \\ x+1, & 1 \leq x < 2, \\ 3x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

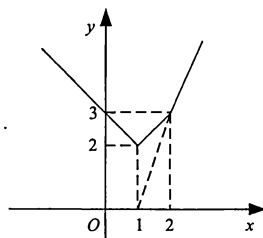


Рис. 3.40

3.150. $y = \frac{(x-1)|x-2|}{|x-1|}$.

Решение.

При $x \neq 1$ паша функция принимает вид

$$y = \frac{(x-1)|x-2|}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{(x-1)|x-2|}{x-1}, & x > 1, \\ -\frac{(x-1)|x-2|}{x-1}, & x < 1, \end{cases} = \begin{cases} |x-2|, & x > 1, \\ -|x-2|, & x < 1. \end{cases}$$

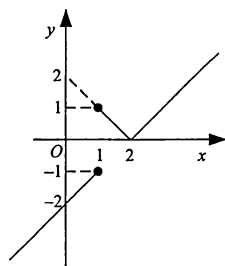


Рис. 3.41

Строим графики для соответствующих значений x (рис. 3.41).

3.151. $y = |2 - |x||$.

Решение.

Используя график прямой $y = 2 - x$ и свойства модулей, строим график функции $y = |2 - |x||$ (рис. 3.42).

3.152. $y = \frac{3x-5}{x-2}$.

Решение.

$$y = \frac{3x-5}{x-2} = \frac{3x-6+1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2}.$$

Сдвигая график гиперболы $y = \frac{1}{x}$, строим график нашей функции (рис. 3.43).

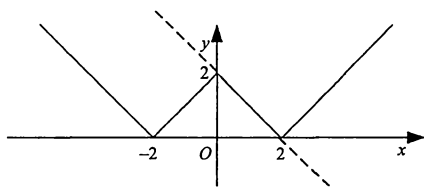


Рис. 3.42

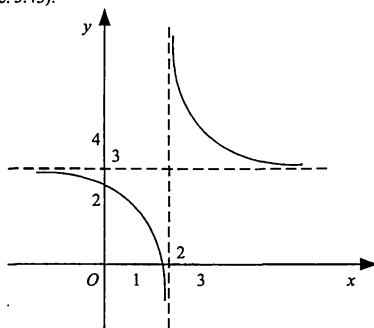


Рис. 3.43

3.153. $y = \left(\sqrt{(x-2)^2}\right)^{-1}$.

Решение.

$y = \left(\sqrt{(x-2)^2}\right)^{-1} = \frac{1}{|x-2|}$. Этот график (рис. 3.44) получается из графика $y = \frac{1}{|x|}$ сдвигом вправо на 2 единицы.

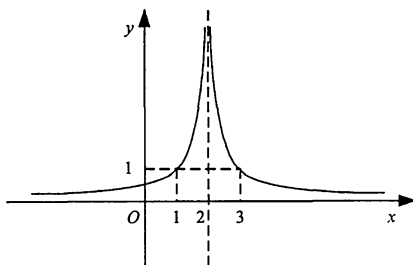


Рис. 3.44

3.154. $y = \frac{|x|+1}{x-1}$.

Решение.

$$y = \frac{|x|+1}{x-1} = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1}, & 0 \leq x \neq 1, \\ \frac{-x+1}{x-1}, & x < 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{x-1+2}{x-1}, & 0 \leq x \neq 1, \\ -\frac{x-1}{x-1}, & x < 0, \end{cases} = \begin{cases} 1 + \frac{2}{x-1}, & 0 \leq x \neq 1, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Строим график нашей функции (рис. 3.45) на каждом из полученных интервалов.

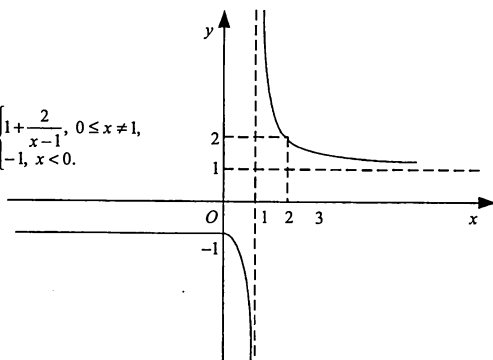


Рис. 3.45

3.155. $y = \frac{2}{1-\sqrt{x^2}}$.

Решение.

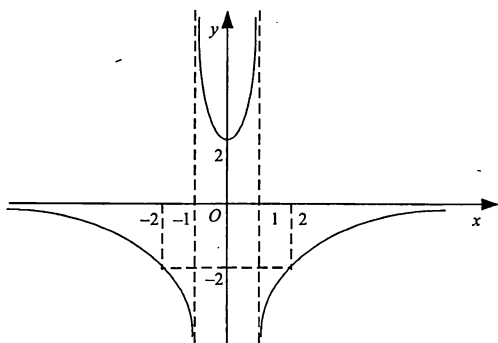


Рис. 3.46

$$y = \frac{2}{1-\sqrt{x^2}} = \frac{2}{1-|x|} = \begin{cases} \frac{2}{1-x}, & 0 \leq x \neq 1, \\ \frac{2}{1+x}, & 0 > x \neq -1. \end{cases}$$

Строим график функции (рис. 3.46) на каждом из полученных интервалов.

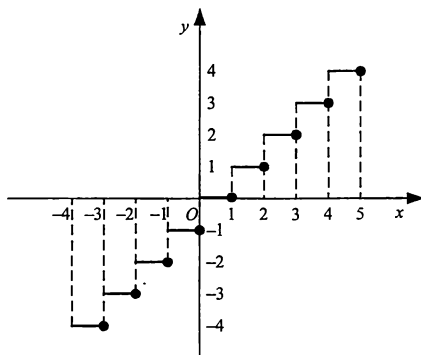


Рис. 3.47

3.156. $y = [x]$, где целой частью числа x называется наибольшее целое число $[x]$, не превосходящее x .

Решение.

По определению $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leq x$, и $[x]$ — наибольшее целое число, для которого последнее неравенство выполняется. Например, $[-5] = -5$, $[-4,7] = -5$, $[2] = 2$, $[3,2] = 3$.

Строим график функции $y = [x]$ (рис. 3.47).

3.157. $y = \{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x .

Решение.

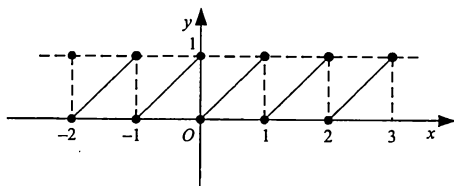


Рис. 3.48

По определению строим график функции $y = \{x\}$ (рис. 3.48).

3.158. $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Решение.

По определению строим график функции $y = \operatorname{sgn} x$ (рис. 3.49).

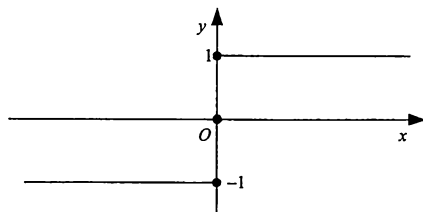


Рис. 3.49

3.159. $y = \sqrt{x \operatorname{sgn} x - 2}$.

Решение.

$y = \sqrt{x \operatorname{sgn} x - 2} = \sqrt{|x| - 2}$. Функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy (рис. 3.50), график же функции $y = \sqrt{x - 2}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ параллельным переносом на 2 единицы вправо.

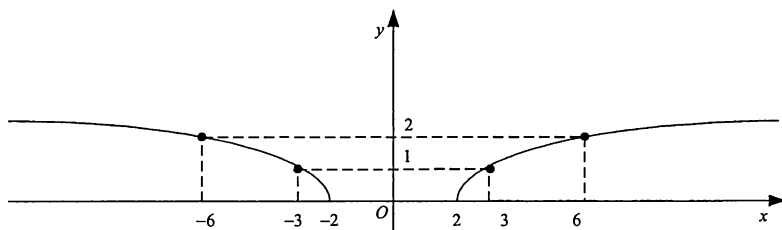


Рис. 3.50

3.160. $y = |\sqrt{|x| - 1} - 2|$.

3.165. $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} \lg x.$

Решение.

$D(y)$: $x > 0, x \neq \pi n$. График данной функции (рис. 3.55) совпадает с графиком функции $y = \lg x$, если $\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$; и с графиком функции $y = -\lg x$, если $\sin x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

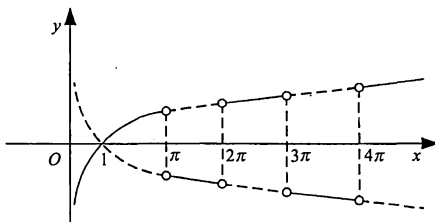


Рис. 3.55

3.166. $y = [\log_2 x], x \in [1; 8].$

Решение.

Используя определение целой части числа, получаем искомый график (рис. 3.56).

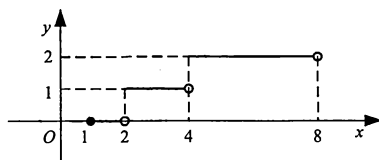


Рис. 3.56

3.167. $y = \log_2 \frac{|x|-2}{x^2-4}.$

Решение.

При $|x| \neq 2$ преобразуем функцию к следующему виду:

$$y = \log_2 \frac{|x|-2}{|x|^2-4} = \log_2 \frac{(|x|-2)}{(|x|-2)(|x|+2)} = \log_2 (|x|+2)^{-1} = -\log_2 (|x|+2).$$

Строим график полученной функции (рис. 3.57).

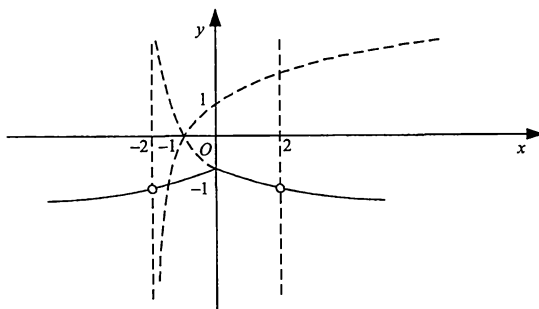
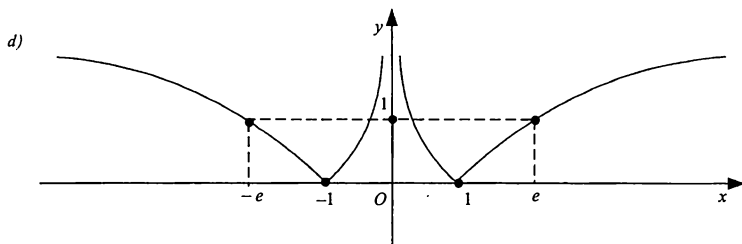


Рис. 3.57



3.162. $y = \log_3 x + |\log_3 x|$.

Решение.

$$y = \log_3 x + |\log_3 x| = \begin{cases} 2 \log_3 x, & x \geq 1, \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Строим график функции (рис. 3.52) на каждом из полученных промежутков.

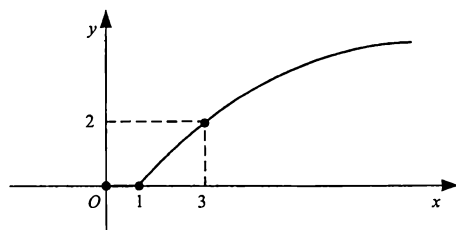


Рис. 3.52

3.163. $y = x^{\log_3(x+1)}$.

Решение.

$D(y) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Для указанных значений аргумента $y = x^{\log_3(x+1)} = x+1$.

Строим график функции (рис. 3.53) на указанных интервалах.

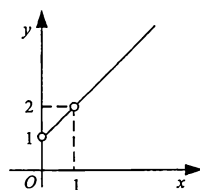


Рис. 3.53

3.164. $y = \left| \log_3 \frac{x-2}{x^2-4} \right|$.

Решение.

При $x \neq 2$ преобразуем функцию к следующему виду:

$$y = \left| \log_3 \frac{x-2}{x^2-4} \right| = \left| \log_3 \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \right| = \left| \log_3 (x+2)^{-1} \right| = \\ = |\log_3(x+2)|.$$

$D(y) = (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Строим график полученной функции (рис. 3.54).

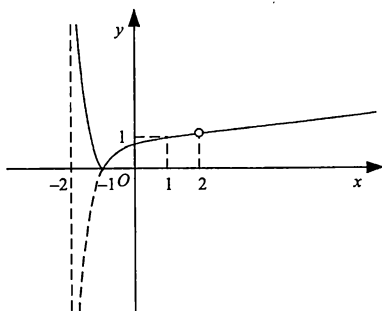


Рис. 3.54

Решение.

Используя график $y = \sqrt{x}$ и свойства модулей, получаем искомый график (рис. 3.51).

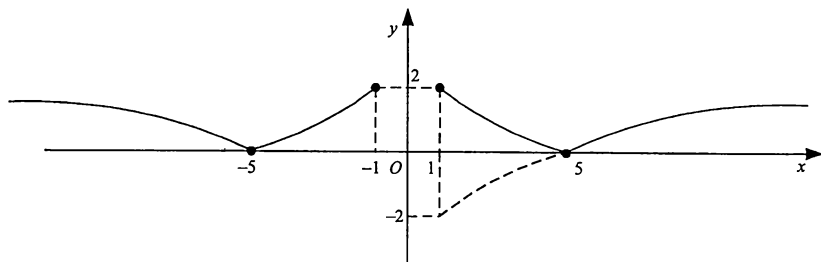
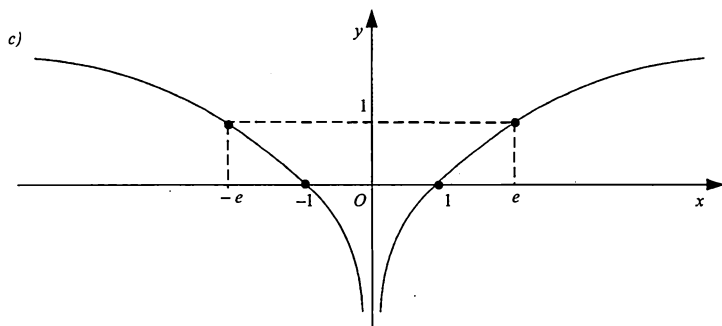
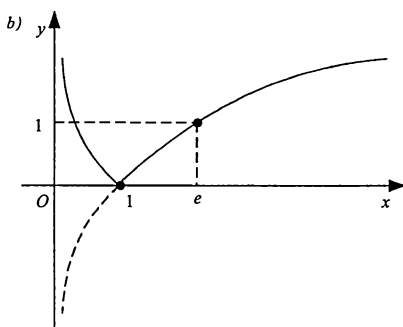
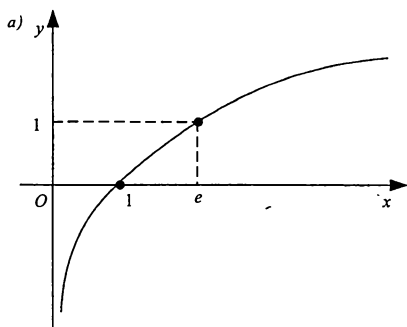


Рис. 3.51

3.161. а) $y = \ln x$; б) $y = |\ln x|$; в) $y = \ln |x|$; г) $y = |\ln |x||$.

Решение.



3.168. $y = \lg \sin x$.

Решение.

$D(y): \sin x > 0 \Leftrightarrow x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}, t = \sin x \in (0; 1], y = \lg t \in (-\infty; 0]$.

Строим график функции $y = \lg \sin x$ (рис. 3.58).

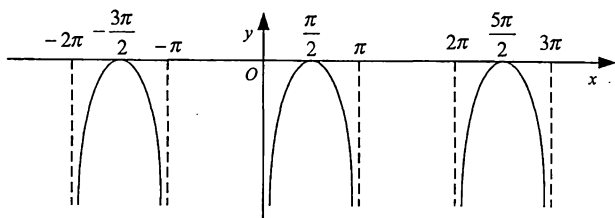


Рис. 3.58

3.169. $y = -e^{-|x-1|}$.

Решение.

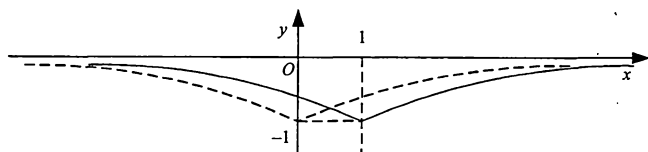


Рис. 3.59

График функции $y = -e^{-|x|}$ получается из графика функции $y = -e^{-x}, x \geq 0$, симметрией относительно оси Oy , а искомый график (рис. 3.59) получается из последнего параллельным сдвигом вправо на 2 единицы.

3.170. $y = |2^{|x|} - 4|$.

Решение.

График функции $y = |2^{|x|} - 4|$ (рис. 3.60) получается последовательным построением следующих графиков: $y = 2^x, x \geq 0$; $y = 2^x - 4, x \geq 0$; $y = |2^x - 4|, x \geq 0$; $y = |2^{|x|} - 4|$ (используя четность исходной функции).

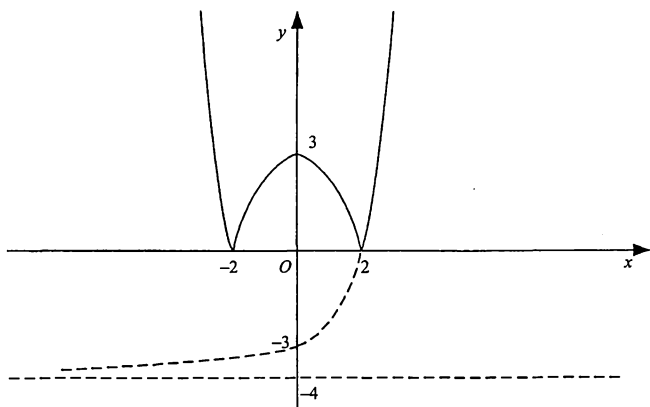


Рис. 3.60

3.171. $y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} - \frac{1}{2} \right|$.

Решение.

График функции $y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} - \frac{1}{2} \right|$ (рис. 3.61) получается последовательным построением следующих графиков:

$$y = \left(\frac{1}{2} \right)^x, x \geq 0; y = \left(\frac{1}{2} \right)^x - \frac{1}{2}, x \geq 0; y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - \frac{1}{2} \right|, x \geq 0; y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} - \frac{1}{2} \right| \text{ (используя четность исходной функции).}$$

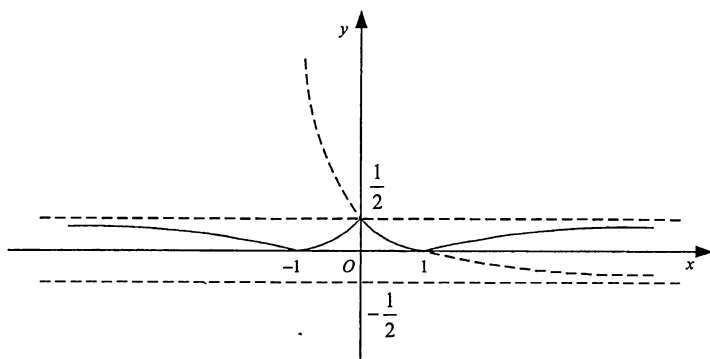


Рис. 3.61

3.172. $y = 2^{|x|}$.

Решение.

Чтобы построить график этой функции (рис. 3.62), строим прямые $x = n, n \in \mathbb{Z}$. Точки пересечения графика функции $y = 2^x$ с этими прямыми лежат на графике функции $y = 2^{|x|}$, так как их абсциссы — целые числа, а другие точки искомого графика получаются как проекции частей графика, лежащих в соответствующих полосах, на нижние границы — прямые этих полос.

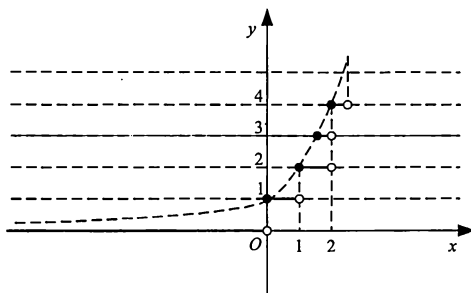


Рис. 3.62

3.173. $y = \cos^2 x$.

Решение.

$$y = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x. \text{ Строим полученный график (рис. 3.63).}$$

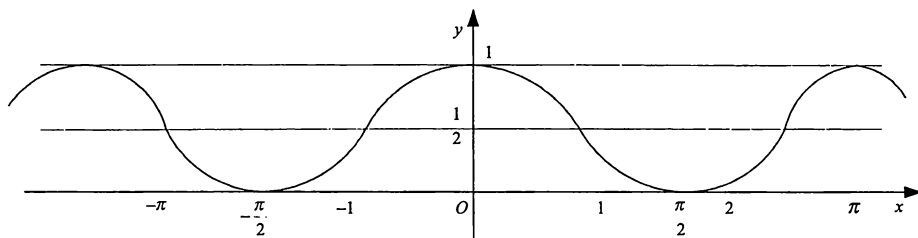


Рис. 3.63

3.174. $y = x + \sin x$.

Решение.

Каждая точка искомого графика (рис. 3.64) получается из соответствующей точки синусоиды $(x; \sin x)$ переносом на x единиц вверх при $x > 0$, вниз — при $x < 0$.

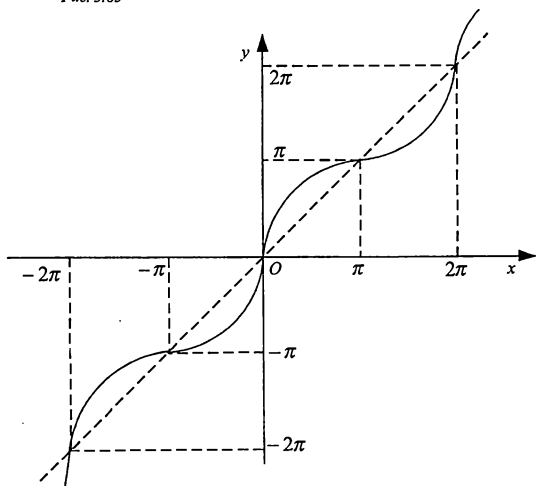


Рис. 3.64

3.175. $y = \left| \operatorname{tg} x \right| \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

Решение.

$D(y) = D(\operatorname{tg})$.

$$\frac{|\cos x|}{\cos x} = \begin{cases} 1, & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), \\ -1, & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$, строим искомый график (рис 3.65).

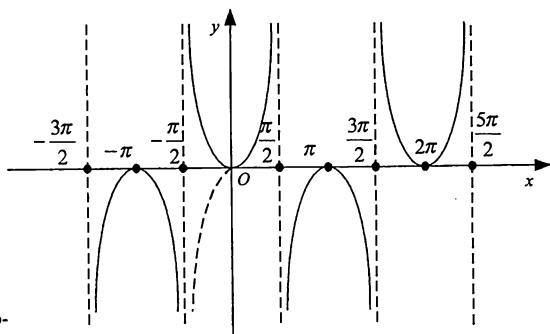


Рис. 3.65

3.176. $y = \frac{|x|}{x} \arcsin x$.

Решение.

$D(y) = [-1; 0) \cup (0; 1]$. $y = \frac{|x|}{x} \arcsin x = |\arcsin x|$ при $x \neq 0$. Строим график функции (рис. 3.66), используя график функции $y = \arcsin x$.

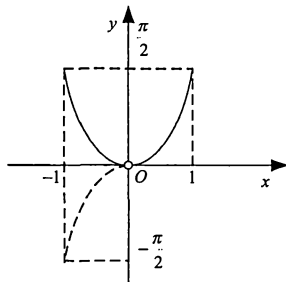


Рис. 3.66

3.177. $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение.

$D(y) = \mathbb{R}$. Используя обратность функций \arcsin и \sin на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, строим график (рис. 3.67) функции $y = \arcsin(\sin x)$.

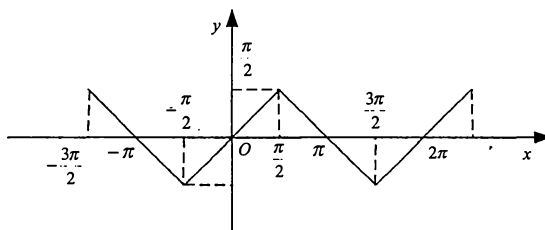


Рис. 3.67

3.178. $y = \arccos(\cos x)$.

Решение.

$D(y) = \mathbb{R}$. Используя обратность функций \arccos и \cos на промежутке $[0; \pi]$, строим график (рис. 3.68) функции $y = \arccos(\cos x)$.

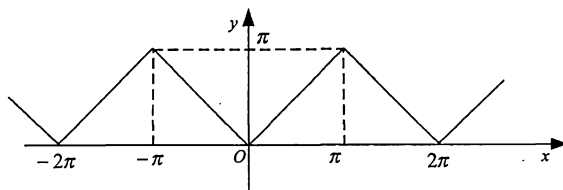


Рис. 3.68

3.179. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Решение.

$D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Используя обратность функций arctg и tg на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, строим график (рис. 3.69) функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

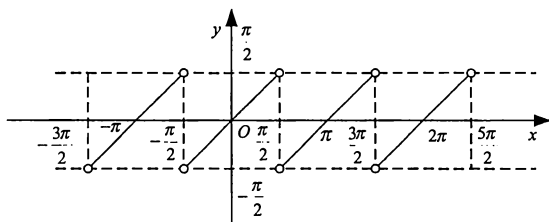


Рис. 3.69

3.180. $y = \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x)$.

Решение.

$D(y) = (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Используя обратность функций $\operatorname{arccctg}$ и ctg на промежутке $(0; \pi)$, строим график (рис. 3.70) функции $y = \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x)$.

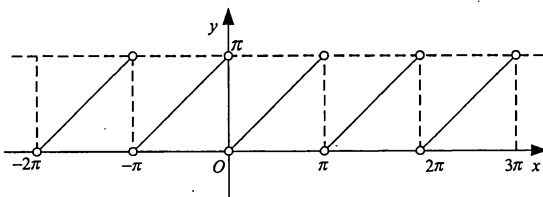


Рис. 3.70

Изобразить в координатной плоскости xOy множества, заданные соотношениями между x и y (3.181 – 3.185).

3.181. $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.

Решение.

$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$ — уравнение окружности с центром в точке $C(2; 2)$ и радиусом $R = 3$ (рис. 3.71).

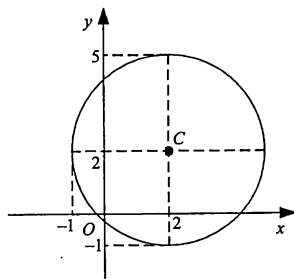


Рис. 3.71

3.182. $|x| + |y| \leq 1$.

Решение.

- 1) при $x \geq 0, y \geq 0$ получаем множество точек $x + y \leq 1$;
- 2) при $x \geq 0, y < 0$ имеем множество точек $x - y \leq 1$;
- 3) при $x < 0, y \geq 0$ имеем множество точек $y - x \leq 1$;
- 4) при $x < 0, y < 0$ имеем множество точек $-x - y \leq 1 \Leftrightarrow x + y \geq -1$.

Построив все четыре множества точек (рис. 3.72), получаем, что неравенство $|x| + |y| \leq 1$ определяет в плоскости xOy квадрат.

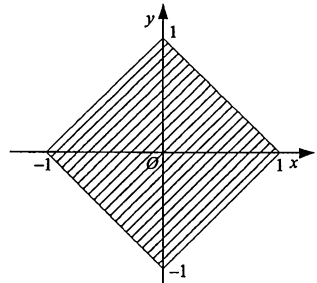


Рис. 3.72

3.183. $|y| = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

Решение.

Так как $\cos x > 0$, то $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$, $|\cos x| = \cos x$, следовательно, $y = \pm 1$ при указанных значениях x (рис. 3.73).

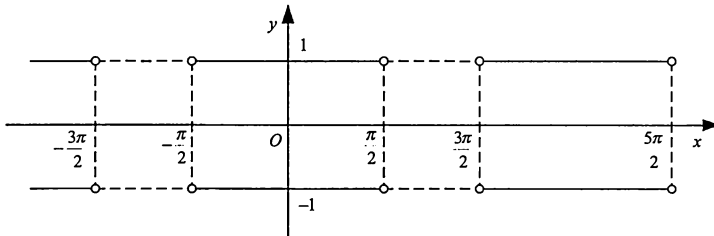


Рис. 3.73

3.184. $|y| = e^{\sqrt{\sin^2 x - 1}}$.

Решение.

Так как $\sin^2 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, следовательно, $y = \pm 1$ при указанных значениях x (рис. 3.74).

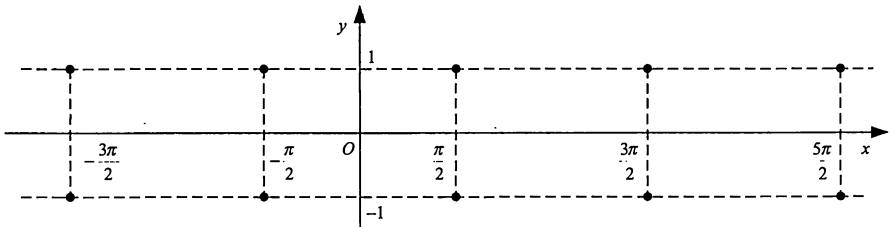


Рис. 3.74

3.185. $\ln\left(\left|x|-\frac{1}{2}\right|\right)(x^2+y^2) \leq \ln\left(\left|x|-\frac{1}{2}\right|\right)^4$.

Решение.

$$\begin{cases} |x| - \frac{1}{2} > 0, \\ |x| - \frac{1}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > \frac{1}{2}, \\ |x| \neq \frac{3}{2}, \end{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Рассмотрим два случая:

1) $x \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $\ln\left(\left|x|-\frac{1}{2}\right|\right)(x^2+y^2) \leq \ln\left(\left|x|-\frac{1}{2}\right|\right)^4 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2^2$;

2) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, $\ln\left(\left|x|-\frac{1}{2}\right|\right)(x^2+y^2) \leq \ln\left(\left|x|-\frac{1}{2}\right|\right)^4 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 2^2$.

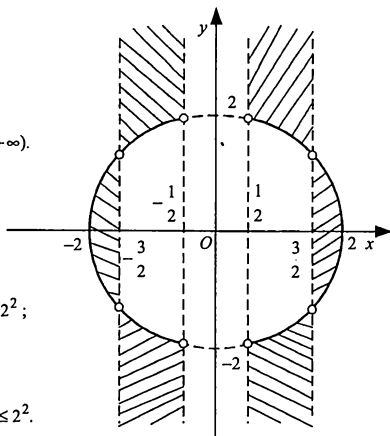


Рис. 3.75

Строим искомые множества точек (рис. 3.75).

Определить количество корней уравнения и для каждого корня — промежуток длиной единица, на котором находится данный корень (3.186 – 3.190).

3.186. $x^3 + x - 3 = 0$.

Решение.

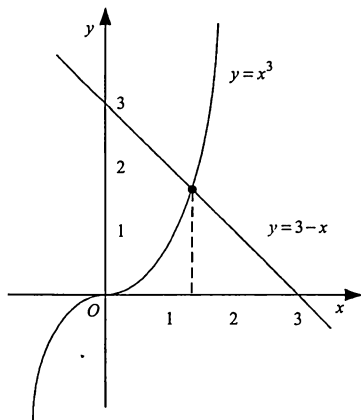


Рис. 3.76

$$x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

Строим графики функций $y = x^3$, $y = 3 - x$ (рис. 3.76). Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями исходного уравнения.

Из рис. 3.76 очевидно, что уравнение $x^3 + x - 3 = 0$ имеет один корень.

Функция $f(x) = x^3 + x - 3$ непрерывная, и так как $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 7 > 0$, то по теореме о непрерывных функциях корень находится на отрезке $[1; 2]$.

Ответ: один; $[1; 2]$.

3.187. $e^x + x^2 - 4 = 0$.

Решение.

$$e^x + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^x, \\ y = 4 - x^2. \end{cases}$$

Строим графики функций $y = e^x$, $y = 4 - x^2$ (рис. 3.77). Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями исходного уравнения.

Из рис. 3.77 ясно, что уравнение $e^x + x^2 - 4 = 0$ имеет два корня: один — отрицательный, второй — положительный.

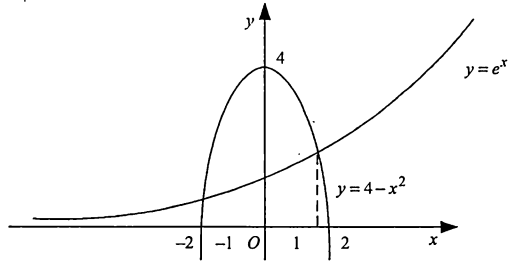


Рис. 3.77

Функция $f(x) = e^x + x^2 - 4$ непрерывная. Так как $f(-2) = e^{-2} + 4 - 4 = e^{-2} > 0$, $f(-1) = e^{-1} + 1 - 3 < 0$, то первый корень находится на отрезке $[-2; -1]$ по теореме о непрерывных функциях. Далее, $f(1) = e + 1 - 4 = e - 3 < 0$, $f(2) = e^2 + 4 - 4 > 0$, следовательно, второй корень лежит на отрезке $[1; 2]$.

Ответ: два; $[-2; -1]$, $[1; 2]$.

3.188. $2 \ln x - \frac{1}{x} = 0$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x > 0. \quad 2 \ln x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \ln x, \\ y = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Строим графики функций $y = 2 \ln x$, $y = \frac{1}{x}$ (рис. 3.78). Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями исходного уравнения.

Из рис. 3.78 видно, что уравнение $2 \ln x - \frac{1}{x} = 0$ имеет единственный корень.

Функция $f(x) = 2 \ln x - \frac{1}{x}$ непрерывная. Так как

$f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 4 - \frac{1}{2}$, то этот корень находится в промежутке $[1; 2]$.

Ответ: один; $[1; 2]$.

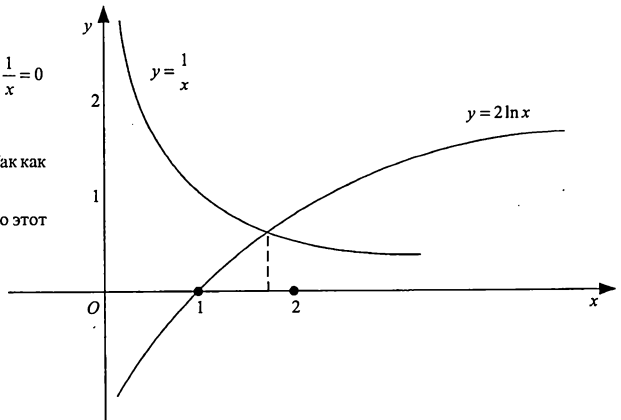


Рис. 3.78

3.189. $x^2 - \cos x = 0$.

Решение.

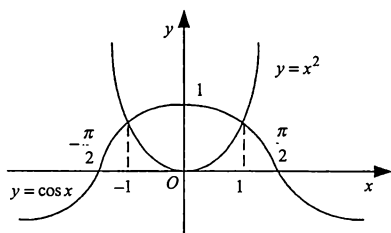


Рис. 3.79

$$x^2 - \cos x = 0 \Leftrightarrow x^2 = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ y = \cos x. \end{cases}$$

Строим графики функций $y = x^2$, $y = \cos x$ (рис. 3.79). Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями исходного уравнения.

Из рис. 3.79 очевидно, что уравнение имеет два корня, симметричных относительно точки O . Так как функция $f(x) = x^2 - \cos x$ непрерывна и $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$, то положительный корень лежит внутри отрезка $[0; 1]$, а отрицательный — внутри отрезка $[-1; 0]$.

Ответ: два; $[-1; 0]$, $[0; 1]$.

3.190. $\|x| - 1| \cdot 2^{|x|} = 1$.

Решение.

$$|x| \neq 1, \text{ следовательно, } \|x| - 1| \cdot 2^{|x|} = 1 \Leftrightarrow |1 - |x|| = 2^{-|x|} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - |x|, \\ y = 2^{-|x|}. \end{cases}$$

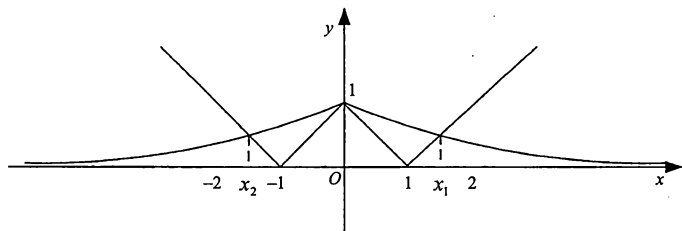


Рис. 3.80

Строим графики функций $y = 1 - |x|$, $y = 2^{-|x|}$ (рис. 3.80). Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями исходного уравнения.

Очевидно, что уравнение имеет три корня: $x_0 = 0$, $x_1 \in [1; 2]$, $x_2 \in [-2; -1]$.

Ответ: три; $[-2; -1]$, $[1; 2]$, $x = 0$.

3.191. Найти все значения параметра a такие, что при любом b уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.

Решение.

$$ax + b = |x| \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + b, \\ y = |x|. \end{cases}$$

Строим графики функций $y = |x|$, $y = ax + b$ (рис. 3.81).

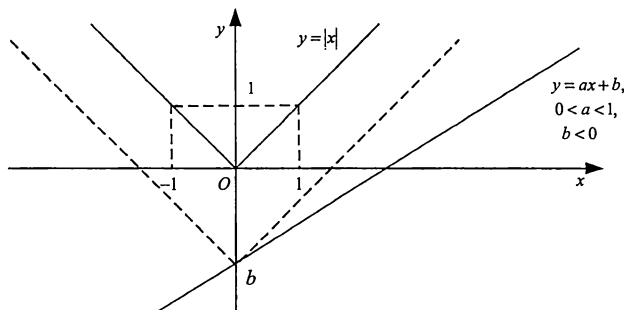


Рис. 3.81

Из рис. 3.81 видно, что при $b < 0$, $|a| \leq 1$, графики не пересекаются, следовательно, исходное уравнение решений не имеет. Если же $|a| > 1$, то они пересекаются при любых значениях b .

Ответ: $|a| > 1$.

3.192. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$.

Решение.

$$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a \Leftrightarrow \begin{cases} y = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|, \\ y = a. \end{cases}$$

Строим график функции $y = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|$ методом интервалов (рис. 3.82):

1) $x < 1$, $y = 2x^2 - 12x + 13$; 2) $1 \leq x < 2$, $y = 3$; 3) $2 \leq x < 4$, $y = -2x^2 + 12x - 13$;

4) $4 \leq x < 5$, $y = 3$; 5) $x \geq 5$, $y = 2x^2 - 12x + 13$.

Используя рис. 3.82, получаем следующий ответ.

Ответ: при $a < 3$ — решений нет;

при $a = 3$ — бесконечное множество решений;

при $3 < a < 5$ — четыре решения;

при $a = 5$ — три решения;

при $a > 5$ — два решения.

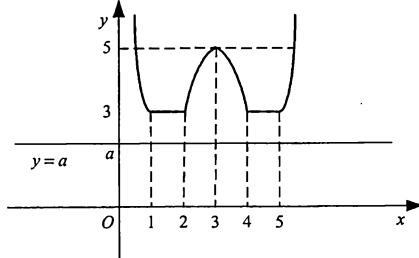


Рис. 3.82

3.193. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

Решение.

Строим графики уравнений $|x| + |y| = 1$ и $x^2 + y^2 = a$, $a \geq 0$ (рис. 3.83).

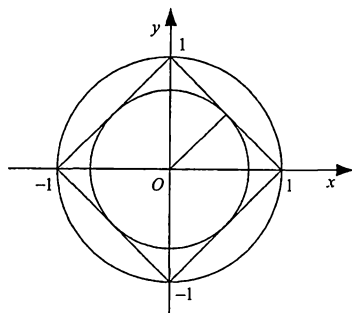


Рис. 3.83

Первое уравнение задает квадрат, а второе — семейство окружностей радиусом \sqrt{a} с центром в точке O . Тогда из рис. 3.83 следует,

что при $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ окружность вписана в квадрат, а при $\sqrt{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$ окружность описана около квадрата.

Ответ: при $a < \frac{1}{2}$ и $a > 1$ — решений нет;

при $a = \frac{1}{2}$ и $a = 1$ — четыре решения;

при $\frac{1}{2} < a < 1$ — восемь решений.

ТЕМА: ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Доказать формулы (3.194 – 3.202).

3.194. $(x)' = 1$.

Решение.

$$(x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

QED.

3.195. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Решение.

$$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

QED.

3.196. $(\sin x)' = \cos x$.

Решение.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

QED.

3.197. $(\cos x)' = -\sin x$.

Решение.

$$(\cos x)' = \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right)' = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x \right)' = -\sin x.$$

QED.

3.198. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Решение.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

QED.

3.199. $(a^x)' = a^x \ln a$.

Решение.

$$(a^x)' \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a. \text{ Использовали замечательный предел } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{a^z - 1}{z} = \ln a. \quad \text{QED.}$$

3.200. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Решение.

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \left[y = \frac{\Delta x}{x}, \Delta x = yx \right] = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{yx} \log_a(1 + y) = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(y+1)}{y} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

QED.

3.201. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.

$$\text{Так как } \sin(\arcsin x) = x, \text{ то } ((\sin(\arcsin x))' = 1 \Rightarrow \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1 \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

$$\text{Если } \varphi = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ то } \sin \varphi = x, |\cos \varphi| = \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - x^2}. \text{ Окончательно, имеем } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

QED.

$$3.202. (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Решение.

Так как $\operatorname{tg}(\arctg x) = x$, то $(\operatorname{tg}(\arctg x))' = 1 \Rightarrow \frac{(\arctg x)'}{\cos^2(\arctg x)} = 1 \Rightarrow (\arctg x)' \cos^2(\arctg x)$. Если $\varphi = \arctg x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = x, 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Rightarrow \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + x^2}. \text{ Окончательно, имеем } (\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \quad \text{QED.}$$

Вычислить производные заданных функций (3.203–3.218).

$$3.203. y = 2x^5 - 4\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Решение.

$$y' = (2x^5 - 4\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x})' = 2(x^5)' - 4(x^{\frac{2}{3}})' + (x^{-1})' = 10x^4 - \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}} - x^{-2} = 10x^4 - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Ответ: } y' = 10x^4 - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

$$3.204. y = \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x^2 + 1}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x^4 - 2x^2 + 3)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'(x^4 - 2x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(4x^3 - 4x)(x^2 + 1) - 2x(x^4 - 2x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x((2x^2 - 2)(x^2 + 1) - x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(2x^4 - 2x^2 + 2x^2 - 2 - x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 5)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 5)}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$3.205. y = x^2 \sqrt[3]{5x+2}.$$

Решение.

$$y' = (x^2 \sqrt[3]{5x+2})' = (x^2)' \sqrt[3]{5x+2} + x^2 \left(\sqrt[3]{5x+2} \right)' = 2x \sqrt[3]{5x+2} + x^2 \cdot \frac{1}{3} (5x+2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 5 = 2x \sqrt[3]{5x+2} + \frac{5x^2}{3\sqrt[3]{(5x+2)^2}}.$$

$$\text{Ответ: } y' = 2x \sqrt[3]{5x+2} + \frac{5x^2}{3\sqrt[3]{(5x+2)^2}}.$$

3.206. $y = \sin^3 4x$.

Решение.

$$y' = (\sin^3 4x)' = 3\sin^2 4x \cdot (\sin 4x)' = 3\sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4 = 12\sin^2 4x \cdot \cos 4x.$$

Ответ: $y' = 12\sin^2 4x \cdot \cos 4x$.

3.207. $y = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{3} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \frac{1}{3} \frac{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}} \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1+x^2)'(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x(1+x^2+1-x^2)}{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}(1+x^2)^4} = \\ &= \frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2(1+x^2)^4}} = \frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-x^4)^2(1+x^2)^2}}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-x^4)^2(1+x^2)^2}}$.

3.208. $y = \sin 3x \cdot \cos 5x$.

Решение.

$$y' = (\sin 3x \cdot \cos 5x)' = (\sin 3x)' \cos 5x + \sin 3x (\cos 5x)' = 3\cos 3x \cdot \cos 5x - 5\sin 3x \cdot \sin 5x.$$

Ответ: $y' = 3\cos 3x \cdot \cos 5x - 5\sin 3x \cdot \sin 5x$.

3.209. $y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos 4x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos 4x} \right)' = \frac{(\operatorname{tg} 2x)' \cos 4x - (\cos 4x)' \operatorname{tg} 2x}{\cos^2 4x} = \frac{\frac{2}{\cos^2 2x} \cos 4x + 4 \sin 4x \cdot \operatorname{tg} 2x}{\cos^2 4x} = \frac{2 \cos 4x + 4 \sin 4x \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x}{\cos^2 2x \cdot \cos^2 4x} = \\ &= \frac{2(\cos 4x + \sin^2 4x)}{\cos^2 2x \cdot \cos^2 4x}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{2(\cos 4x + \sin^2 4x)}{\cos^2 2x \cdot \cos^2 4x}$.

$$3.210. y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}) \right)' = \frac{(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})'}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x \sqrt{1+e^{2x}} + e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})} = \\ &= \frac{e^x(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})}{\sqrt{1+e^{2x}}(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})} = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

$$3.211. y = (\cos^2 x + 3) \cdot 5^x.$$

Решение.

$$y' = ((\cos^2 x + 3) \cdot 5^x)' = (\cos^2 x + 3)' \cdot 5^x + (\cos^2 x + 3) \cdot (5^x)' = (-2\cos x \cdot \sin x) \cdot 5^x + (\cos^2 x + 3) \cdot 5^x \ln 5 = 5^x ((\cos^2 x + 3) \ln 5 - \sin 2x).$$

Ответ: $y' = 5^x ((\cos^2 x + 3) \ln 5 - \sin 2x).$

$$3.212. y = \arctg(\operatorname{tg}^2 x).$$

Решение.

$$y' = (\arctg(\operatorname{tg}^2 x))' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x} (\operatorname{tg}^2 x)' = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ответ: $y' = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$

$$3.213. y = 3^{\arcsin^2 3x}.$$

Решение.

$$y' = (3^{\arcsin^2 3x})' = 3^{\arcsin^2 3x} \cdot \ln 3 \cdot (\arcsin^2 3x)' = 3^{\arcsin^2 3x} \cdot \ln 3 \cdot 2 \arcsin 3x \cdot \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{2 \cdot 3^{\arcsin^2 3x+1} \cdot \ln 3 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Ответ: $y' = \frac{2 \cdot 3^{\arcsin^2 3x+1} \cdot \ln 3 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-9x^2}}.$

$$3.214. y = \ln(1 + \sin^2 x) + 2 \sin x \operatorname{arccotg}(\sin x).$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= (\ln(1 + \sin^2 x) + 2 \sin x \operatorname{arccotg}(\sin x))' = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} + \left(2 \cos x \cdot \operatorname{arccotg}(\sin x) - 2 \sin x \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = \\ &= \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} - \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} + 2 \cos x \operatorname{arccotg}(\sin x) = 2 \cos x \operatorname{arccotg}(\sin x). \end{aligned}$$

Ответ: $y' = 2 \cos x \operatorname{arccotg}(\sin x)$.

$$3.215. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, x > 0.$$

Решение.

$$y' = (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}})' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right) = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}.$$

Ответ: $y' = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}.$

$$3.216. y = \ln(\ln^2(\ln^3 x)), x > e.$$

Решение.

$$y' = (\ln(\ln^2(\ln^3 x)))' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2 \ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}.$$

Ответ: $y' = \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}.$

$$3.217. y = x^x, x > 0.$$

Решение.

$$y = x^x \Leftrightarrow \ln y = \ln x^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow (\ln y)' = (x \ln x)', \frac{1}{y} y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = y(\ln x + 1), y' = x^x(\ln x + 1).$$

Ответ: $y' = x^x(\ln x + 1)$.

$$3.218. y = (\sin x)^{\cos x}.$$

Решение.

$$y = (\sin x)^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^{\cos x}, \ln y = \cos x \ln(\sin x).$$

$$(\ln y)' = (\cos x \ln(\sin x))' \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \frac{\cos x}{\sin x}, y' = y(\cos x \operatorname{ctg} x - \sin x \ln(\sin x)), y' = (\sin x)^{\cos x + 1}(\operatorname{ctg}^2 x - \ln(\sin x)).$$

Ответ: $y' = (\sin x)^{\cos x + 1}(\operatorname{ctg}^2 x - \ln(\sin x)).$

3.219. $y = (1+x)\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3}.$

Решение.

$$\ln y = \ln((1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}) = \ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(2+x^2) + \frac{1}{3}\ln(3+x^3).$$

$$(\ln y)' = (\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(2+x^2) + \frac{1}{3}\ln(3+x^3))'.$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+2} + \frac{x^2}{x^3+3} \Rightarrow y' = y \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+2} + \frac{x^2}{x^3+3} \right).$$

Ответ: $y' = (1+x)\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+2} + \frac{x^2}{x^3+3} \right).$

3.220. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 5$ в точке его пересечения с осью ординат.

Решение.

По условию точка касания — $x_0 = 0, y_0 = 5$. Далее, $y' = 2x - 2$, следовательно, $y'(x_0) = -2$. Искомое уравнение касательной: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 5 = -2(x - 0), y = -2x + 5$.

Ответ: $y = -2x + 5$.

3.221. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 2x^3 + 2$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Решение.

По условию, точка касания — $y_0 = 0 \Rightarrow 2(x_0)^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$. Далее, $y' = 6x^2, y'(x_0) = 6$. Искомое уравнение касательной: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = 6(x + 1), y = 6x + 6$.

Ответ: $y = 6x + 6$.

3.222. Составить уравнение касательных к графику функции $y = x^2 - 2x$, проходящих через точку $M(1; -5)$.

Решение.

$$y'(x_0) = (x_0^2 - 2x_0)' = 2x_0 - 2, y_0 = x_0^2 - 2x_0. \text{ Уравнение касательной: } y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^2 - 2x_0) = (2x_0 - 2)(x - x_0).$$

По условию касательные проходят через точку $M(1; -5)$, следовательно,

$$\begin{aligned}
 -5 - x_0^2 + 2x_0 &= 2(x_0 - 1)(1 - x_0) \Leftrightarrow -5 - x_0^2 + 2x_0 = \\
 &= -2x_0 + 4x_0 - 2 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0, \quad x_{01} = -1, \quad x_{02} = 3, \quad y_0 = 3.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем две касательные (рис. 3.84.):

$$1) x_{01} = -1, \quad y_0 = 3, \quad y - 3 = -4(x + 1), \quad y = -4x - 1;$$

$$2) x_{02} = 3, \quad y_0 = 3, \quad y - 3 = 4(x - 3), \quad y = 4x - 9.$$

Ответ: $y = -4x - 1$, $y = 4x - 9$.

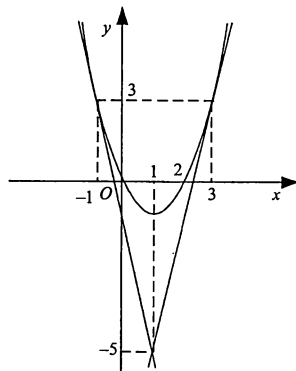


Рис. 3.84

3.223. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол в 135° ?

Решение.

$$y' = \left(\frac{x+2}{x-2} \right)' = \frac{(x+2)'(x-2) - (x-2)'(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-2}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}.$$

По условию угловой коэффициент касательной равен:

$$k = y'(x) = \operatorname{tg} 135^\circ = -1 \Leftrightarrow -\frac{4}{(x-2)^2} = -1 \Leftrightarrow |x-2| = 2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 4; \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 3.$$

Ответ: $(0; -1)$, $(4; 3)$.

3.224. На кривой $y = x^2 - x + 1$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(3; 8)$.

Решение.

Рассмотрим уравнение $y = kx + b$ прямой AB . Так как A, B лежат на этой прямой, то получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 = k + b, \\ 8 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow 2k = 6, \quad k = 3, \quad b = -1.$$

Угловой коэффициент касательной — $y'(x_0) = 2x_0 - 1$. Так как касательная параллельна AB , то $2x_0 - 1 = 3 \Rightarrow x_0 = 2$, $y_0 = 4 - 2 + 1 = 3$, $M(2; 3)$. Точка M не лежит на прямой AB : $y = 3x - 1$, следовательно, указанные прямые строго параллельны.

Ответ: $M(2; 3)$.

3.225. Найти расстояние от точки $M\left(2; \frac{1}{2}\right)$ до кривой $y = x^2$.

Решение.

Искомое расстояние $d = MK$ (рис. 3.85) равно отрезку нормали к графику функции $y = x^2$, проходящей через точку M . Если $K(x_0; x_0^2)$ — точка касания, то уравнение нормали принимает вид:

$$y - x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y = x_0^2 - \frac{x}{2x_0} + \frac{1}{2}, x_0 \neq 0.$$

Так как нормаль проходит через точку $M(2; \frac{1}{2})$, то получаем

$$\frac{1}{2} = x_0^2 - \frac{2}{2x_0} + \frac{1}{2} \Rightarrow x_0^2 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0^3 - 1}{x_0} = 0, x_0 = 1, x_0^2 = 1.$$

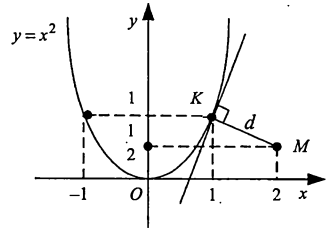


Рис. 3.85

Таким образом, $K(1; 1)$, $M(2; \frac{1}{2})$, $d = MK = \sqrt{(2-1)^2 + (1-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3.226. Найти углы между кривыми $y = 6 - x^2$, $y = x^2 - 2$ в точках их пересечения.

Решение.

$$\begin{cases} y = 6 - x^2, \\ y = x^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow 6 - x^2 = x^2 - 2, x^2 = 4, |x| = 2, y = 2.$$

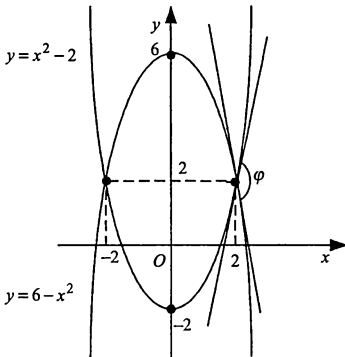


Рис. 3.86

В силу симметрии достаточно найти угол между кривыми в точке $M(2; 2)$. Этим углом называется угол между касательными к данным кривым в точке M (рис. 3.86). Если $f_1(x) = 6 - x^2$, $f_2(x) = x^2 - 2$, то $f_1'(x) = -2x$, $f_2'(x) = 2x$. $k_1 = f_1'(2) = -4$, $k_2 = f_2'(2) = 4$. Тогда один из углов между касательными находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{4 + 4}{1 - 16} = -\frac{8}{15}, \varphi = \pi - \operatorname{arctg} \frac{8}{15}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{8}{15}, \pi - \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$.

3.227. Отрезок произвольной касательной к кривой $y = x^2$, заключенный между точкой касания и осью Ox , спроектирован на ось Ox . Доказать, что эта проекция вдвое больше проекции аналогичного отрезка касательной к кривой $y = x^4$ с той же абсциссой точки касания.

Решение.

1) Пусть $(x_0; x_0^2)$ — точка касания на параболе $y = x^2$, тогда уравнение касательной принимает вид: $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \Leftrightarrow y = 2x_0x - x_0^2$. Абсцисса x_1 точки пересечения этой касательной с осью Ox : $2x_0x_1 - x_0^2 = 0$, $x_1 = \frac{x_0}{2}$, $x_0 \neq 0$, а длина проекции отрезка касательной на ось Ox : $l_1 = |x_1 - x_0| = \frac{|x_0|}{2}$.

2) Если $(x_0; x_0^4)$ — точка касания на кривой $y = x^4$, то уравнение касательной $y - x_0^4 = 4x_0^3(x - x_0) \Leftrightarrow y = 4x_0^3x - 3x_0^4$. Абсцисса x_2 точки пересечения этой касательной с осью Ox : $4x_0^3x_2 - 3x_0^4 = 0$, $x_2 = \frac{3x_0}{4}$, $x_0 \neq 0$, а длина проекции отрезка касательной на ось Ox : $l_2 = |x_2 - x_0| = \frac{|x_0|}{4}$. Окончательно имеем: $l_1 = 2l_2$ при $x_0 \neq 0$. **QED.**

3.228. Доказать, что касательная к кривой $y = \frac{a^2}{x}$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

Решение.

Пусть $(x_0; \frac{a^2}{x_0})$ — точка касания на гиперболе $y = \frac{a^2}{x}$, тогда уравнение касательной примет вид:

$$y - \frac{a^2}{x_0} = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0) \Leftrightarrow y = -\frac{a^2x}{x_0^2} + \frac{2a^2}{x_0}, x_0 \neq 0.$$

Находим координаты точек пересечения касательной с осями координат:

$$1) x = x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{2a^2}{x_0}, A\left(0; \frac{2a^2}{x_0}\right); 2) y = y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_0, B(2x_0; 0).$$

Площадь S прямоугольного треугольника AOB будет равна:

$$S = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \frac{2a^2}{|x_0|} \cdot 2|x_0| = 2a^2.$$

QED.

3.229. При каком значении параметра a из промежутка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ площадь треугольника, ограниченного касательной к графику

функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ с абсциссой a в точке касания, осью абсцисс и прямой $x = 2$, будет наименьшей? Найти эту площадь.

Решение.

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, y'(a) = \frac{2}{3a^{\frac{1}{3}}}, \text{ уравнение касательной: } y - a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3a^{\frac{1}{3}}}(x - a) \Rightarrow 3a^{\frac{1}{3}}y = 2x + a.$$

Пусть S — искомая площадь треугольника ABC (рис. 3.87).

$$A: 3a^{\frac{1}{3}} \cdot 0 = 2x + a \Rightarrow x = -\frac{a}{2} \Rightarrow |AC| = 2 + \frac{a}{2} = \frac{a+4}{2};$$

$$B: \frac{1}{3}y = 2 \cdot 2 + a \Rightarrow y = \frac{a+4}{\frac{1}{3a^{\frac{1}{3}}}} \Rightarrow |BC| = \frac{a+4}{\frac{1}{3a^{\frac{1}{3}}}}.$$

$$S = S(a) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \frac{a+4}{2} \frac{a+4}{\frac{1}{3a^{\frac{1}{3}}}} = \frac{1}{12} \frac{(a+4)^2}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}}.$$

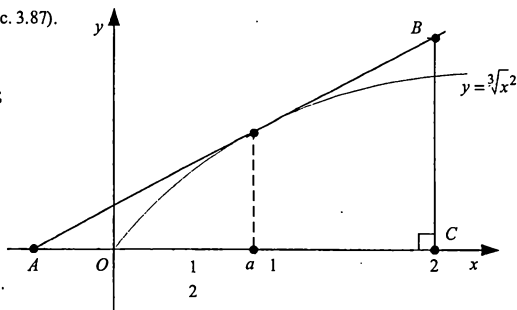


Рис. 3.87

$$S'(a) = \frac{1}{36}a^{-\frac{4}{3}}(a+4)(5a-4), a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], S'(a) = 0 \text{ при } a = \frac{4}{5},$$

$S'(a) < 0$ при $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right)$, $S'(a) > 0$ при $a \in \left(\frac{4}{5}; 1\right]$, следовательно, $a = \frac{4}{5}$ — min. Так как на промежутке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ имеется только одна точка минимума, то в ней функция и принимает свое наименьшее значение.

$$S\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{11}{12} \frac{\left(4 + \frac{4}{5}\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{4}{5}}} = \frac{48}{25} \sqrt[3]{\frac{5}{4}}.$$

Ответ: $a = \frac{4}{5}$, $S = \frac{48}{25} \sqrt[3]{\frac{5}{4}}.$

3.230. При каком значении параметра a касательные, проведенные из точки $M(2; 3)$ к параболе $y = ax^2$, пересекаются под прямым углом?

Решение.

Пусть $A(x_1; ax_1^2)$ и $B(x_2; ax_2^2)$ — точки параболы $y = ax^2$, через которые проходят касательные, пересекающиеся в точке

$$M(2; 3) \text{ под углом } 90^\circ. \text{ Тогда } k_1 = y'(x_1) = 2ax_1, k_2 = y'(x_2) = 2ax_2 \text{ и } k_1 k_2 = -1 \Rightarrow 4a^2 x_1 x_2 = -1, x_1 x_2 = -\frac{1}{4a^2}.$$

Уравнения касательных имеют вид:

$$1) y - ax_1^2 = 2ax_1(x - x_1); \quad 2) y - ax_2^2 = 2ax_2(x - x_2)$$

Так как точка $M(2; 3)$ лежит на этих касательных, то получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 - ax_1^2 = 2ax_1(2 - x_1), \\ 3 - ax_2^2 = 2ax_2(2 - x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1^2 - 2ax_1^2 = 4ax_1 - 2ax_1^2 - 2ax_1^2 \Rightarrow x_2^2 - x_1^2 - 4(x_2 - x_1) = 0, \\ 3 - ax_2^2 = 2ax_2(2 - x_2) \end{cases}$$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 4) = 0, x_2 + x_1 = 4, \text{ так как } x_2 \neq x_1.$$

Из первого уравнения системы имеем: $3 = 4ax_1 - ax_1^2 = (x_1 + x_2)ax_1 - ax_1^2 = ax_1x_2 = a\left(-\frac{1}{4a^2}\right) = -\frac{1}{4a}$, $a = -\frac{1}{12}$.

Ответ: $a = -\frac{1}{12}$.

3.231. Сколько корней, в зависимости от параметра a , имеет уравнение $|\ln x| - ax = 0$?

Решение.

$|\ln x| - ax = 0 \Leftrightarrow |\ln x| = ax$. Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} y = |\ln x|, \\ y = ax \end{cases}$ и построим графики функций, входящих в эту систему (рис. 3.88).

Уравнение будет иметь два корня в случае, когда $y = ax$ является касательной к кривой $y = |\ln x|$. Пусть $K(x_0; \ln x_0)$ – точка касания, тогда уравнение касательной принимает вид:

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y = \frac{x}{x_0} + (\ln x_0 - 1).$$

Отсюда $\ln x_0 - 1 = 0$, $\ln x_0 = 1$, $x_0 = e$, $\frac{1}{e}$. Далее, очевидно, что при $a < 0$ корней нет; при $a = 0$ — два корня; при $0 < a < \frac{1}{e}$ — три корня; при $a = \frac{1}{e}$ — два корня; при $a > \frac{1}{e}$ — один корень.

Ответ: если $a < 0$, то корней нет;

если $a = 0$, то корень один;

если $0 < a < \frac{1}{e}$, то три корня;

если $a = \frac{1}{e}$, то два корня;

если $a > \frac{1}{e}$, то один корень.

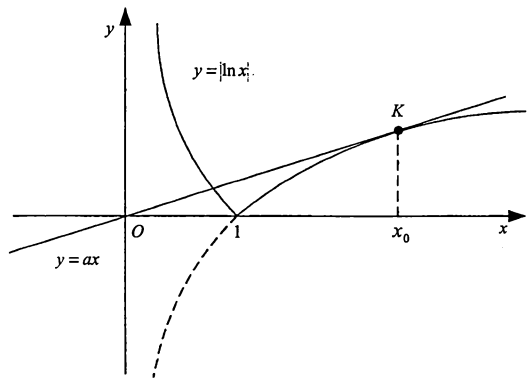


Рис. 3.88

3.232. Задан закон прямолинейного движения $s(t) = \frac{3t+5}{2t+4}$, где s и t измеряются в метрах и секундах соответственно. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 2$.

Решение.

По механическому смыслу производной мгновенная скорость

$$v(t) = s'(t) = \frac{(3t+5)'(2t+4) - (2t+1)'(3t+5)}{(2t+4)^2} = \frac{6t+3 \cdot 4 - 6t-10}{(2t+4)^2} = \frac{-2}{(2t+4)^2},$$

а мгновенное ускорение

$$a(t) = v'(t) = (2(2t+4)^{-2})' = -4(2t+4)^{-3} \cdot 2 = -\frac{8}{(2t+4)^3}.$$

$$v(2) = \frac{2}{8^2} = \frac{1}{32} \text{ м/с}; \quad a(2) = -\frac{8}{8^3} = -\frac{1}{64} \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\frac{1}{32}$ м/с; $-\frac{1}{64}$ м/с².

3.233. Задан закон прямолинейного движения $s(t) = 25 + 10t + 24t^2 - 0,3t^5$. В какой момент времени тело имеет наибольшую скорость? Найти эту скорость.

Решение.

По механическому смыслу производной мгновенная скорость $v(t) = s'(t) = 10 + 48t - 1,5t^4$, а мгновенное ускорение $a(t) = v'(t) = 48 - 6t^3 = 6(8 - t^3)$, $a(t) = 0$ при $t = 2$.

В точке $t = 2$ возрастание функции сменяется убыванием, поэтому $t = 2$ — точка максимума. При $t \in (-\infty; +\infty)$ функция $v(t)$ имеет единственный экстремум — максимум, следовательно, в нем функция $v(t)$ принимает свое наибольшее значение $v(2) = 82$ м/с.

Ответ: $v(2) = 82$ м/с.

3.234. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{5}{3t+2}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного пути.

Решение.

По второму закону Ньютона сила $F = ma(t)$, где

$$a(t) = s''(t) = (5(3t+2)^{-1})'' = (-5(3t+2)^{-2} \cdot 3)' = -15((3t+2)^{-2})' = -15 \cdot (-2)(3t+2)^{-3} = \frac{90}{(3t+2)^3} = 18(s(t))^3.$$

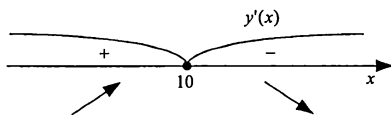
Таким образом, $F = (18m)(s(t))^3$ и коэффициент прямой пропорциональности $18m$.

QED.

Найти экстремумы функции и указать промежутки ее возрастания и убывания (3.235 – 3.239).

3.235. $y = xe^{-0,1x}$.

Решение.



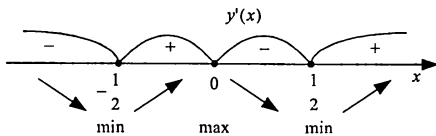
$D(y) = \mathbb{R}$. $y' = (x)'e^{-0,1x} + x(e^{-0,1x})' = e^{-0,1x} - 0,1xe^{-0,1x} = 0,1e^{-0,1x}(10 - x)$. $y' = 0$ при $x = 10$. $y' > 0$ при $x \in (-\infty; 10)$, $y' < 0$ при $x \in (10; +\infty)$. В точке $x = 10$ возрастание функции сменяется на убывание, следовательно, $x = 10$ — точка максимума.

Ответ: $x = 10$ — точка максимума.

3.236. $y = 4x^4 - 2x^2 + 7$.

Решение.

$$D(y) = \mathbb{R}. \quad y' = 16x^3 - 4x = 4x(4x^2 - 1) = 16x \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right).$$



В точке $x = -\frac{1}{2}$ убывание функции меняется на возрастание, в точке $x = 0$ — возрастание на убывание, а в точке $x = \frac{1}{2}$ —

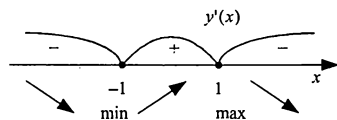
убывание на возрастание, следовательно, $x = \pm \frac{1}{2}$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума.

Ответ: $x = 0$ — точка максимума, $x = \pm \frac{1}{2}$ — точки минимума.

3.237. $y = 3x - x^3$.

Решение.

$D(y) = \mathbb{R}. \quad y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$. В точке $x = -1$ убывание функции меняется на возрастание, а в точке $x = 1$ — возрастание на убывание, следовательно, $x = -1$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума.



Ответ: $x = -1$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума.

3.238. $y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$.

Решение.

$$D(y) = \mathbb{R}. \quad y' = \frac{(x^3)'(x^2 + 3) - x^3(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} = \frac{3x^2(x^2 + 3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{x^2(3x^2 + 9 - 2x^2)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{x^2(x^2 + 9)}{(x^2 + 3)^2} > 0$$

при $x \neq 0$, следовательно, функция возрастает на всей числовой оси.

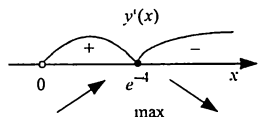
Ответ: функция возрастает.

3.239. $y = \frac{\ln x + 5}{x}$.

Решение.

$$D(y) = (0; +\infty). \quad y' = \frac{(\ln x + 5)' \cdot x - (\ln x + 5)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 5}{x^2} = -\frac{\ln x + 4}{x^2}. \quad y' = 0 \text{ при}$$

$x = e^{-4}$. В точке e^{-4} возрастание функции меняется на убывание, следовательно, $x = e^{-4}$ — точка максимума.



Ответ: $x = e^{-4}$ — точка максимума.

3.240. Установить, что больше: e^π или π^e .

Решение.

Рассмотрим функцию $y = \frac{x}{\ln x}$. $D(y) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$y' = \left(\frac{x}{\ln x} \right)' = \frac{x' \ln x - x (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}. y' = 0 \text{ при } x = e, y' > 0 \text{ при } x \in (e; +\infty), \text{ следовательно, функция возрастает на } [e;$$

$+\infty)$. Таким образом, $\pi > e \Rightarrow y(\pi) > y(e) \Leftrightarrow \frac{\pi}{\ln \pi} > \frac{e}{\ln e} \Leftrightarrow \pi \ln e > e \ln \pi \Leftrightarrow \ln e^\pi > \ln \pi^e \Leftrightarrow e^\pi > \pi^e$.

Ответ: $e^\pi > \pi^e$.

3.241. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 3a^2x + 6 = 0$ имеет три корня?

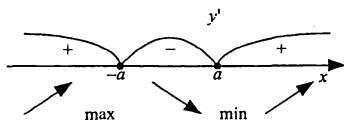
Решение.

Пусть $y = x^3 - 3a^2x + 6$. $D(y) = \mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 3a^2 = 3(x - a)(x + a)$. Рассмотрим два случая:

1) $a > 0$.

Уравнение имеет три корня тогда и только тогда, когда

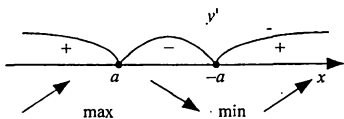
$$\begin{cases} y(-a) > 0, \\ y(a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^3 + 3a^3 + 6 > 0, \\ a^3 - 3a^3 + 6 < 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 3 > 0, \\ 3 - a^3 < 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > \sqrt[3]{3};$$



2) $a < 0$.

Уравнение имеет три корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} y(a) > 0, \\ y(-a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3a^3 + 6 > 0, \\ -a^3 + 3a^3 + 6 < 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a^3 > 0, \\ a^3 + 3 < 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\sqrt[3]{3}.$$



Ответ: $a \in (-\infty; -\sqrt[3]{3}) \cup (\sqrt[3]{3}; +\infty)$

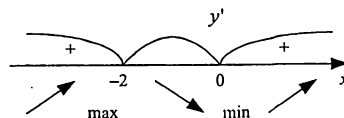
3.242. При каких значениях параметра a уравнение $x^2e^x - a - 3 = 0$ имеет два корня?

Решение.

$x^2e^x - a - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2e^x = a + 3$. Пусть $y = x^2e^x$. $D(y) = \mathbb{R}$.

$$y' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2e^x = xe^x(x + 2).$$

$$y(-2) = \frac{4}{e^2}, y(0) = 0.$$



Эскиз графика функции $y = x^2 e^x$ имеет вид, показанный на рис. 3.89.

Из рис. 3.89 видно, что уравнение имеет два корня, если

$$a + 3 = \frac{4}{e^2}, \quad a = \frac{4}{e^2} - 3 = \frac{4 - 3e^2}{e^2}.$$

Ответ: $a = \frac{4 - 3e^2}{e^2}$.

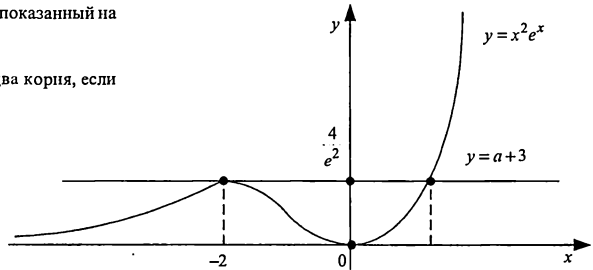


Рис. 3.89

3.243. При каких отличных от нуля значениях параметров a и b все экстремумы функции $f(x) = a^2 x^3 + ax^2 - x + b$ отрицательны и локальный максимум находится в точке $x_0 = -1$?

Решение.

$D(f) = R, f'(x) = 3a^2 x^2 + 2ax - 1, f'(x) = 0$ при $x_1 = -\frac{1}{a}, x_2 = \frac{1}{3a}$. Так как коэффициент при x^3 положителен, то максимум $f(x)$ находится левее минимума. Рассмотрим два случая:

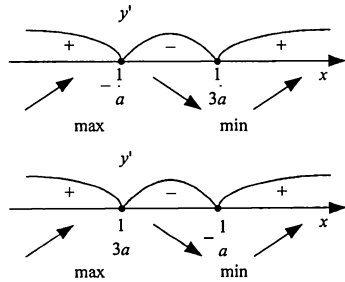
1) $a > 0$.

$$x_0 = -\frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = 1, f(-1) = -1 + 1 + 1 + b < 0, b < -1;$$

2) $a < 0$.

$$x_0 = \frac{1}{3a} = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, f(-1) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 + b < 0 \Rightarrow b < -\frac{5}{9}.$$

Ответ: при $a = -\frac{1}{3}$ и $b < -\frac{5}{9}$; при $a = 1$ и $b < -1$.



3.244. При каких значениях параметра a минимальное значение функции $y = x^2 - 4ax - a^4$ принимает наибольшее значение?

Решение.

Ветви параболы $y = x^2 - 4ax - a^4$ направлены вверх, $y' = 2x - 4a = 0 \Rightarrow x_0 = 2a, y_0 = y(2a) = 4a^2 - 8a^2 - a^4 = -4a^2 - a^4$. Будем искать наибольшее значение функции $f(x) = -4a^2 - a^4$. Так как $f(a) \leq 0$ для всех a , то это наибольшее значение равно нулю при $a = 0$.

Ответ: $a = 0$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданных промежутках (3.244–3.250).

3.245. $y = -x^3 + 3x^2 + 5; [0; 3]$.

Решение.

$$y' = (-x^3 + 3x^2 + 5)' = -3x^2 + 6x = 3x(2 - x). y' = 0 \Leftrightarrow 3x(2 - x) = 0, x_1 = 0, x_2 = 2. y_1 = f(x_1) = f(0) = 5, y_2 = f(x_2) = f(2) = 9, y_3 = f(3) = 5, y_{\text{наим}} = 5, y_{\text{наиб}} = 9.$$

Ответ: $y_{\text{наим}} = 5, y_{\text{наиб}} = 9$.

3.246. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2; [-2; 2].$

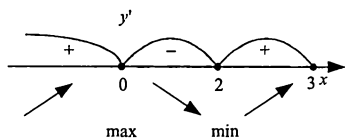
Решение.

$$y' = (x^3 - 3x^2 + 3x + 2)' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 > 0 \text{ при } x \neq 1. \text{ Таким образом, функция возрастает на } [-2; 0] \text{ и } [0; 2], \text{ следовательно, } y_{\text{наим}} = y(-2) = -24, y_{\text{наиб}} = y(2) = 4.$$

Ответ: $y_{\text{наим}} = -24, y_{\text{наиб}} = 4$.

3.247. $y = |x^3 - 3x^2 + 5|; [0; 3].$

Решение.



Для функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5, f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0$ при $x_1 = 0, x_2 = 2$.

На интервале $(0; 3)$ имеется один экстремум $x = 2$ — минимум, следовательно, в нем функция принимает свое наименьшее значение $f_{\text{наим}} = y_{\text{наим}} = 1. f_{\text{наиб}} = y_{\text{наиб}} = y(0) = y(3) = 5$.

Ответ: $y_{\text{наим}} = 1, y_{\text{наиб}} = 5$.

3.248. $f(x) = 2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x; [-1; 1].$

Решение.

$$f'(x) = (2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x)' = 6 \cdot 2^{3x} \ln 2 - 18 \cdot 2^{2x} \ln 2 + 12 \cdot 2^x \ln 2 = 6 \ln 2 \cdot 2^x (2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2) = 6 \ln 2 \cdot 2^x (2^x - 1)(2^x - 2) = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_2 = 1.$$

$$f(0) = 2 - 9 + 12 = 5, f(1) = 2 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 4, f'(-1) = \frac{2}{8} - \frac{9}{4} + \frac{12}{2} = 4.$$

Ответ: $y_{\text{наим}} = 4, y_{\text{наиб}} = 5$.

3.249. $y = \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x + 1; (-\infty; +\infty)$

Решение.

Пусть $t = \sin x$, тогда $t \in [-1; 1]$ и $y = 1 - t^2 - 2\sqrt{3}t + 1, y' = -2t - 2\sqrt{3} = -2(t + \sqrt{3}) < 0$ для $t \in [-1; 1]$, следовательно, функция $y(t)$ монотонно убывающая и $y_{\text{наиб}} = y(-1) = 2\sqrt{3} + 1, y_{\text{наим}} = y(1) = 1 - 2\sqrt{3}$.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = 2\sqrt{3} + 1, y_{\text{наим}} = 1 - 2\sqrt{3}$.

3.250. $y = \sin x + \cos 2x$; $[0; \pi]$.

Решение.

$y = \sin x + \cos 2x = \sin x + 1 - 2\sin^2 x$. Пусть $\sin x = t$, тогда $t \in [0; 1]$, $f(t) = 1 + t - 2t^2$, $f'(t) = 1 - 4t = 0$ при $t = \frac{1}{4}$. $f(0) = 1$,

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{16} = \frac{9}{8}, f(1) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \frac{9}{8}$, $y_{\text{наим}} = 0$.

3.251. $y = e^{-x} \cos x$; $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

$y' = (e^{-x} \cos x)' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -e^{-x} \cos x (1 + \tan x) = 0$ при $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$. $y\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$,

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}.$$

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$, $y_{\text{наим}} = 0$.

3.252. При каких значениях параметра a наименьшее на отрезке $[0; 2]$ значение функции $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ равно 3?

Решение.

$f'(x) = 8x - 4a = 8\left(x - \frac{a}{2}\right) = 0$ при $x = \frac{a}{2}$. Далее, $f(0) = a^2 - 2a + 2$, $f\left(\frac{a}{2}\right) = 2 - 2a$, $f(2) = a^2 - 10a + 18$.

Рассмотрим три случая:

$$1) \begin{cases} \frac{a}{2} \leq 0, \\ f(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a^2 - 2a + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a^2 - 2a - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 - \sqrt{2};$$

$$2) \begin{cases} 0 < \frac{a}{2} < 2, \\ f\left(\frac{a}{2}\right) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 4, \\ 2 - 2a = 3, \end{cases} \emptyset;$$

$$3) \begin{cases} \frac{a}{2} \geq 2, \\ f(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 4, \\ a^2 - 10a + 18 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 4, \\ a^2 - 10a + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 5 + \sqrt{10}.$$

Ответ: $a_1 = 1 - \sqrt{2}$, $a_2 = 5 + \sqrt{10}$.

3.253. В зависимости от параметра a найти наибольшее на отрезке $[-2; 1]$ значение функции $f(x) = \frac{1}{2ax^2 - x^4 - 3a^2}$.

Решение.

Дискриминант знаменателя равен $(-8a^2)$, следовательно, при $a \neq 0$ для всех x трехчлен отрицателен, $f(-x) = f(x)$ и функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy .

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - a)}{(2ax^2 - x^4 - 3a^2)^2}.$$

Рассмотрим три случая:

1) $a = 0$, $f(x) = -\frac{1}{x^4}$, $f'(x) = \frac{4}{x^5}$. Эта функция убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$.

$$f(-2) = -\frac{1}{16}, f(1) = -1, y_{\text{наиб}} = -\frac{1}{16}.$$

2) $a < 0$, $x^2 - a > 0$ и $f''(x) = 0$ при $x = 0$, $f'(x) < 0$ при $x < 0$, $f'(x) > 0$ при $x > 0$. В точке $x = 0$ функция имеет минимум, а значит, свое наибольшее значение она принимает в точке $x = -2$ ($-2 > 1$, график симметричен относительно оси Oy). Таким образом,

$$y_{\text{наиб}} = f(-2) = -\frac{1}{3a^2 - 8a + 16}.$$

3) $a > 0$, имеются три критические точки: $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{a}$. $f'(x) < 0$ для $x \in (-\infty; -\sqrt{a}) \cup (0; \sqrt{a})$ и $f'(x) > 0$ для $x \in (-\sqrt{a}; 0) \cup (\sqrt{a}; +\infty)$. $x = 0$ — точка максимума, $f(0) = -\frac{1}{3a^2}$. Это значение будет наибольшим, если

$$f(-2) \leq f(0) \Leftrightarrow -\frac{1}{3a^2 - 8a + 16} \leq -\frac{1}{3a^2} \Leftrightarrow a \geq 2.$$

Ответ: $y_{\text{наиб}} = -\frac{1}{3a^2 - 8a + 16}$ при $a \in (-\infty; 2)$;

$$y_{\text{наиб}} = -\frac{1}{3a^2} \text{ при } a \in [2; +\infty).$$

3.254. При каких значениях параметров a и b наибольшее на промежутке $[-1; 1]$ значение функции

$$f(x) = \left| \frac{9(5^x + 5^{-x} - 2)}{4(5^x + 5^{-x} + 2)} + (a - b) \frac{3(5^x - 1)}{2(5^x + 1)} + 2a + b \right|$$
 является наименьшим?

Решение.

Пусть $t = \frac{3}{2} \cdot \frac{5^x - 1}{5^x + 1}$, тогда $t^2 = \frac{9(5^{2x} - 2 \cdot 5^x + 1) \cdot 5^x}{4(5^{2x} + 2 \cdot 5^x + 1) \cdot 5^x} = \frac{9(5^x - 2 + 5^{-x})}{4(5^x + 2 + 5^{-x})}$. Так как $t'(x) = \frac{3 \ln 5 \cdot 5^x}{(5^x + 1)^2} > 0$, то функция $t(x)$ является возрастающей и принимает все значения от $t(-1) = -1$ до $t(1) = 1$. Таким образом, необходимо найти значения a и b , при которых наибольшее значение функции $f(t) = |t^2 + (a - b)t + (2a + b)|$, $t \in [-1; 1]$ является наименьшим.

Пусть $\varphi(t) = t^2 + (a - b)t + (2a + b)$. Если сдвигать параболу $y = \varphi(t)$ вдоль оси абсцисс, то наибольшее значение функции $\varphi(t)$ на отрезке $[-1; 1]$ из изображений симметрии будет наименьшим тогда, когда вершина параболы лежит на оси ординат, т.е. $a - b = 0$, $a = b$.

Если же сдвигать график функции вдоль оси ординат, то наибольшее значение функции $y = \varphi(t)$ на $[-1; 1]$ будет наименьшим тогда, когда $f(1) = f(-1) = f(0)$. Таким образом, $|2a + b| = |2a + b + 1|$, $|3a| = |3a + 1| \Rightarrow a = b = -\frac{1}{6}$.

Ответ: $a = b = -\frac{1}{6}$.

3.255. Число 48 записать в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

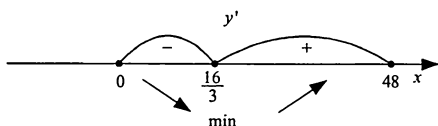
Решение.

Пусть x , $48 - x$ — искомые слагаемые, $\begin{cases} x > 0, \\ 48 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 48$. Рассмотрим функцию

$$y = x^3 + (48 - x)^2, y' = 3x^2 - 2(48 - x) = 3x^2 + 2x - 96 = 0 \text{ при } x_1 = -6, x_2 = \frac{16}{3}. \quad y' = 3(x+6)\left(x - \frac{16}{3}\right).$$

Так как функция имеет на промежутке единственный минимум, то в нем она и принимает свое наименьшее значение.

Таким образом, $x = \frac{16}{3}$, $48 - x = 48 - \frac{16}{3} = \frac{128}{3}$.



Ответ: $48 = \frac{16}{3} + \frac{128}{3}$.

3.256. Дан прямоугольный лист жести 80×50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки (рис. 3.90).

Решение.

Пусть x — длина стороны каждого из вырезаемого из листа квадрата. По смыслу задачи $0 < x < 25$. Тогда объем полученной коробки $V(x) = x(50 - 2x)(80 - x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$. $V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 0$ при $x_1 = 10$,

$x_2 = \frac{100}{3}$ — не подходит. $V''(x) > 0$ при $x \in (0; 10)$, $V''(x) < 0$ при $x \in (10; 25)$,

поэтому $x = 10$ — точка максимума. Так как $x = 10$ — единственный экстремум на $(0; 25)$, то в нем функция $V(x)$ принимает свое наибольшее значение $V(10) = 18\,000$ (см³).

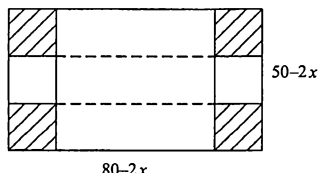


Рис. 3.90

Ответ: 18 000 (см³).

3.257. Из всех прямоугольников данной площади S определить тот, периметр которого наименьший.

Решение.

Если x, y — стороны прямоугольника, то $S = xy \Rightarrow y = \frac{S}{x}, x > 0$, периметр $P(x) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$,

$P'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}(x^2 - S) = \frac{2}{x^2}(x - \sqrt{S})(x + \sqrt{S})$. На $(0; +\infty)$ функция $P(x)$ имеет единственный минимум $x = \sqrt{S}$.

так как $P'(x) < 0$ на $(0; \sqrt{S})$ и $P'(x) > 0$ на $(\sqrt{S}; +\infty)$, следовательно, в нем функция и принимает свое наименьшее значение. $x = \sqrt{S} \Rightarrow y = \sqrt{S}$, т.е. прямоугольник является квадратом.

Ответ: квадрат со стороной \sqrt{S} .

3.258. Из пункта A на прогулку вышел пешеход. После того, как он отошел от A на 6 км, из A следом за ним выехал велосипедист, скорость которого была на 9 км/ч больше скорости пешехода. Когда велосипедист догнал пешехода, они повернули назад и возвратились вместе в A со скоростью 4 км/ч. При каком значении скорости пешехода время его прогулки окажется наименьшим?

Решение.

Пусть x (км/ч) — скорость пешехода. Велосипедист догонит пешехода за $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (ч). До места встречи пешеход находился в пути

$\frac{6}{x} + \frac{2}{3}$ (ч) и отошел от A на $x \left(\frac{6}{x} + \frac{2}{3} \right)$ (км). На обратную дорогу они затратили $\frac{1}{4} x \left(\frac{6}{x} + \frac{2}{3} \right)$ (ч), и пешеход был в пути время

$$t(x) = \frac{6}{x} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} x \left(\frac{6}{x} + \frac{2}{3} \right) = \frac{6}{x} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} x, \quad x > 0.$$

$$t'(x) = \frac{1}{6} - \frac{6}{x^2} = \frac{x^2 - 36}{6x^2} = \frac{x+6}{6x^2} (x-6) = 0 \text{ при } x = 6 \text{ (км/ч)}. x = 6 \text{ — единственный экстремум (минимум) при } x \in (0; +\infty),$$

следовательно, в нем функция $t(x)$ и принимает свое наименьшее значение.

Ответ: 6 км/ч.

3.259. Консервная банка имеет форму цилиндра и емкость 1 дм³. Каким должен быть радиус ее оснований, чтобы на ее изготовление было израсходовано наименьшее количество жести?

Решение.

Пусть x (дм) — радиус оснований, $S(x)$ — площадь поверхности банки (цилиндра). По условию $S(x)$ должна быть наи-

меньшей, объем $V = \pi x^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi x^2}$.

$$S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}, \quad x > 0.$$

$S'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2} = \frac{4\pi}{x^2} \left(x^3 - \frac{1}{2\pi} \right) = 0$ при $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ — единственный экстремум (минимум) при $x \in (0; +\infty)$, следовательно, в нем функция $S(x)$ и принимает свое наименьшее значение.

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ дм.

3.260. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

Решение.

Рассмотрим поперечное сечение желоба площадью $S = S(x)$, где x — угол наклона боковых стенок ко дну желоба (рис. 3.91).

$$\alpha = x - \frac{\pi}{2}, \quad b = a \sin \alpha = -a \cos x, \quad h = a \cos \alpha = a \sin x,$$

$$S(x) = (a + b)h = (a - a \cos x) a \sin x = a^2 (\sin x - \sin x \cos x).$$

$$S'(x) = a^2 (\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x) = -a^2 (2 \cos^2 x - \cos x - 1).$$

Если $t = \cos x$, то $2t^2 - t - 1 = 0$, $D = 1 + 8 = 3^2$, $t = \frac{1 \pm 3}{4} = 1, -\frac{1}{2}$.

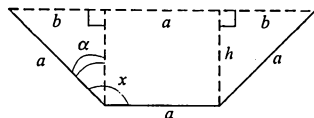


Рис. 3.91

Отсюда получаем $S'(x) = -2a^2 (\cos x - 1)(\cos x + \frac{1}{2}) = 2a^2 (1 - \cos x)(\cos x + \frac{1}{2}) = 0$ при $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ ($\cos x \neq 1$ по смыслу задачи).

При $x < \frac{2\pi}{3}$ $S'(x) > 0$ и $S(x)$ — возрастающая, при $x > \frac{2\pi}{3}$ $S'(x) < 0$ и $S(x)$ — убывающая, следовательно,

$x = \frac{2\pi}{3}$ — точка максимума. Так как этот экстремум единственный для $x \in (0; \pi)$, то в нем функция и принимает свое наибольшее значение.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

3.261. Лодка находится в точке A моря, находящейся от ближайшей точки B побережья на расстоянии 6 км. Парень спешит на свидание с девушкой, проживающей в точке C на берегу, отстоящей от точки B на 11 км (рис. 3.92). Скорость лодки 3 км/ч, скорость ходьбы по берегу 5 км/ч. Через какое наименьшее время парень встретится с девушкой, считая, что лодка движется прямолинейно, а берег — прямая линия?

Решение.

Пусть D — точка причаливания лодки к берегу, $BD = x$, $DC = 11 - x$, $AD = \sqrt{x^2 + 6^2}$. По смыслу задачи $x \in [0; 11]$. Время в пути

$$t = t(x) = \frac{AD}{3} + \frac{DC}{5} = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 6^2} + \frac{1}{5} (11 - x).$$

$$t'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2 + 36}} - \frac{1}{5} = \frac{10x - 6\sqrt{x^2 + 36}}{30\sqrt{x^2 + 36}} = 0$$

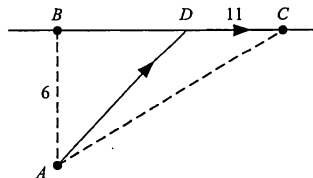


Рис. 3.92

при $10x = 6\sqrt{x^2 + 36} \Rightarrow 100x^2 = 36x^2 + 36^2 \Leftrightarrow x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$, $x \in [0; 11]$ $t'(x) < 0$ при $x \in [0; 4,5)$, $t'(x) > 0$ при $x \in (4,5; 11]$,

следовательно, $x = 4,5$ — точка минимума. Так как этот экстремум единственный на $[0; 11]$, то в нем функция и принимает свое наименьшее значение:

$$t_{\text{наим}} = t(4,5) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{81}{4} + 36} + \frac{1}{5} \left(11 - \frac{9}{2} \right) = \frac{5}{2} + \frac{13}{10} = 3,8 \text{ (ч)}.$$

Ответ: 3,8 (ч).

3.262. Мотоциклист едет из пункта A в пункт C . От пункта A до пункта B , расположенного между A и C , он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте B он уменьшает свою скорость на x км/ч ($0 < x < 48$) и с этой скоростью едет $\frac{1}{3}$ часть пути от B до C . Оставшуюся часть пути от B до C он едет со скоростью, которая на $2x$ км/ч превышает первоначальную скорость (48 км/ч). При каком значении x мотоциклист быстрее всего проедет путь от B до C ?

Решение.

Пусть s — расстояние от B до C , $t = t(x)$ — время в пути от B до C .

$$t(x) = \frac{1}{3} \frac{s}{48-x} + \frac{2}{3} \frac{s}{48+2x}, \quad (0 < x < 48).$$

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{1}{3} \frac{s}{(48-x)^2} - \frac{2}{3} \frac{2s}{(48+2x)^2} = \frac{1}{3} s \frac{(48+2x)^2 - 4(48-x)^2}{(48-x)^2(48+2x)^2} = \\ &= \frac{1}{3} s \frac{(48+2x-96+2x)(48+2x+96-2x)}{(48-x)^2(48+2x)^2} = \frac{48s \cdot 4(x-12)}{(48-x)^2(48+2x)^2}. \end{aligned}$$

$t'(x) = 0$ при $x = 12$, $t'(x) < 0$ при $x \in (0; 12)$, $t'(x) > 0$ при $x \in (12; 48)$, следовательно, $x = 12$ — точка минимума. Так как этот экстремум единственный на $(0; 48)$, то в нем функция и принимает свое наименьшее значение.

Ответ: 12 км/ч.

3.263. Земельный участок оценивается в 1 миллион долларов и приносит ежегодный доход в 200 тысяч долларов. Его можно продать и поместить деньги в банк под 10% годовых. В какой момент лучше продать участок, чтобы получить максимальный доход по истечении 10 лет? Какова при этом получится сумма?

Решение.

Пусть участок был продан через время t , $t \in [0; 10]$, тогда в банк будет положена сумма $(1\,000\,000 + 200\,000t)$ и через время $10 - t$ получается в банке вклад

$$S(t) = (1\,000\,000 + 200\,000t)(1 + 0,1)^{10-t}, \quad t \in [0; 10].$$

$$S'(t) = [200\,000 - (1\,000\,000 + 200\,000t)\ln 1,1] \cdot 1,1^{10-t} = 0$$

при $t = t_0 = \frac{200\,000 - 1\,000\,000 \ln 1,1}{200\,000 \ln 1,1} = \frac{1}{\ln 1,1} - 5 \approx 5,5$. $S'(t) > 0$ при $t < t_0$, и $S'(t) < 0$ при $t > t_0$, следовательно, t_0 — точка максимума. Так как этот экстремум единственный на $[0; 10]$, то в нем функция и принимает свое наибольшее значение

$$S(t_0) \approx (1\,000\,000 + 200\,000 \cdot 5,5) \cdot 1,1^{4,5} \approx 3\,225\,000.$$

Ответ: через 5,5 лет; 3 225 000 долларов.

3.264. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь, если его медиана, проведенная к боковой стороне, имеет постоянную длину m (рис. 3.93).

Решение.

В $\triangle ABC$ по теореме косинусов

$$m^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \alpha \Rightarrow AB^2 = \frac{4m^2}{5 - 4 \cos \alpha}.$$

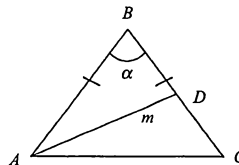


Рис. 3.93

Площадь $S_{\triangle ABC} = S(\alpha) = \frac{1}{2} AB^2 \sin \alpha = \frac{2m^2 \sin \alpha}{5 - 4 \cos \alpha}$, где $0 < \alpha < \pi$.

$$S'(\alpha) = 2m^2 \frac{\cos \alpha (5 - 4 \cos \alpha) - 4 \sin^2 \alpha}{(5 - 4 \cos \alpha)^2} = 2m^2 \frac{5 \cos \alpha - 4}{(5 - 4 \cos \alpha)^2} = 0 \text{ при } \cos \alpha = \frac{4}{5}. S'(\alpha) > 0 \text{ при } \alpha \in \left(0; \arccos \frac{4}{5}\right),$$

$S'(\alpha) < 0$ для $\alpha \in \left(\arccos \frac{4}{5}; \pi\right)$. Таким образом, площадь $S(\alpha)$ треугольника ABC будет наибольшей, если $\alpha = \arccos \frac{4}{5}$.

Ответ: $\arccos \frac{4}{5}$.

3.265. Около данного цилиндра, радиус основания которого равен a , описан конус наименьшего объема. Плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают. Найти радиус основания этого конуса.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение цилиндра и конуса (рис. 3.94).

Из подобия треугольников получаем $\frac{x-a}{h} = \frac{x}{H} \Rightarrow H = \frac{x}{x-a}h$, h — const. Тогда объем конуса

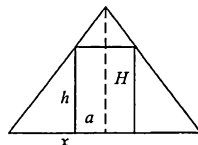


Рис. 3.94

$$V = V(x) = \frac{1}{3} \pi x^2 H = \frac{\pi h}{3} \frac{x^3}{x-a}; \quad x > 0. \quad V'(x) = \frac{\pi h}{3} \frac{3x^2(x-a) - x^3}{(x-a)^2} = \frac{2\pi h x^2(x - \frac{3a}{2})}{3(x-a)^2}. \quad V'(x) = 0$$

при $x = \frac{3a}{2}$, $V'(x) < 0$ при $x < \frac{3a}{2}$, $V'(x) > 0$ при $x > \frac{3a}{2}$, следовательно, $x = \frac{3a}{2}$ — точка минимума. Так как этот экстремум единственный на $(0; +\infty)$, то в нем функция и принимает свое наименьшее значение.

Ответ: $\frac{3a}{2}$.

3.266. В шар радиусом R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение указанной комбинации тел (рис. 3.95).

Полная поверхность цилиндра $S(x) = 2\pi a^2 + 2\pi ah$, где $h = 2R \cos x$, $2a = 2R \sin x$. Отсюда получаем

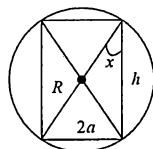


Рис. 3.95

$$S(x) = 2\pi R^2 \sin^2 x + 2\pi R^2 \sin x \cos x = 2\pi R^2 (\sin^2 x + \sin 2x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$S'(x) = 2\pi R^2(2\sin x \cos x + 2\cos 2x) = 4\pi R^2(\cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x) = 4\pi R^2 \sin^2 x (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 1).$$

$$S'(x) = 0 \text{ при } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \text{ следовательно, } \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 1 = 0, D = 5. \operatorname{ctg} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Таким образом, имеем } S'(x) = 4\pi R^2 \sin^2 x \left(\operatorname{ctg} x + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \left(\operatorname{ctg} x - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$$

$$S'(x) = 0, \text{ если } \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, S'(x) > 0 \text{ при } x < \operatorname{arccctg} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right), S'(x) < 0 \text{ при } x > \operatorname{arccctg} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right). \text{ следовательно,}$$

$x = \operatorname{arccctg} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$ — единственный экстремум (максимум) при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и в нем функция $S(x)$ и принимает свое наибольшее значение.

$$S(x) = 2\pi R^2(\sin^2 x + 2\sin x \cos x) = 2\pi R^2 \sin^2 x (1 + 2 \operatorname{ctg} x). 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

Отсюда получаем наибольшую полную поверхность цилиндра:

$$\begin{aligned} S \left(\operatorname{arccctg} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right) &= 2\pi R^2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2} = 2\pi R^2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{4}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{2\pi R^2 \cdot 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = \\ &= \frac{4\pi R^2 (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \pi R^2 (\sqrt{5}+1). \end{aligned}$$

Ответ: $\pi R^2 (\sqrt{5}+1)$.

3.267. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды имеет постоянную заданную площадь и наклонена к плоскости основания под углом α (рис. 3.96). При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

Решение.

Если $ABCD F$ — правильная четырехугольная пирамида, то ее объем $V = \frac{1}{3} a^2 OF$,

где $AD = a$, OF — высота. Из $\triangle FOE \Rightarrow OF = OE \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$ и $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

Пусть $S_{\triangle DFC} = S_0 = \frac{1}{2} a \cdot FE$.

где $FE = \frac{OE}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$. $S_0 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2 \cos \alpha} \Rightarrow a = \sqrt{4S_0 \cos \alpha}$

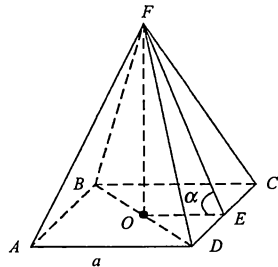


Рис. 3.96

$$\text{и } V(\alpha) = \frac{1}{6} (\sqrt{4S_0 \cos \alpha})^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{4S_0}{3} \sin \alpha \sqrt{S_0 \cos \alpha} = \frac{4}{3} (S_0)^{\frac{3}{2}} \sin \alpha \cdot (\cos \alpha)^{\frac{1}{2}} = k \sin \alpha (\cos \alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где } k = \frac{4}{3} (S_0)^{\frac{3}{2}} = \text{const},$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Далее, } V'(\alpha) = k(\cos \alpha (\cos \alpha)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\cos \alpha)^{-\frac{1}{2}} \sin^2 \alpha) = -\frac{k}{2} (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{k(\cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{2} (2 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0$$

$$2(\cos \alpha)^2$$

при $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$. Для $\alpha \in (0; \operatorname{arctg} \sqrt{2})$ $V'(\alpha) > 0$, а для $\alpha \in (\operatorname{arctg} \sqrt{2}; \frac{\pi}{2})$ $V'(\alpha) < 0$, следовательно, при $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$ функция $V(\alpha)$ и принимает свое наибольшее значение.

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

3.268. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол α (рис. 3.97). При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

Решение.

Пусть в данной треугольной пирамиде $ABCD$ $AD = a = \text{const}$, $\angle DAE = \alpha$, $BC = b$.

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot DE = \frac{\sqrt{3}}{12} b^2 a \sin \alpha.$$

$$AE = R = a \cos \alpha = \frac{b\sqrt{3}}{3} \Rightarrow b = \sqrt{3} a \cos \alpha$$

$$\text{и } V(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{12} 3a^3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3 (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3 (\sin \alpha - \sin^3 \alpha),$$

$$\text{где } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

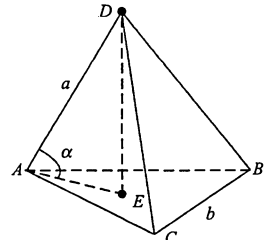


Рис. 3.97

$$\text{Тогда } V'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3 (\cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3 \cos \alpha (1 - 3 \sin^2 \alpha). \quad V'(\alpha) = 0 \text{ при } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad V'(\alpha) > 0 \text{ при}$$

$$\alpha \in \left(0; \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad V'(\alpha) < 0 \text{ при } \alpha \in \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ следовательно, функция } V(\alpha) \text{ принимает свое наибольшее значение}$$

$$\text{при } \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Так как } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ то } \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3.269. При каком значении параметра a максимальная абсолютная погрешность на отрезке $[1; 8]$ при замене $y = \sqrt[3]{x}$ на квадратный трехчлен $y = a + \frac{5}{9}x - \frac{x^2}{9}$ будет наименьшей?

Решение.

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x} - \left(a + \frac{5}{9}x - \frac{x^2}{9}\right)$, тогда $f'(x) = \frac{3 - 5x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{5}{3}}}{9x^{\frac{2}{3}}} = \frac{(t-1)^2(2t^3 + 4t^2 + 6t + 3)}{9t^2}$, где $t = x^{\frac{1}{3}}$.

Так как $2t^3 + 4t^2 + 6t + 3 > 0$ при $t \in [1; 2]$, то $f'(x) \geq 0$ для $x \in [1; 8]$ и на этом отрезке функция $f(x)$ монотонно возрастает, следовательно, абсолютная погрешность $|f(x)|$ принимает свое наибольшее значение на одном из концов отрезка $[1; 8]$.

$$|f(1)| = \left|a - \frac{5}{9}\right|, |f(8)| = \left|a - \frac{14}{3}\right|.$$

Таким образом, нужно найти a , при котором максимальное значение одного из двух чисел $|f(1)|$ и $|f(8)|$ будет минимальным, т.е. найти наименьшее значение функции $y = \max\left\{\left|a - \frac{5}{9}\right|, \left|a - \frac{14}{3}\right|\right\}$. Если в плоскости $аОу$ рассмотреть графики

функций $y_1(a) = \left|a - \frac{5}{9}\right|$ и $y_2(a) = \left|a - \frac{14}{3}\right|$, то они пересекутся в точке $\left(\frac{47}{18}, \frac{37}{18}\right)$. При $a < \frac{47}{18}$ выполняется неравенство

$y_1 < y_2$, а при $a > \frac{47}{18}$ — неравенство $y_1 > y_2$. Таким образом, получаем, что $y = \left|a - \frac{47}{18}\right| + \frac{37}{18}$. Очевидно, что минималь-

ное значение функции y , равное $\frac{37}{18}$, достигается при $a = \frac{47}{18}$.

Ответ: $a = \frac{47}{18}$.

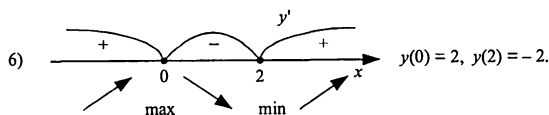
Исследовать функции и построить их графики (3.269 – 3.275).

3.270. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Решение.

1) $D(y) = \mathbf{R}$. 2) $y(-x) = -x^3 - 3x^2 + 2 \neq \pm y(x)$, функция общего вида. 3) $y(0) = 2$, $y(1) = 0$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$. 5) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.



7)

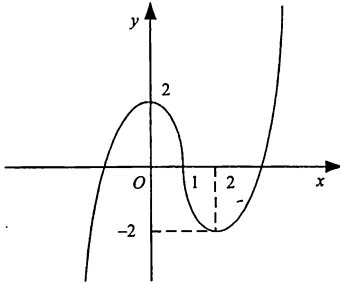


Рис. 3.98

8) $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3.271. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$.

Решение.

1) $D(y) = \mathbf{R}$. 2) $y(-x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 = y(x)$, функция четная.

3) $y(0) = 0$, $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0$. $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 2\sqrt{2}$.

$y > 0$ при $|x| > 2\sqrt{2}$, $|y| < 0$ при $|x| < 2\sqrt{2}$, $x \neq 0$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$. 5) $y' = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$.

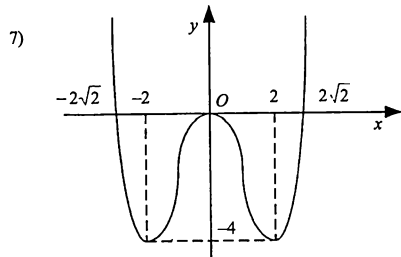
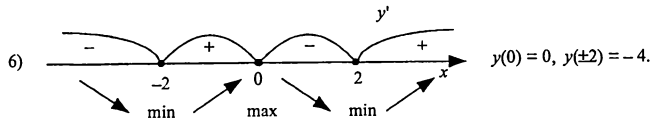


Рис. 3.99

8) $E(y) = [-4; +\infty)$.

3.272. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Решение.

1) $D(y) = \mathbb{R}$. 2) $y(-x) = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -y(x)$, функция нечетная.

3) $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $y < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x + \frac{1}{x}} = 0$.

5) $y' = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$.

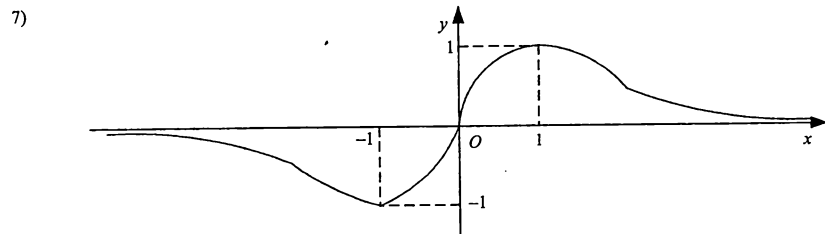
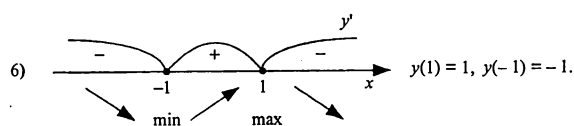


Рис. 3.100

8) $E(y) = [-1; 1]$.

3.273. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

Решение.

1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) $y(-x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = y(x)$, функция четная.

3) $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $y < 0$ для $x \in (-1; 1)$.

$$4) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

$$5) y' = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

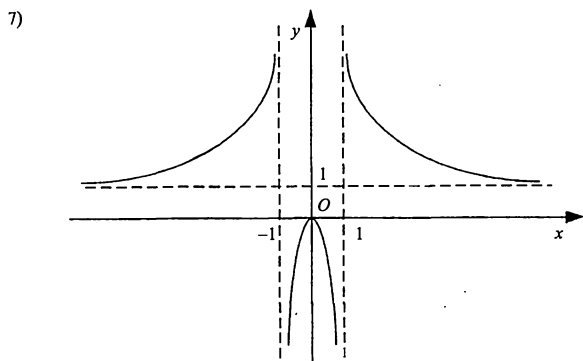
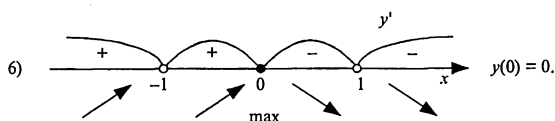


Рис. 3.101

8) $E(y) = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$.

3.274. $y = \frac{e^x}{x}$.

Решение.

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) $y(-x) \neq \pm y(x)$, функция общего вида.

3) $y \neq 0$, $y' > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y' < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ (так как $e^x > x^2$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \infty$, см. 3.307).

$$5) y' = \left(\frac{e^x}{x} \right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} (x - 1).$$

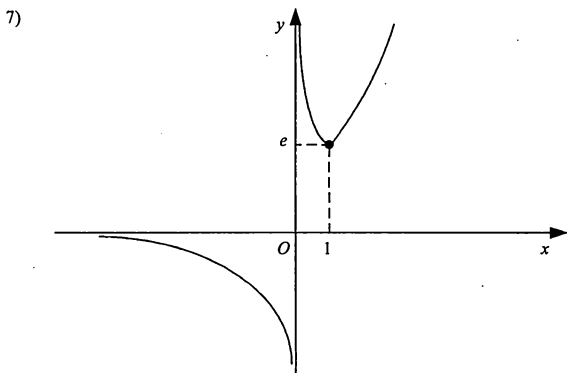
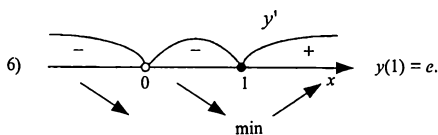


Рис. 3.102

8) $E(y) = (-\infty; 0) \cup [e; +\infty)$.

3.275. $y = x^2 \ln x$.

Решение.

1) $D(y) = (0; +\infty)$.

2) y — функция общего вида.

3) $y(1) = 0$, $y' < 0$ при $x \in (0; 1)$, $y' > 0$ при $x \in (1; +\infty)$.

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = 0$. Действительно, при $x > 0$ $e^x > x \Leftrightarrow x > \ln x$, $x^2 > x \ln x$

и $0 = \lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \geq \lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x$ (см. 3.306).

$$5) y' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x = 2x(\ln x + \frac{1}{2}).$$

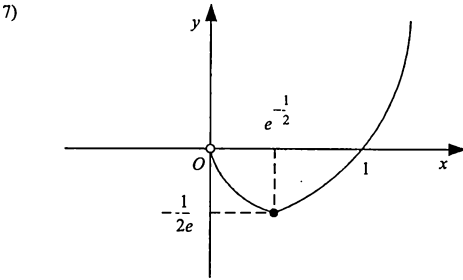
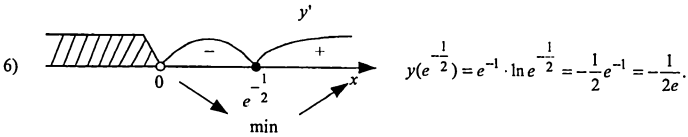


Рис. 3.103

$$8) E(y) = \left[-\frac{1}{2e}; +\infty \right).$$

$$3.276. y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение.

$$1) D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) y(-x) = \frac{1}{\cos x} = y(x), \text{ функция четная. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом } 2\pi (\text{как и } \cos x).$$

$$3) y \neq 0, y > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}, y < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \text{ Этот пункт пропускаем, так как достаточно построить график, в силу периодичности, на промежутке } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right).$$

$$5) y' = ((\cos x)^{-1})' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

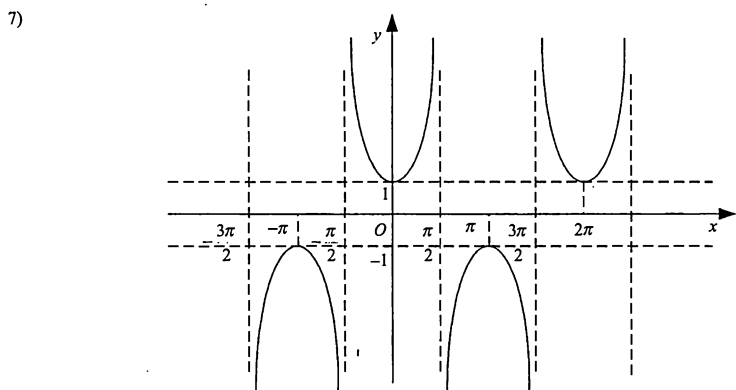
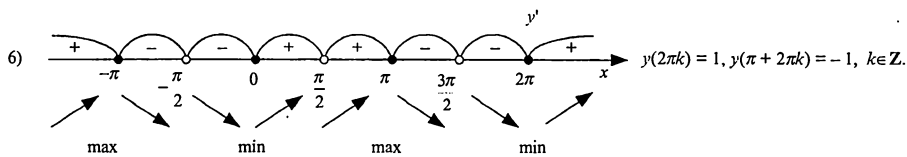


Рис. 3.104

8) $E(y) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$

ТЕМА: ИНТЕГРАЛЫ

Найти неопределенные интегралы и проверить результаты вычислением производных (3.277–3.286).

3.277. $\int (5-x^3)^2 dx.$

Решение.

$$\int (5-x^3)^2 dx = \int (25-10x^3+x^6) dx = 25 \int dx - 10 \int x^3 dx + \int x^6 dx = 25x - \frac{5}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C.$$

Проверка: $\left(25x - \frac{5}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C \right)' = 25 - 10x^3 + x^6 = (5-x^3)^2.$

Ответ: $25x - \frac{5}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C.$

3.278. $\int \frac{\sqrt{x-2}\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x}} dx.$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{x-2}\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx - 2 \int x^{\frac{5}{12}} dx + \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - 2 \cdot \frac{12}{17} x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C.$$

Проверка: $\left(\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C \right)' = x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{x-2}\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x}}.$

Ответ: $\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C.$

3.279. $\int (2^x + 3^x)^3 dx.$

Решение.

$$\begin{aligned} \int (2^x + 3^x)^3 dx &= \int 2^{3x} dx + 3 \int 2^{2x} \cdot 3^x dx + 3 \int 2^x \cdot 3^{2x} dx + \int 3^{3x} dx = \frac{1}{3} \frac{2^{3x}}{\ln 2} + \frac{1}{3} \frac{3^{3x}}{\ln 3} + 3 \int 4^x \cdot 3^x dx + \\ &+ 3 \int 2^x \cdot 9^x dx = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + \frac{3^{3x}}{3 \ln 3} + 3 \int 12^x dx + 3 \int 18^x dx = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + \frac{3^{3x}}{3 \ln 3} + \frac{3 \cdot 12^x}{\ln 12} + \frac{3 \cdot 18^x}{\ln 18} + C. \end{aligned}$$

Проверка: $\left(\frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + \frac{3^{3x}}{3 \ln 3} + \frac{3 \cdot 12^x}{\ln 12} + \frac{3 \cdot 18^x}{\ln 18} + C \right)' = 2^{3x} + 3^{3x} + 3 \cdot 12^x + 3 \cdot 18^x = 2^{3x} + 3^{3x} + 3 \cdot 2^{2x} \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x \cdot 3^{2x} = (2^x + 3^x)^3.$

Ответ: $\frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + \frac{3^{3x}}{3 \ln 3} + \frac{3 \cdot 12^x}{\ln 12} + \frac{3 \cdot 18^x}{\ln 18} + C.$

3.280. а) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; б) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

Решение.

а) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C;$

б) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int (\operatorname{ctg}^2 x + 1 - 1) dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int -\frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$

Проверка: а) $(\operatorname{tg} x - x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$;

б) $(-\operatorname{ctg} x - x + C)' = -\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$.

Ответ: а) $\operatorname{tg} x - x + C$; б) $-\operatorname{ctg} x - x + C$.

3.281. $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x} dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int |\sin x - \cos x| dx.$$

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \geq \cos x$, $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \sin x dx - \int \cos x dx = -\cos x - \sin x + C$;

б) $\cos x \geq \sin x$, $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \cos x dx - \int \sin x dx = \sin x + \cos x + C$.

Проверка: а) $(-\cos x - \sin x + C)' = \sin x - \cos x = |\sin x - \cos x| = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = \sqrt{1 - \sin 2x}$;

б) $(\sin x + \cos x + C)' = \cos x - \sin x = |\cos x - \sin x| = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = \sqrt{1 - \sin 2x}$.

Случаи а), б) объединяются в один ответ: $(\sin x + \cos x) \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C$.

Ответ: $(\sin x + \cos x) \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C$.

3.282. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = \int (2-5x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{5} \cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + C.$$

Проверка: $\left(-\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + C\right)' = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} (2-5x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-5) = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}$.

Ответ: $-\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + C$.

3.283. а) $\int \cos^2 x dx$; б) $\int \sin^2 x dx$.

Решение.

$$\text{а) } \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C;$$

$$\text{б) } \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Проверка: а) $\left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \cos^2 x;$

$$\text{б) } \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \right)' = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x.$$

Ответ: а) $\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$; б) $\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

3.284. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx$.

Решение.

$$\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$

Проверка: $\left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C \right)' = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 8x = \sin 3x \cdot \sin 5x.$

Ответ: $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C$.

3.285. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C.$$

Проверка: $\left(\frac{1}{3} \ln^3 x + C\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln^2 x}{x}.$

Ответ: $\frac{1}{3} \ln^3 x + C.$

3.286. $\int \sin^5 x \cos x dx.$

Решение.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin x, \\ du = \cos x dx \end{array} \right] = \int u^5 du = \frac{1}{6} u^6 + C = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

Проверка: $\left(\frac{1}{6} \sin^6 x + C\right)' = \frac{1}{6} \cdot 6 \sin^5 x \cos x = \sin^5 x \cos x.$

Ответ: $\frac{1}{6} \sin^6 x + C.$

Для данной функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ (3.286 – 3.290).

3.287. $f(x) = \cos 3x, M_0(0; 1).$

Решение.

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C, 1 = \frac{1}{3} \sin 0 + C \Rightarrow C = 1.$$

Ответ: $F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + 1.$

3.288. $f(x) = (2x - 1)^7, M_0(1; 0).$

Решение.

$$\int (2x - 1)^7 dx = \frac{1}{2} \frac{(2x - 1)^8}{8} + C, 0 = \frac{1}{16} (2 - 1)^8 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{16}.$$

Ответ: $F(x) = \frac{1}{16} (2x - 1)^8 - \frac{1}{16}.$

3.289. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $M_0(0; 3)$.

Решение.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left[\begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{array} \right] = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + C = -\ln \cos x + C.$$

Ответ: $F(x) = 3 - \ln|\cos x|$.

3.290. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $M_0(1; -\frac{\pi}{4})$.

Решение.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \operatorname{arctg} 1 + C \Rightarrow C = -1.$$

Ответ: $F(x) = x - \operatorname{arctg} x - 1$.

3.291. $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$, $M_0(\frac{\pi}{2}; -1)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-\cos x} &= \int \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \\ &= -\operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \left[u = \sin x \right. \\ &\quad \left. du = \cos x dx \right] = -\operatorname{ctg} x + \int u^{-2} du = -\operatorname{ctg} x - u^{-1} + C = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} + C, \end{aligned}$$

$$-1 = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} + C \Rightarrow C = 0.$$

Ответ: $F(x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x}$.

Вычислить определенные интегралы (3.292–3.306).

3.292. $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$.

Решение.

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx = \int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x+1}} dx = \int_4^9 \left(\frac{1}{x^2-1} \right) dx = \int_4^9 \frac{1}{x^2} dx - \int_4^9 \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_4^9 - x \Big|_4^9 =$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{x})^3 \Big|_4^9 - (9-4) = \frac{2}{3} (3^3 - 2^3) - 5 = \frac{38}{3} - \frac{5 \cdot 3}{3} = \frac{23}{3}.$$

Ответ: $\frac{23}{3}$.

3.293. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx.$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 + \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4x) dx \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{16}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{16}$.

3.294. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx.$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos x, \\ du = -\sin x dx, \end{array} \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline u & 1 \end{array} \begin{array}{c|c} \frac{\pi}{2} \\ \hline 0 \end{array} \right] =$$

$$= - \int_1^0 (-u^2) du = \int_1^0 u^2 du = \int_1^0 u^3 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_1^0 - u \Big|_1^0 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

3.295. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{3 + e^x}.$

Решение.

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{3 + e^x} = \left[\begin{array}{l} u = e^x, \\ du = e^x dx, \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline u & 1 & e \end{array} \right] = \int_1^e \frac{du}{u+3} = \ln |u+3| \Big|_1^e = \ln(e+3) - \ln 4 = \ln \frac{e+3}{4}.$$

Ответ: $\ln \frac{e+3}{4}.$

3.296. $\int_0^1 x(1-x)^8 dx.$

Решение.

$$\int_0^1 x(1-x)^8 dx = \left[\begin{array}{l} u = 1-x, \\ du = -dx, \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline u & 1 & 0 \end{array} \right] = -\int_1^0 (1-u)u^8 du = \int_1^0 u^9 du - \int_1^0 du = \frac{1}{10} u^{10} \Big|_1^0 - u \Big|_1^0 = -\frac{1}{10} + 1 = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Ответ: 0,9.

3.297. $\int_0^1 \frac{xdx}{4+x^2}.$

Решение.

$$\int_0^1 \frac{xdx}{4+x^2} = \left[\begin{array}{l} u = 4+x^2, \\ du = 2xdx, \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline u & 4 & 5 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_4^5 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| \Big|_4^5 = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 4) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} = \ln \sqrt{1,25}.$$

Ответ: $\ln \sqrt{1,25}.$

3.298. $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x}.$

Решение.

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{(1 - \sin x) dx}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{(1 - \sin x) dx}{1 - \sin^2 x} = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos^2 x} = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} u = \cos x, \\ du = -\sin x dx, \end{array} \quad \frac{x}{u} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\pi}{-1} \right] = -1 + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-1} \frac{du}{u^2} = -1 + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-1} u^{-2} du = -1 - u^{-1} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-1} =$$

$$= -1 - \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.299. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$

Решение.

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} = \left[\begin{array}{l} u = 5-4x, \\ du = -4 dx, \end{array} \quad \frac{x}{u} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{9}} \frac{1}{1} \right] = -\int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{\frac{1}{4}(5-u) \frac{1}{4} du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{16} \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{5-u}{\sqrt{u}} du = -\frac{5}{16} \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} u^{-\frac{1}{2}} du +$$

$$+ \frac{1}{16} \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{5}{8} \sqrt{u} \Big|_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} = -\frac{5}{8} (1-3) + \frac{1}{24} (1-3^3) = \frac{5}{4} - \frac{13}{12} = \frac{15-13}{12} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

3.300. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

Решение.

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x - 1, \quad e^x = u + 1, \\ du = e^x dx, \quad dx = \frac{du}{u+1}, \end{array} \quad \frac{x}{u} \Big|_0^{\ln 2} \frac{\ln 2}{1} \right] = \int_0^1 \sqrt{u} \frac{du}{u+1} = \int_0^1 \frac{\sqrt{u} du}{u+1} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sqrt{u} = t, \quad u = t^2, \\ du = 2t dt, \end{array} \quad \frac{u}{t} \Big|_0^1 \frac{1}{1} \right] = \int_0^1 \frac{t \cdot 2t dt}{t^2 + 1} = 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt = 2 \left(\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} \right) =$$

$$= 2 \left(t \Big|_0^1 - \arctg t \Big|_0^1 \right) = 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $2 - \frac{\pi}{2}$.

$$3.301. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Решение.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \left[\begin{array}{l} u = \arcsin \sqrt{x}, \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx, \end{array} \quad x \Big|_0^1 \quad u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u du = 2 \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{4}$.

$$3.302. \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$$

Решение.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx = \left[u = x, \quad du = dx \atop dv = e^{-x} dx, \quad v = -e^{-x} \right] = -x e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = -\ln 2 \cdot \frac{1}{2} - e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} (1 - \ln 2).$$

Ответ: $\frac{1}{2} (1 - \ln 2)$.

$$3.303. \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

Решение.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left[u = x, \quad du = dx \atop dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \right] = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Ответ: π .

3.304. $\int_0^1 \arccos x dx.$

Решение.

По формуле интегрирования по частям имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arccos x dx &= \left[u = \arccos x, du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = x \arccos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} t=1-x^2, & x & 0 \\ dt=-2xdx, & t & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int_1^0 t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} \Big|_1^0 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

3.305. $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$

Решение.

По формуле интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx &= \left[u = \operatorname{arctg} x, du = \frac{dx}{1+x^2} \right] = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\int_0^{\sqrt{3}} dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} x \Big|_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

3.306. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$

Решение.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \left[u = x^2, du = 2x dx \right] = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx = -2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx.$$

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx = \left[u = x, du = dx \atop dv = \sin x dx, v = -\cos x \right] = -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x dx = -2\pi + \sin x \Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

Таким образом, имеем: $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = -2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx = 4\pi$.

Ответ: 4π .

3.307. Доказать, что при $x > 0$ выполняется неравенство $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение.

Используя геометрический смысл определенного интеграла (площадь криволинейной трапеции, рис. 3.105) и формулу Ньютона — Лейбница, получа-

ем, что если $f(x) > g(x) > 0$ для всех $x > 0$, то $\int_0^x f(x) dx > \int_0^x g(x) dx$. Так как $e^x >$

1 для любого $x > 0$, то

$$\int_0^x e^x dx > \int_0^x dx \Rightarrow e^x \Big|_0^x > x \Big|_0^x \Rightarrow e^x - e^0 > x, e^x > 1 + x$$

и неравенство верно при $n = 1$. Пусть неравенство истинно и для $n = k$, т.е.

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}, \text{ тогда}$$

$$\int_0^x e^x dx > \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \right) dx \Rightarrow e^x - e^0 > x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Leftrightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

т.е. неравенство верно и для $n = k + 1$. По методу математической индукции заключаем, что неравенство истинно при всех натуральных n . **QED.**

3.308. При каких значениях параметра a уравнение $10ax^4 - 4ax^3 + a^2x^2 + 6x - 2 = 0$ имеет на промежутке $[0; 1]$, по крайней мере, один корень?

Решение.

Пусть $f(x) = 10ax^4 - 4ax^3 + a^2x^2 + 6x - 2$. Тогда $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (10ax^4 - 4ax^3 + a^2x^2 + 6x - 2) dx = \frac{a^3}{3} + a + 1 > 0$

при любом $a \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что функция $f(x)$ не может быть отрицательной при всех $x \in [0; 1]$. А так как $f(0) = -2 < 0$, то на промежутке $[0; 1]$ должен существовать (в силу непрерывности) хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.

Ответ: $a \in (-\infty; +\infty)$.

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями (3.308–3.315).

3.309. $y = 3x - x^2$, $y = 0$.

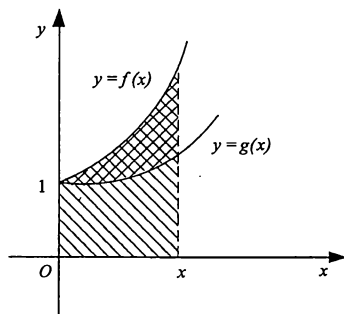


Рис. 3.105

Решение.

Данные линии образуют криволинейную трапецию OAB (рис. 3.106).

Площадь этой криволинейной трапеции

$$S = \int_0^3 (3x - x^2) dx = 3 \int_0^3 x dx - \int_0^3 x^2 dx = \frac{3}{2} x^2 \Big|_0^3 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5 кв. ед.

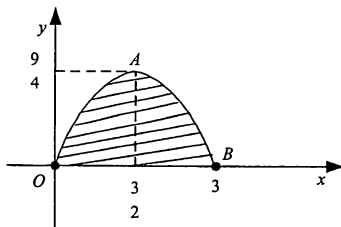


Рис. 3.106

3.310. $y = x^2$, $x + y = 2$.

Решение.

Данные линии образуют фигуру OAB (рис. 3.107).

Найдем координаты точек пересечения заданных линий:

$$x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad A(-2; 4), \quad B(1; 1).$$

Искомая площадь фигуры S равна разности площадей трапеции $CABD$ и криволинейной трапеции $CAOBD$:

$$S = \int_{-2}^1 (2 - x) dx - \int_{-2}^1 x^2 dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \left(4 + \frac{4}{2} \right) - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = 8 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5 кв. ед.

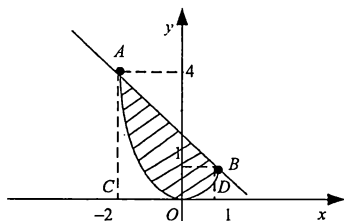


Рис. 3.107

3.311. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$.

Решение.

Данные линии образуют фигуру ABC (рис. 3.108).

Координаты точек пересечения находим из следующих систем:

$$1) \begin{cases} y = 2^x \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow C(1; 2); \quad 2) \begin{cases} y = 2^x \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0; 1); \quad 3) \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(0; 2).$$

Искомая площадь фигуры S равна разности площадей прямоугольника $OBCD$ и криволинейной трапеции $OACD$:

$$S = 2 - \int_0^1 2^x dx = 2 - \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{\ln 2}.$$

Ответ: $\left(2 - \frac{1}{\ln 2} \right)$ кв. ед.

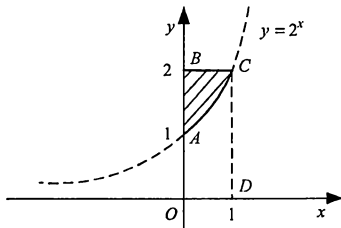


Рис. 3.108

3.312. $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение.

Рассмотрим искомую фигуру (рис. 3.109).

В силу симметрии достаточно подсчитать площадь S части фигуры, лежащей в первом квадранте, а затем результат удвоить.

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = \sqrt[3]{x} \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = 0; x_2 = 1, y_2 = 1.$$

Площадь S получается как разность площадей двух криволинейных трапеций

$$S = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx - \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: кв. ед.

3.313. $y = \frac{2}{x}$, $y = 3 - x$.

Решение.

Координаты точек пересечения линий находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{x} = 3 - x, x^2 - 3x + 2 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2; y_1 = 2, y_2 = 1.$$

Данные линии образуют заштрихованную фигуру (рис. 3.110), площадь S которой находится как разность площадей двух криволинейных трапеций.

$$S = \int_1^2 (3-x) dx - \int_1^2 \frac{2}{x} dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 - 2 \ln|x| \Big|_1^2 = (6-2) - \left(3 - \frac{1}{2} \right) - 2 \ln 2 = \frac{3}{2} - \ln 4.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2} - \ln 4 \right)$ кв. ед.

3.314. $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $y = x^4$.

Решение.

Координаты точек пересечения линий находим из системы уравнений:

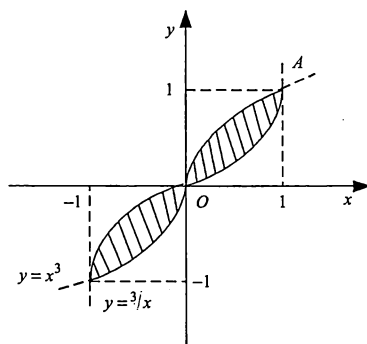


Рис. 3.109

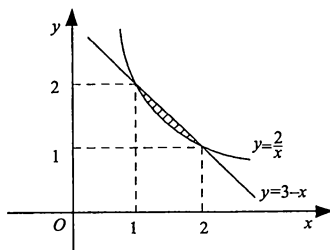


Рис. 3.110

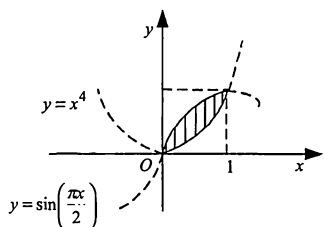


Рис. 3.111

$$\begin{cases} y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \\ y = x^4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1; y_1 = 0, y_2 = 1.$$

Данные линии образуют заштрихованную фигуру (рис. 3.111), площадь S которой находится как разность площадей двух криволинейных трапеций.

$$S = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx - \int_0^1 x^4 dx = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Big|_0^1 - \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{5}$.

3.315. $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), $y = 0$, $x = 0$ и прямой, являющейся касательной к линии $y = \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

Составим уравнение касательной:

$$y' = -\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

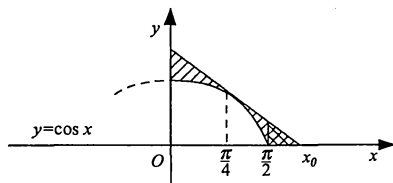


Рис. 3.112

Данные линии образуют заштрихованную фигуру (рис. 3.112).

Найдем точку x_0 пересечения касательной с осью Ox : $-\frac{\sqrt{2}}{2}x_0 + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pi}{4} + 1$.

Искомую площадь S находим как сумму площадей двух составляющих ее частей.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}+1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) dx = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}+1} + \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}+1} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\pi^2}{4} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(\frac{\pi}{4} + 1 \right)^2 - \frac{\pi^2}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{(4\sqrt{2} - 16 + \pi\sqrt{2})}{16}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{(4\sqrt{2} - 16 + \pi\sqrt{2})}{16}$ кв. ед.

3.316. $y = 3 - |3 - x|$, $y = \frac{6}{|x+1|}$.

Решение.

$$y = 3 - |3 - x| = \begin{cases} x, & x \leq 3, \\ 6 - x, & x > 3. \end{cases} \quad y = \frac{6}{|x+1|} = \begin{cases} \frac{6}{x+1}, & x > -1, \\ -\frac{6}{x+1}, & x < -1. \end{cases}$$

Построим фигуру искомой площади S (рис. 3.113).

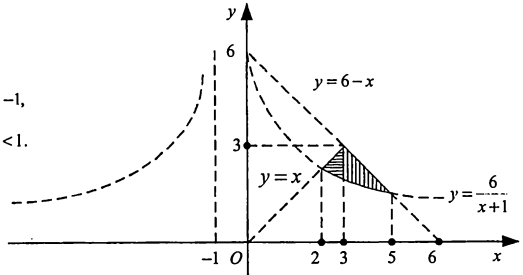


Рис. 3.113

Искомую площадь S заштрихованной фигуры найдем как сумму площадей составляющих ее частей. Абсциссы точек пересечения находим из систем:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} y = \frac{6}{x+1}, \\ y = x \end{cases} &\Rightarrow \frac{6}{x+1} = x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0, \quad x = 2 \quad (x = -3 \text{ не подходит}); \\ 2) \begin{cases} y = \frac{6}{x+1}, \\ y = 6 - x \end{cases} &\Rightarrow \frac{6}{x+1} = 6 - x \Rightarrow x^2 - 5x = 0, \quad x = 5 \quad (x = 0 \text{ не подходит}). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 x dx - \int_{-1}^2 \frac{6}{x+1} dx + \int_2^5 (6-x) dx - \int_2^5 \frac{6}{x+1} dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^2 - 6 \ln x + 1 \left. \right|_{-1}^2 + 6x \left. \right|_2^5 - \frac{x^2}{2} \left. \right|_2^5 - 6 \ln x + 1 \left. \right|_2^5 = \\ &= \frac{9-4}{2} - 6(\ln 4 - \ln 3) + 6(5-3) - \frac{25-9}{2} - 6(\ln 6 - \ln 4) = \frac{13}{2} - 6 \ln 2. \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{13}{2} - 6 \ln 2 \right)$ кв. ед.

3.317. При каком значении параметра a ($a < 0$) площадь фигуры, ограниченной параболой $y = (1 + a^2)x^2 + a$ и осью абсцисс будет наибольшей?

Решение.

Рассмотрим искомую фигуру (рис. 3.114).

Найдем абсциссы точек пересечения с осью абсцисс:

$$(1 + a^2)x^2 + a = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{-a}}{1 + a^2}.$$

Искомая площадь S будет равняться:

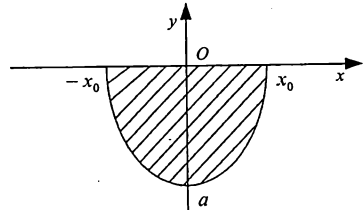


Рис. 3.114

$$S = \int_{-x_0}^{x_0} 0 dx - \int_{-x_0}^{x_0} \left((1+a^2)^2 x^2 + a \right) dx = - \left((1+a^2)^2 \frac{x^3}{3} + ax \right) \Big|_{-x_0}^{x_0} = - \frac{2}{3} (1+a^2)^2 \frac{x_0^3}{1+a^2} - 2a \frac{\sqrt{-a}}{1+a^2} = \frac{2a}{3(1+a^2)} - \frac{2a\sqrt{-a}}{1+a^2} =$$

$$= \frac{-4a\sqrt{-a}}{3(1+a^2)} = \frac{4}{3} \frac{(-a)^{\frac{3}{2}}}{1+a^2};$$

$$S'(a) = \frac{4}{3} \frac{-\frac{3}{2}(-a)^{\frac{1}{2}}(1+a^2) - (-a)^{\frac{3}{2}} 2a}{(1+a^2)^2} = \frac{4}{3} \frac{-\frac{3}{2}(-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(-a)^{\frac{5}{2}} + 2(-a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a^2)^2} = \frac{2}{3} \frac{(-a)^{\frac{1}{2}}((-a)^2 - 3)}{(1+a^2)^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{-a}}{3(1+a^2)^2} (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}).$$

При $a < 0$ имеется одна критическая точка $a = -\sqrt{3}$. Так как $S'' > 0$ при $a < -\sqrt{3}$ и $S'' < 0$ при $a > -\sqrt{3}$, то это точка максимума. Так как функция $S(a)$ имеет на промежутке $(-\infty; 0)$ только один экстремум, то в нем она и принимает свое наибольшее значение.

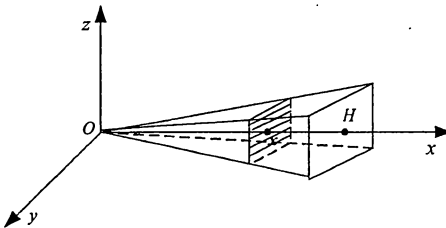
Ответ: $a = -\sqrt{3}$.

3.318. Доказать, что объем пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} S_0 \cdot H$, где S_0 — площадь основания, H — высота пирамиды.

Решение.

Выберем систему координат так, как показано на рис. 3.115, т.е. ось Ox направлена по высоте пирамиды.

В произвольной точке $x \in [0; H]$ рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси Ox , а также его площадь $S(x)$. В силу подобия, получаем:



$$\frac{S(x)}{S_0} = \frac{x^2}{H^2} \Rightarrow S(x) = \frac{S_0}{H^2} x^2.$$

Рис. 3.115

По формуле (3.5) имеем:

$$V = \int_0^H S(x) dx = \int_0^H \frac{S_0}{H^2} x^2 dx = \frac{S_0}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{S_0}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{S_0 H^3}{H^2 \cdot 3} = \frac{1}{3} S_0 H.$$

QED.

3.319. Доказать, что объем призмы находится по формуле $V = S_0 \cdot H$, где S_0 — площадь основания, H — высота призмы.

Решение.

Выберем систему координат так, как показано на рис. 3.116, т.е. ось Ox направлена по высоте призмы.

Тогда сечение в произвольной точке $x \in [0; H]$ будет равно основанию, а его площадь $S(x) = S_0$. По формуле (3.5) получаем:

$$V = \int_0^H S(x) dx = \int_0^H S_0 dx = S_0 \int_0^H dx = S_0 x \Big|_0^H = S_0 H.$$

QED.

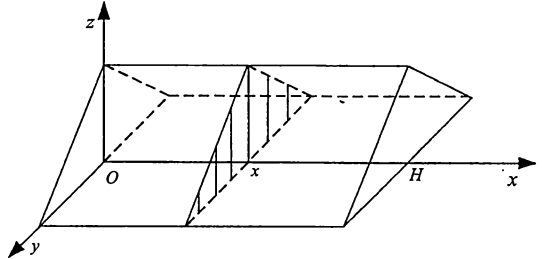


Рис. 3.116

3.320. Доказать, что объем цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi R^2 H$, где R — радиус основания, H — высота цилиндра.

Решение.

Цилиндр можно получить вращением прямоугольника с основаниями H, R вокруг оси Ox (рис. 3.117).

Используя формулу (3.6) и то, что $y(x) = R$ для всех $x \in [0; H]$, получаем

$$V = \pi \int_0^H y^2(x) dx = \pi R^2 \int_0^H dx = \pi R^2 x \Big|_0^H = \pi R^2 H.$$

QED.

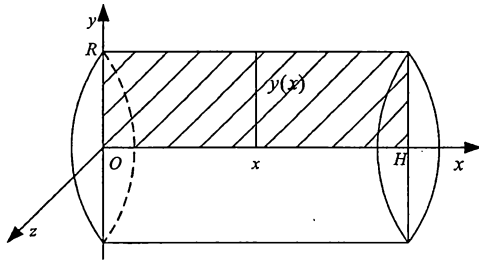


Рис. 3.117

3.321. Доказать, что объем конуса находится по формуле $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, где R — радиус основания, H — высота конуса.

Решение.

Конус можно получить вращением прямоугольного треугольника с катетами H, R вокруг оси Ox (рис. 3.118).

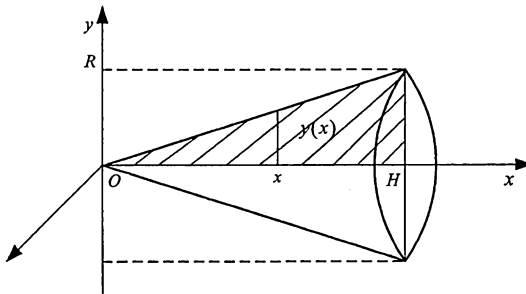


Рис. 3.118

В силу подобия треугольников получаем, что $\frac{y(x)}{x} = \frac{R}{H} \Rightarrow y(x) = \frac{R}{H}x$.

Используя формулу (3.6), имеем:

$$V = \pi \int_0^H y^2(x) dx = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot H^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

QED.

3.322. Доказать, что объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара.

Решение.

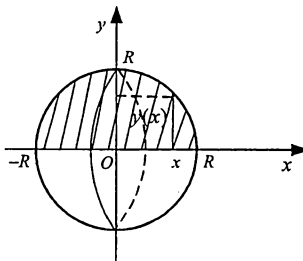


Рис. 3.119

Шар можно получить вращением полукруга радиусом R вокруг оси Ox (рис. 3.119).

Так как уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow y^2(x) = R^2 - x^2$, то, используя формулу (3.6), получаем

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R y^2(x) dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 \int_{-R}^R dx - \int_{-R}^R x^2 dx \right) = \\ &= \pi \left(R^2 x \Big|_{-R}^R - \frac{x^3}{3} \Big|_{-R}^R \right) = \pi \left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3 \right) = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

QED.

3.323. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$, $y = 0$, вокруг оси Ox .

Решение.

Указанное тело изображено на рис. 3.120.

$$\text{Объем этого тела } V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^\pi \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{2}$ куб. ед.

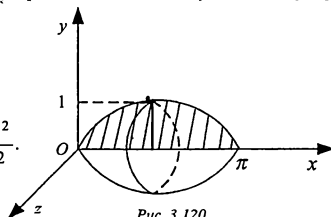


Рис. 3.120

3.324. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = e^x$.

Решение.

Указанное тело изображено на рис. 3.121.

Объем этого тела

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1).$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} (e^2 - 1)$ куб. ед.

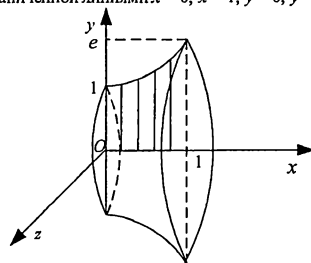


Рис. 3.121

4. ТРИГОНОМЕТРИЯ

4.1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

4.1.1. Единичная окружность и радианное измерение угла

Единичной окружностью называется окружность $x^2 + y^2 = 1$ с центром в начале координат (рис. 4.1). Будем рассматривать угол φ как геометрическую фигуру, полученную при повороте начального луча, совпадающего с полупрямой Ox , вокруг точки O . При этом направление вращения против часовой стрелки называется *положительным*, а по часовой стрелке — *отрицательным*, и углы, полученные вращением луча против часовой стрелки, считаются *положительными*, а по часовой стрелке — *отрицательными*. При повороте на угол φ начальный радиус OA перейдет в радиус OB , где $A(1; 0)$, $B(x; y)$.

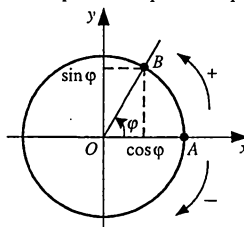


Рис. 4.1

Синусом угла φ называется ордината точки B , т. е. $y = \sin \varphi$.

Косинусом угла φ называется абсцисса точки B , т. е. $x = \cos \varphi$.

Тангенсом угла φ называется отношение его синуса к коси-

нусу, т. е. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$.

Котангенсом угла φ называется отношение его косинуса к

синусу, т. е. $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$.

Из определения $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ сразу же следует *основное тригонометрическое тождество*:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \quad (4.1)$$

4.1.2. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график

Как было отмечено, $\sin x$ — это ордината точки B_x единичной окружности (рис. 4.2).

Разделив обе части тождества (4.1) на $\cos^2 \varphi \neq 0$, получаем

$$\operatorname{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}. \quad (4.2)$$

При *радианном* измерении угол φ измеряется длиной дуги единичной окружности, которую описывает радиус при повороте из начального положения OA в конечное OB , взятой со знаком «+», если угол положительный, и со знаком «-», если угол отрицательный.

Таким образом, угол в 1 радиан — это острый угол, опирающийся на дугу AB единичной длины 1 при положительном направлении обхода.

Чтобы получить развернутый угол в 180° , радиус должен описать дугу длиной π (длина всей окружности 2π , так как длина радиуса — единица). Отсюда получаем пропорцию,

φ°	180°
$\varphi_{\text{рад}}$	π

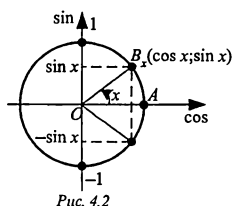
связывающую градусное и радианное измерение угла. В

частности, $1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$.

Отметим, что каждой точке B на окружности соответствует бесконечное множество углов:

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.3)$$

полученных разными поворотами начального радиуса OA в положение OB . Другими словами, каждой точке единичной окружности соответствует бесконечное множество точек числовой оси, заданное посредством формулы (4.3).



1) $D(y) = \mathbb{R}$, так как $\sin x$ определяется для любого угла $x \in (-\infty; +\infty)$;

2) функция нечетная, т. е. $\sin(-x) = -\sin x$ (см. рис. 4.2), следовательно, график симметричен относительно начала координат;

3) функция периодическая с периодом $T = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, и наименьшим положительным периодом 2π . Это следует из того, что $\sin x$ зависит только от точки B_x , т. е. $\sin(x + 2\pi k) = \sin x, k \in \mathbb{Z}$;

4) $\sin 0 = 0; \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$\sin x > 0$ для $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $\sin x < 0$ для $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;

5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ не существуют;

6) $y = \sin x$ — непрерывна и $y' = \cos x; y' = \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$y' = \cos x > 0 \text{ для } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$$

$$y' = \cos x < 0 \text{ для } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$$

7) $f(x)$ монотонно возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$;

$f(x)$ монотонно убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$;

точки максимума: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$;

точки минимума: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$.

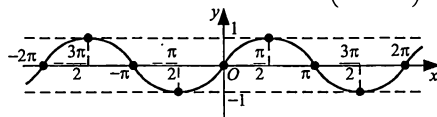


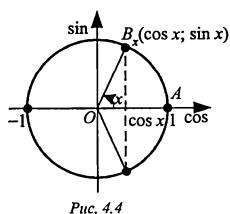
Рис. 4.3

8) График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой* (рис. 4.3);

9) $E(y) = [-1; 1]$.

4.1.3. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график

Как было отмечено, $\cos x$ — это абсцисса точки B_x единичной окружности (рис. 4.4).



Свойства функции $y = \cos x$:

1) $D(y) = \mathbb{R}$, так как $\cos x$ определяется для любого угла $x \in (-\infty; +\infty)$;

2) функция четная, т. е. $\cos(-x) = \cos x$ (см. рис. 4.4), следовательно, график симметричен относительно оси Oy ;

3) функция периодическая с периодом $T = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, и наименьшим положительным периодом 2π . Это следует из того, что $\cos x$ зависит только от точки B_x , т. е. $\cos(x + 2\pi k) = \cos x, k \in \mathbb{Z}$;

4) $\cos 0 = 1; \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$$\cos x > 0 \text{ для } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x < 0 \text{ для } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$$

5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ не существуют;

6) $y = \cos x$ непрерывна и $y' = -\sin x; y' = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$y' > 0$ для $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$;

$y' < 0$ для $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$;

7) $f(x)$ монотонно возрастает при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$;

$f(x)$ монотонно убывает при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$;

точки максимума: $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \cos(2\pi n) = 1$;

точки минимума: $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \cos(\pi + 2\pi n) = -1$;

8) график функции $y = \cos x$ называется *косинусоидой* (рис. 4.5);

9) $E(y) = [-1; 1]$.

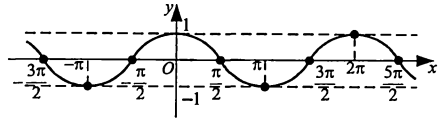


Рис. 4.5

4.1.4. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график

По определению, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$.

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = -\infty;$$

Рассмотрим *ось тангенсов* — касательную к единичной окружности, проведенную в точке A (рис. 4.6). Из $\triangle AOC$ очевидно, что $AC = \operatorname{tg} x$.

6) функция непрерывна на каждом из интервалов области определения:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

7) $f(x)$ монотонно возрастает на каждом из интервалов области определения;

8) график функции $y = \operatorname{tg} x$ называется *тангенсоидой* (рис. 4.7);

9) $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

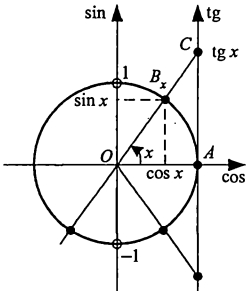


Рис. 4.6

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$:

1) область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество всех действительных чисел, за исключением чисел $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) функция нечетная, т. е. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (см. рис. 4.6), следовательно, график симметричен относительно начала координат;

3) функция периодическая с периодом $T = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и наименьшим положительным периодом π (см. рис. 4.6), т. е. $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) $\operatorname{tg} 0 = 0$; $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$\operatorname{tg} x > 0 \text{ для } x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x < 0 \text{ для } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

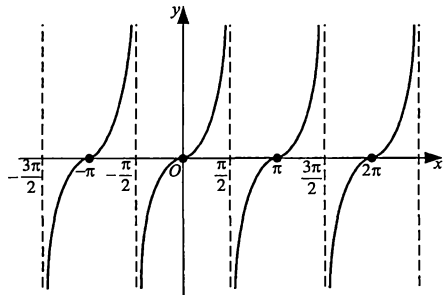


Рис. 4.7

4.2. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

4.2.1. КОСИНУС РАЗНОСТИ И СУММЫ ДВУХ УГЛОВ

Имеют место следующие формулы:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \quad (4.4)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (4.5)$$

Доказательство.

1. Для доказательства формулы (4.4) рассмотрим единичные радиус-векторы \vec{OC} и \vec{OB} точек C и B , соответствующие углам α и β (рис. 4.8). Очевидно, что

$\vec{OC}(\cos \alpha; \sin \alpha)$, $\vec{OB}(\cos \beta; \sin \beta)$
и скалярное произведение

$$\vec{OC} \cdot \vec{OB} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \vec{OC} \cdot \vec{OB} &= |\vec{OC}| \cdot |\vec{OB}| \cos(\alpha - \beta) = \\ &= \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Рис. 4.8

2. Для доказательства формулы (4.5) имеем:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \\ &+ \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

в силу четности функции \cos и нечетности функции \sin . **QED.**

Далее получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \sin \alpha; \quad (4.6)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos \alpha. \quad (4.7)$$

Формулы (4.6), (4.7) являются следствием формулы (4.4).

4.2.2. СИНОСУС СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad (4.8)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (4.9)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

4.2.3. ТАНГЕНС СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (4.10)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.11)$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$, получаем [см. (4.10), (4.11)]:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \pm \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \mp \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 \mp \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

4.2.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ СУММ $\sin \alpha \pm \sin \beta$; $\cos \alpha \pm \cos \beta$

$$\text{а) } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (4.12)$$

$$\text{б) } \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (4.13)$$

$$\text{в) } \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\text{г) } \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (4.14)$$

Доказательство.

Предположим, что $\begin{cases} \alpha = x + y, \\ \beta = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ y = \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{cases}$

Используя формулы (4.4), (4.5), (4.8), (4.9), получаем:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin \alpha + \sin \beta &= \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \\ &+ \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \sin \alpha - \sin \beta = \sin(x+y) - \sin(x-y) = \sin x \cos y +$$

$$+ \cos x \sin y - \sin x \cos y + \cos x \sin y = 2 \sin y \cos x =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \cos \alpha + \cos \beta &= \cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x \cos y - \\ &- \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2 \cos x \cos y = \end{aligned}$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \cos \alpha - \cos \beta &= \cos(x+y) - \cos(x-y) = \cos x \cos y - \\ &- \sin x \sin y - \cos x \cos y + \sin x \sin y = -2 \sin x \sin y = \end{aligned}$$

$$= -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

QED.

4.2.5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad (4.15)$$

$$2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha; \quad (4.16)$$

$$3) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$4) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad (4.17)$$

$$5) \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \quad (4.18)$$

$$6) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$7) \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$8) \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство.

1) По формуле (4.8)

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

2) По формуле (4.5)

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha -$$

$$- \sin^2 \alpha = \left(1 - \sin^2 \alpha\right) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha - \left(1 - \cos^2 \alpha\right) = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

3) По формуле (4.10)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

4) По формуле (4.16)

$$\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

5) По формуле (4.16)

$$\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) = \frac{1}{2} \left(1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

6) По формулам (4.17), (4.18), (4.15)

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

7) По формулам (4.2), (4.15)

$$\frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = 2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha.$$

8) По формулам (4.2), (4.16)

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \left(1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha.$$

QED.

4.2.6. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

а) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$

б) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$

в) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$

Доказательство.

а) По формуле (4.14)

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = -2\sin \frac{\alpha - \beta + \alpha + \beta}{2} \times$$

$$\times \sin \frac{\alpha - \beta - \alpha - \beta}{2} = 2\sin \alpha \sin \beta.$$

б) По формуле (4.13)

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos \frac{\alpha - \beta + \alpha + \beta}{2} \times$$

$$\times \cos \frac{\alpha - \beta - \alpha - \beta}{2} = 2\cos \alpha \cos \beta.$$

в) По формуле (4.12)

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2\sin \frac{\alpha - \beta + \alpha + \beta}{2} \times$$

$$\times \cos \frac{\alpha - \beta - \alpha - \beta}{2} = 2\sin \alpha \cos \beta.$$

QED.

4.2.7. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Тригонометрическая функция аргумента $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$;

$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$ называется *приводимой*. Приводимую функцию можно заменить функцией аргумента α по формулам приведения (табл. 4.1).

Для доказательства приведенных формул используем формулы (4.4), (4.5), (4.8), (4.9).

Например,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cos \alpha \mp \sin \frac{3\pi}{2} \sin \alpha = \pm \sin \alpha;$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \sin \pi \cos \alpha \pm \cos \pi \sin \alpha = \mp \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha \pm \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha \mp \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\mp \sin \alpha} = \mp \operatorname{ctg} \alpha.$$

QED.

На практике удобно пользоваться следующими правилами применения формул приведения:

1) функция меняется на кофункцию (кофункцией для \sin является \cos , для \cos — \sin , для tg — ctg , для ctg — tg)

Таблица 4.1

Функция	Аргумент			
	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = 2\pi \pm \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$ $\alpha \neq \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$ $\alpha \neq \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$ $\alpha \neq \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$ $\alpha \neq \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

для аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ и не меняется для $\pi \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$;

2) знак *приведенной* функции определяется по знаку *приводимой* функции с помощью единичной окружности, угол α считается при этом острым (хотя может быть любым).

4.2.8. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

Как было отмечено, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$; $|\operatorname{tg} \alpha| = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{|\cos \alpha|}$.

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, следовательно,

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad |\sin \alpha| = \frac{|\operatorname{tg} \alpha|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

$$|\operatorname{tg} \alpha| = \frac{|\sin \alpha|}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}; \quad |\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

Отметим, что этими формулами удобно пользоваться в том случае, когда мы знаем, в какой четверти лежит угол α , т. е. можем определить знаки $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$. При решении уравнений, где x — неизвестное, эти формулы обычно не применяют.

4.2.9. ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

Таблица 4.2

Аргумент α	Функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$0^\circ \left(0\right)$	0	1	0	не определен
$15^\circ \left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^\circ \left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36^\circ \left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54^\circ \left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$72^\circ \left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$75^\circ \left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

4.2.10. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Следующие формулы не входят в обязательный курс тригонометрии, однако могут быть полезными при решении сложных тригонометрических задач.

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3\operatorname{ctg} \alpha}{3\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}, \alpha \neq \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha);$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha);$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}, \alpha, \beta \neq \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta},$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \pi, k, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\beta \neq \pi, k, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2\operatorname{ctg} 2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \sin \alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 - \sin \alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos 45^\circ \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha},$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos 45^\circ \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha},$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1 = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \alpha, \beta \neq \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta},$$

$$\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta},$$

$$\alpha, \beta \neq \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha, \alpha \neq \pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) +$$

$$+ \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma));$$

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) +$$

$$+ \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma));$$

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) +$$

$$+ \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma));$$

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} (\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma))$$

4.3. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

4.3.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИДА $\sin x = a$

Заметим, что существует взаимно однозначное соответствие между точками «правой» единичной полуокружности

ности $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и точками отрезка $[-1; 1]$ на оси Oy (рис. 4.9).

Таким образом, $\alpha = \arcsin a$ — это угол из промежутка

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для которого $\sin \alpha = a$.

Рассмотрим решение простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$.

1. Если $|a| > 1$, то решений нет, так как $|\sin x| \leq 1$.
2. Если $a = 1$, $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ («верхняя» точка единичной окружности, рис. 4.10).
3. Если $a = -1$, $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ («нижняя» точка единичной окружности).
4. Если $-1 < a < 1$, то получаем два решения («правая» и «левая» точки единичной окружности):

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi k, x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Часто эти решения объединяются в одну формулу

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

которая дает x_1 при $n = 2k$ и x_2 при $n = 2k + 1$.

Очевидно, что $\arcsin 0 = 0$, следовательно, $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

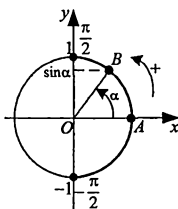


Рис. 4.9

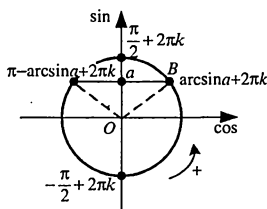


Рис. 4.10

4.3.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИДА $\cos x = a$

Отметим, что существует взаимно однозначное соответствие между точками «верхней» единичной полуокружности $[0; \pi]$ и точками отрезка $[-1; 1]$ на оси Ox (рис. 4.11). Таким образом, $\alpha = \arccos a$ — это угол из промежутка $[0; \pi]$, для которого $\cos \alpha = a$.

Рассмотрим решение простейшего тригонометрического уравнения $\cos x = a$.

1. Если $|a| > 1$, то решений нет, так как $|\cos x| \leq 1$.
2. Если $a = 1$, $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ («правая» точка единичной окружности).
3. Если $a = -1$, $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ («левая» точка единичной окружности, рис. 4.12).
4. Если $-1 < a < 1$, то получаем два решения («верхняя» и «нижняя» точки единичной окружности):

$$x_1 = \arccos a + 2\pi k, x_2 = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Обычно данные решения объединяются в одну формулу:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

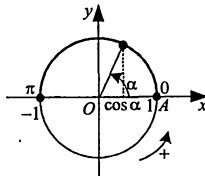


Рис. 4.11

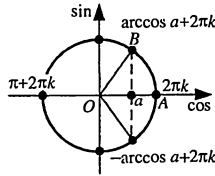


Рис. 4.12

4.3.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\operatorname{tg} x = a$

Существует взаимно однозначное соответствие между точками «правой» единичной окружности $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и точками оси тангенсов (рис. 4.13). Таким образом, $\alpha = \operatorname{arctg} a$ — это угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, для которого $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Рассмотрим решение простейшего уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

Для любого $a \in (-\infty; +\infty)$ получаем два решения:

$$x_1 = \operatorname{arctg} a + 2\pi k,$$

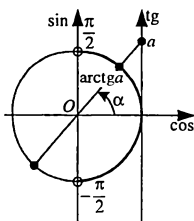


Рис. 4.13

$x_2 = \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,
которые объединяются одной формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (4.19)$$

Формула (4.19) дает x_1 при $n = 2k$ и x_2 при $n = 2k + 1$.

Очевидно, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$, следовательно, $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.3.4. Свойства функции $y = \operatorname{arcsin} x$ и ЕЕ ГРАФИК

Функция $y = \sin x$, рассматриваемая на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, монотонно возрастает и имеет обратную функцию arcsin .

Используя свойства взаимно обратных функций, находим:

1) $D(\operatorname{arcsin}) = [-1; 1]$;

2) $\operatorname{arcsin} x$ — нечетная функция, т. е. $\operatorname{arcsin}(-x) = -\operatorname{arcsin} x$;

3) $\operatorname{arcsin} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\operatorname{arcsin} x > 0$ при $x \in (0; 1]$, $\operatorname{arcsin} x < 0$ при $x \in [-1; 0)$;

4) функция $y = \operatorname{arcsin} x$ непрерывная, имеет производную для

$$x \in (-1; 1): (\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

5) функция $y = \operatorname{arcsin} x$ возрастает на отрезке $[-1; 1]$,

$$y_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{2} \text{ при } x = 1, y_{\text{наим}} = -\frac{\pi}{2} \text{ при } x = -1;$$

6) график функции симметричен части синусоиды относительно прямой $y = x$ (рис. 4.14);

7) $E(\operatorname{arcsin}) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4.3.5. Свойства функции $y = \operatorname{arccos} x$ и ЕЕ ГРАФИК

Функция $y = \cos x$, рассматриваемая на промежутке $[0; \pi]$, монотонно убывает и имеет обратную функцию arccos .

Используя свойства взаимно обратных функций, получаем:

1) $D(\operatorname{arccos}) = [-1; 1]$;

2) $\operatorname{arccos} x$ — функция общего вида, $\operatorname{arccos}(-x) = \pi - \operatorname{arccos} x$;

3) $\operatorname{arccos} x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\operatorname{arccos} x > 0$ для $x \in [-1; 1)$; $\operatorname{arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$;

4) функция $y = \operatorname{arccos} x$ непрерывная, имеет производную для $x \in (-1; 1)$: $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

5) функция $y = \operatorname{arccos} x$ убывает на отрезке $[-1; 1]$, $y_{\text{наиб}} = \pi$ при $x = -1$, $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = 1$;

6) график функции симметричен части косинусоиды относительно прямой $y = x$ (рис. 4.15);

7) $E(\operatorname{arccos}) = [0; \pi]$.

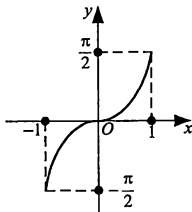


Рис. 4.14

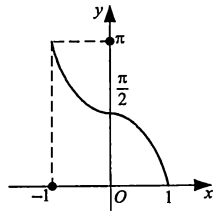


Рис. 4.15

4.3.6. Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$ и ЕЕ ГРАФИК

Функция $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемая на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, монотонно возрастает и имеет обратную функцию arctg . Используя свойства взаимно обратных функций, получаем:

- 1) $D(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$;
- 2) $\operatorname{arctg} x$ — нечетная функция, т. е. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;
- 3) $\operatorname{arctg} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\operatorname{arctg} x > 0$ при $x \in (0; +\infty)$; $\operatorname{arctg} x < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$;
- 4) функция $y = \operatorname{arctg} x$ непрерывная и имеет производную для всех $x \in \mathbb{R}$: $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

- 5) функция $\operatorname{arctg} x$ монотонно возрастающая;
- 6) график функции изображен на рис. 4.16;
- 7) $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

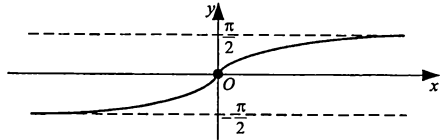


Рис. 4.16

4.3.7. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

С помощью единичной окружности (рис. 4.17 — рис. 4.19) нетрудно получить множество решений простейших тригонометрических неравенств (табл. 4.3).

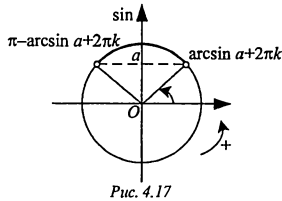


Рис. 4.17

Более сложные тригонометрические неравенства решаются сведением к простейшим (если это возможно).

Таблица 4.3

Неравенства	Множества решений неравенств ($k \in \mathbb{Z}$)
$\sin x > a$ ($ a < 1$)	$x \in (\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k)$
$\sin x < a$ ($ a < 1$)	$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k)$
$\cos x > a$ ($ a < 1$)	$x \in (-\arccos a + 2\pi k; \arccos a + 2\pi k)$
$\cos x < a$ ($ a < 1$)	$x \in (\arccos a + 2\pi k; 2\pi - \arccos a + 2\pi k)$
$\operatorname{tg} x > a$	$x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
$\operatorname{tg} x < a$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k\right)$

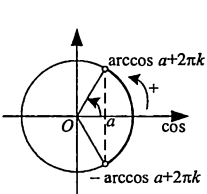


Рис. 4.18

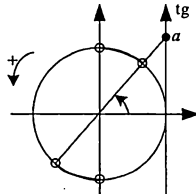


Рис. 4.19

4.3.8. НЕКОТОРЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1) Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ равносильно уравнению $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x - d \sin^2 x - d \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow a' \sin^2 x + b \sin x \cos x + c' \cos^2 x = 0$. Разделив обе части последнего уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, приходим к квадратному уравнению относительно неизвест-

ной $t = \operatorname{tg} x$: $a't^2 + bt + c' = 0$ и далее к простейшим.

2) Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$ сводится к уравнению первого типа с помощью формул: $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$;

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}.$$

3) Метод дополнительного угла:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{найдем угол } \varphi \text{ такой, что,} \\ \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right] =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

$a^2 + b^2 \neq 0$. С помощью полученной формулы можно решать как уравнения второго типа, так и уравнения, содержащие выражения указанного вида.

4) Уравнение вида $P(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$, где P — многочлен от указанных аргументов, сводится к алгебраическому уравнению заменой $t = \sin x \pm \cos x$.

В этом случае $t^2 = (\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x \pm 2 \times \sin x \cos x = 1 \pm 2 \sin x \cos x$, откуда $\sin x \cos x$ выражается через t .

5) Уравнение $\sin^n x + \cos^m x = 1$ ($m, n = 3, 4, \dots$) может иметь своими решениями только числа вида $x = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

Далее, проверяя полученные четыре точки единичной окружности, записываем решение.

4.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Отметим, что следующие формулы не входят в обязательный курс школьной тригонометрии:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\sin(\arctg x) = -\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\operatorname{ctg}(\arctg x) = x;$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1;$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\arctg x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0;$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1;$$

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

$$\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1;$$

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1 - x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1 - x^2}, & -1 \leq x < 0; \end{cases}$$

$$\arccos x = \begin{cases} \arctg \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ \pi + \arctg \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, & -1 \leq x < 0; \end{cases}$$

$$\arctg x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\arctg x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, & x \geq 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, & x < 0; \end{cases}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), \\ xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), \\ x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), \\ x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), \\ xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), \\ x > 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), \\ x < 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$$

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \right), \\ x + y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \right), \\ x + y < 0; \end{cases}$$

$$\arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos \left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \right), \\ x \geq y; \\ \arccos \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \right), \\ x < y; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & xy < 1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & x > 0 \text{ и } xy > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & x < 0 \text{ и } xy > 1; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & xy > -1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & x > 0 \text{ и } xy < -1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & x < 0 \text{ и } xy < -1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ТЕМА: ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

4.001. Сравнить значения выражений $\cos(-120^\circ)$ и $\sin(-149^\circ 12')$.

Решение.

Имеем: $\sin(-149^\circ 12') = -\sin(180^\circ - 30^\circ 48') = -\sin 30^\circ 48'$; $\cos(-120^\circ) = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$.

Так как $\sin 30^\circ 48' > \sin 30^\circ$, то $-\sin 30^\circ 48' < -\sin 30^\circ$, поэтому $\cos(-120^\circ) > \sin(-149^\circ 12')$.

Ответ: $\cos(-120^\circ) > \sin(-149^\circ 12')$.

4.002. Окружность морского компаса делится на 32 равные части, называемые румбами. Выразить 1 румб в градусах и радианах.

Решение.

Градусная мера окружности равна 360° , следовательно, 1 румб $= \frac{360^\circ}{32} = 11^\circ 15'$. Радианная мера окружности равна 2π , значит, 1 румб $= \frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{16} = 0,196$ рад.

Ответ: $11^\circ 15'$; 0,196 рад.

4.003. Упростить выражение $f(\alpha) = \frac{\sin^3(\alpha - 270^\circ) \cos(360^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}^3(\alpha - 90^\circ) \cos^3(\alpha - 270^\circ)}$.

Решение.

Так как функция $y = \cos x$ четная, а функции $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$ нечетные, то получаем: $f(\alpha) = \frac{(-\sin(270^\circ - \alpha))^3 \cos(360^\circ - \alpha)}{(-\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha))^3 \cos^3(270^\circ - \alpha)}$.

Применив затем формулы приведения, получим: $f(\alpha) = \frac{(\cos \alpha)^3 \cos \alpha}{(-\operatorname{ctg} \alpha)^3 (-\sin \alpha)^3} = \cos \alpha$. Итак, если $\sin \alpha \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$, т. е.

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}, \text{ то } f(\alpha) = \cos \alpha.$$

Ответ: $f(\alpha) = \cos \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.

4.004. Пусть α, β, γ — внутренние углы треугольника. Какой знак имеет сумма $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$? Какой знак имеет сумма

$\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}$? Могут ли тригонометрические функции внутренних углов треугольника быть отрицательными?

Решение.

Так как каждый из углов $\alpha, \beta, \gamma \in (0; 180^\circ)$, то $\sin \alpha > 0, \sin \beta > 0, \sin \gamma > 0$. Следовательно, $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > 0$. Далее,

$$\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \in (0; 90^\circ), \text{ значит, } \cos \frac{\alpha}{2} > 0, \cos \frac{\beta}{2} > 0, \cos \frac{\gamma}{2} > 0, \text{ поэтому } \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} > 0.$$

Если треугольник тупоугольный, то один из его углов, например γ , тупой, т. е. $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$. Тогда $\cos \gamma < 0, \operatorname{tg} \gamma < 0, \operatorname{ctg} \gamma < 0$.

Ответ: плюс; плюс; да.

4.005. Существует ли такой угол, для которого числа $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ являются соответственно его тангенсом и котангенсом? Можно ли одну из дробей $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ приписать соответственно за синус и косинус некоторого угла α ?

Решение.

Да, такой угол α существует, так как при $\operatorname{tg} \alpha = 2 + \sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$ выполняется тождество $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$.

Да, можно, так как при $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ выполняется тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$
 $= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$

Ответ: да; да.

4.006. Вычислить $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Решение.

Из тождества (4.1) находим: $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$ (так как α принадлежит II координатной четверти).

Далее, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{4}{3}.$

Ответ: $-\frac{4}{5}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{3}.$

4.007. Доказать тождество $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^2 3x - 1} \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 3x}{\operatorname{ctg} 3x} = 1.$

Решение.

Так как $\operatorname{ctg} 3x = \frac{1}{\operatorname{tg} 3x}$, то получаем: $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^2 3x - 1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 3x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}} = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^2 3x - 1} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 3x - 1}{\operatorname{tg} 3x} = 1.$

QED.

4.008. Упростить выражение $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$.

Решение.

Выразив $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, упростим данное выражение:

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{1}{\cos 2\alpha}$.

4.009. Вычислить без таблиц и калькулятора $\cos 15^\circ$.

Решение.

Применим формулу (4.4), в соответствии с которой

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

4.010. Определить знак произведения $\lg \sin 31^\circ \cdot \lg \cos 18^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 39^\circ \cdot \lg \operatorname{ctg} 21^\circ$.

Решение.

Из свойств тригонометрических функций имеем: $\sin 31^\circ < 1$, $\cos 18^\circ < 1$, $\operatorname{tg} 39^\circ < 1$, $\operatorname{ctg} 21^\circ > 1$, поэтому $\lg \sin 31^\circ < 0$, $\lg \cos 18^\circ < 0$, $\lg \operatorname{tg} 39^\circ < 0$, $\lg \operatorname{ctg} 21^\circ > 0$, и искомое произведение принимает отрицательное значение.

Ответ: минус.

4.011. Найти $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{4}$, если $\cos \gamma = -0,6$ и $180^\circ < \gamma < 270^\circ$.

Решение.

Применяя формулы (4.19) и (4.20), преобразуем $\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{4}$ следующим образом: $\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{4} = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \cos \frac{\gamma}{2}}{1 + \cos \frac{\gamma}{2}}$. Таким образом,

необходимо найти $\cos \frac{\gamma}{2}$. Из формулы (4.20) следует $\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \cos \gamma}{2} = \frac{1 - 0,6}{2} = \frac{1}{5}$. Так как $180^\circ < \gamma < 270^\circ$, то

$90^\circ < \frac{\gamma}{2} < 135^\circ$ и $\cos \frac{\gamma}{2} < 0$. Поэтому $\cos \frac{\gamma}{2} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Итак, $\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{4} = \frac{1 + \frac{\sqrt{5}}{5}}{1 - \frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{(5 + \sqrt{5})^2}{20}$. Так как $45^\circ < \frac{\gamma}{4} < 67^\circ 30'$,

то $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{4} > 0$, т. е. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.012. Вычислить $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Решение.

Упростим данное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha. \end{aligned}$$

Далее, зная $\operatorname{tg} \alpha$, вычислим $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Так как α принадлежит III координатной четверти, то $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}} = -\frac{12}{13}$, а $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{13}$. Таким образом, данное выражение равно $-\frac{5}{13} - \frac{12}{13} = -\frac{17}{13}$.

Ответ: $-\frac{17}{13}$.

4.013. Вычислить $32 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Решение.

По формуле (4.24), а затем по формуле $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$ получаем

$$\begin{aligned} 32 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} &= 32 \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{2}\right)}{2} = 16(\cos \alpha - \cos 2\alpha) = 16(\cos \alpha - 2\cos^2 \alpha + 1) = \\ &= 16\left(\frac{4}{5} - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1\right) = 8\frac{8}{25}. \end{aligned}$$

Ответ: $8\frac{8}{25}$.

4.014. Найти $\sin \alpha + \cos \alpha - 1$, если $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{5}{8}$.

Решение.

Имеем $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{9}{4}$.

Тогда $\sin \alpha + \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm 1,5$ и $\sin \alpha + \cos \alpha - 1 = \pm 1,5 - 1$.

Ответ: $\pm 1,5 - 1$.

4.015. Вычислить $\cos \frac{\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} \cos \frac{8\pi}{65} \cos \frac{16\pi}{65} \cos \frac{32\pi}{65}$.

Решение.

Обозначим заданное произведение через P . Умножим и разделим P на $2 \sin \frac{\pi}{65}$. Так как $2 \sin \frac{\pi}{65} \cos \frac{\pi}{65} = \sin \frac{2\pi}{65}$, то

$$P = \frac{\sin \frac{2\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} \cos \frac{8\pi}{65} \cos \frac{16\pi}{65} \cos \frac{32\pi}{65}}{2 \sin \frac{\pi}{65}}.$$

Далее имеем: $\sin \frac{2\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} = \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{65}$; $\sin \frac{4\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} = \frac{1}{2} \sin \frac{8\pi}{65}$ и так далее.

$$\text{В итоге получаем: } P = \frac{\sin \frac{64\pi}{65}}{64 \sin \frac{\pi}{65}} = \frac{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{65} \right)}{64 \sin \frac{\pi}{65}} = \frac{\sin \frac{\pi}{65}}{64 \sin \frac{\pi}{65}} = \frac{1}{64}.$$

Ответ: $\frac{1}{64}$.

4.016. Доказать тождество $\sin^6 \beta + \cos^6 \beta + 3 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = 1$.

Решение.

Преобразуем левую часть равенства, разложив $\sin^6 \beta + \cos^6 \beta$ по формуле суммы кубов:

$$\begin{aligned} \sin^6 \beta + \cos^6 \beta + 3 \sin^2 \beta \cos^2 \beta &= (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)(\sin^4 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \cos^4 \beta) + 3 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = \sin^4 \beta + 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \cos^4 \beta = \\ &= (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)^2 = 1. \end{aligned}$$

QED.

4.017. Доказать тождество $\left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha \right) \left(1 - \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha \right) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$.

Решение.

Преобразуем левую часть исходного равенства:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha \right) \left(1 - \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \right) \left(1 - \frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \right) = \frac{\cos 2\alpha + 1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha - 1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 1)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha - 1)}{\cos^2 2\alpha} = \frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)^2 - 1}{\cos^2 2\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha - 1}{\cos^2 2\alpha} = \\ &= \frac{1 + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha - 1}{\cos^2 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, получили $2 \operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$.

QED.

4.018. Упростить выражение $A = \frac{\cos(\alpha - 2\pi)}{1 + \cos(\alpha - 4\pi)} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - 1} + 2\operatorname{ctg}^2(-\alpha)$.

Решение.

Так как $\cos(\alpha - 2\pi) = \cos \alpha$, $\cos(\alpha - 4\pi) = \cos \alpha$, $\operatorname{ctg}^2(-\alpha) = (-\operatorname{ctg} \alpha)^2 = \operatorname{ctg}^2 \alpha$, то исходное выражение принимает вид:

$$A = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - 1} + 2\operatorname{ctg}^2 \alpha. \text{ Приведем дроби к общему знаменателю:}$$

$$A = \frac{\cos \alpha (\cos \alpha - 1) + \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(\cos \alpha - 1)} + 2\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{2\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 1} + 2\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{2\cos^2 \alpha}{-\sin^2 \alpha} + 2\operatorname{ctg}^2 \alpha =$$

$$= -2\operatorname{ctg}^2 \alpha + 2\operatorname{ctg}^2 \alpha = 0.$$

Ответ: 0.

4.019. Может ли косинус какого-либо угла быть равным: а) $\lg a + \frac{1}{\lg a}$ ($a > 0$, $a \neq 1$); б) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$; в) $\cos 40^\circ + \cos 50^\circ$?

Решение.

Для любого угла α : $|\cos \alpha| \leq 1$.

а) Если $\lg a > 0$, т. е. $a > 1$, то из неравенства $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $x > 0$, следует, что $\lg a + \frac{1}{\lg a} \geq 2$. Значит, нет такого угла α , для которого $\cos \alpha = \lg a + \frac{1}{\lg a}$. (Аналогичные рассуждения и при $\lg a < 0$, $0 < a < 1$.)

б) Преобразуем выражение $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{3} - 3}{2} < 1$

(так как $3 < \sqrt{15} < 4$, $2 < \sqrt{5} < 3$, $1 < \sqrt{3} < 2$ и поэтому $\sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{3} - 3 < 1$). Следовательно, в этом случае равенство

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ возможно.

в) Имеем: $\cos 40^\circ + \cos 50^\circ = 2 \cos 45^\circ \cdot \cos 5^\circ = \sqrt{2} \cos 5^\circ$. Но $\cos 5^\circ > \cos 45^\circ$, поэтому выражение $\sqrt{2} \cos 5^\circ > \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, и,

следовательно, равенство $\cos \alpha = \cos 40^\circ + \cos 50^\circ$ невозможно.

Ответ: а) нет; б) да; в) нет.

4.020. Упростить выражение $\frac{\cos(30 - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2} \sin 30}{\cos 13 \cos 17 - \sin 13 \sin 17}$.

Решение.

Применив к исходному выражению формулы (4.4) и (4.5), получим:

$$\frac{\cos 30 \cos \frac{\pi}{6} + \sin 30 \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin 30}{\cos(13+17)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 30 + \frac{1}{2} \sin 30 - \frac{1}{2} \sin 30}{\cos 30} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.021. Доказать тождество $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$.

Решение.

Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} + \\ &+ \frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha}{\sin 3\alpha \cos 3\alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha \cos 3\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} + \frac{2}{\sin 6\alpha} = \\ &= \frac{2(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha \sin 6\alpha} = \frac{4 \sin 4\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 6\alpha} = \frac{8 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 6\alpha} = \frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}. \end{aligned}$$

Получили $\frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha} = \frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$.

QED.

4.022. Вычислить $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$.

Решение.

Учитывая, что $\operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 10^\circ) = \operatorname{ctg} 10^\circ$, $\operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 20^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ$, $\operatorname{tg} 50^\circ = \operatorname{ctg} 40^\circ$, то $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ = 1$.

Ответ: 1.

4.023. Доказать тождество $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$.

Решение.

Преобразуем левую часть данного равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{(\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha)(\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin(\beta - \alpha) \sin(\beta + \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{\frac{1}{2}(2\cos^2 \alpha - 1 - 2\cos^2 \beta + 1)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}. \end{aligned}$$

QED.

4.024. Упростить выражение $A = \frac{\sin(2\pi + \frac{\alpha}{4})\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8} - \cos(2\pi + \frac{\alpha}{4})}{\cos(\frac{\alpha}{4} - 3\pi)\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8} + \cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})}$.

Решение.

Используя свойства периодичности, четности, нечетности тригонометрических функций и формулы приведения, получаем:

$$\sin(2\pi + \frac{\alpha}{4}) = \sin \frac{\alpha}{4}, \quad \cos(2\pi + \frac{\alpha}{4}) = \cos \frac{\alpha}{4}, \quad \cos(\frac{\alpha}{4} - 3\pi) = -\cos \frac{\alpha}{4}, \quad \cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}) = -\sin \frac{\alpha}{4}.$$

Тогда

$$A = \frac{\sin \frac{\alpha}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8} - \cos \frac{\alpha}{4}}{-\cos \frac{\alpha}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8} - \sin \frac{\alpha}{4}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{8}}{\sin \frac{\alpha}{8}} - \cos \frac{\alpha}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{8}}{\sin \frac{\alpha}{8}} - \sin \frac{\alpha}{4}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} - \cos \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{8}}{\cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} + \sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{8}} = \frac{\sin(\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{8})}{\cos(\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{8})} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8}.$$

Ответ: $-\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8}$.

4.025. Доказать тождество $\sin^2(\frac{15}{8}\pi - 2\alpha) - \cos^2(\frac{17}{8}\pi - 2\alpha) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

Решение.

Используя формулы понижения степени $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ и $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$, преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \sin^2(\frac{15}{8}\pi - 2\alpha) - \cos^2(\frac{17}{8}\pi - 2\alpha) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{15\pi}{4} - 4\alpha)) - \\ &- \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{17\pi}{4} - 4\alpha)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{16\pi - \pi}{4} - 4\alpha)) - \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{16\pi + \pi}{4} - 4\alpha)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi - (\frac{\pi}{4} + 4\alpha)) - \\ &- \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi + (\frac{\pi}{4} - 4\alpha)) = -\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4} + 4\alpha) - \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4} - 4\alpha) = -\frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + 4\alpha) + \cos(\frac{\pi}{4} - 4\alpha)) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2\cos \frac{\pi}{4} \cos 4\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4\alpha = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили: $-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}} = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

QED.

4.026. Доказать тождество $8\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1$.

Решение.

Умножим и разделим левую часть равенства на $\cos 10^\circ$:

$$\begin{aligned} 8 \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (8 \cos 10^\circ \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ) = \frac{1}{\cos 10^\circ} (4 \sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ) = \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (4 \sin 20^\circ \sin 50^\circ \cos 20^\circ) = \frac{1}{\cos 10^\circ} (2 \sin 40^\circ \sin 50^\circ) = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $1 = 1$.

QED.

4.027. Доказать тождество $\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.

Решение.

Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} = \frac{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + 2 \sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

QED.

4.028. Преобразовать в произведение выражение $A = 2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1$.

Решение.

Заменив $2 \cos^2 2\alpha$ на $1 + \cos 4\alpha$, получим:

$$A = 2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1 = 1 + \cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1 = \cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha.$$

Далее заменим $\sqrt{3}$ на $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ $\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}}$.

$$\text{Тогда } A = \cos 4\alpha + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \sin 4\alpha = \frac{\cos 4\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin 4\alpha \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\cos(4\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}} = 2 \cos(4\alpha - \frac{\pi}{3}).$$

Ответ: $2 \cos(4\alpha - \frac{\pi}{3})$.

4.029. Доказать тождество $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) = \frac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha}$.

Решение.

Пусть $A = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}$. Применяя к выражению $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$ формулу (4.21), имеем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)} = \frac{1 + \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}. \text{ Следовательно, } A = \frac{1}{\frac{1 + \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}} = \frac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha}. \text{ Таким образом, } \frac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha} = \frac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha}.$$

QED.

4.030. Найти $1 + 5\sin\alpha - 3\cos^{-1}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$.

Решение.

Зная $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$, находим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$. Тогда, подставив значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$ в формулы (4.22) и (4.23), получим:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2(-2)}{1 + (-2)^2} = -\frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - (-2)^2}{1 + (-2)^2} = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{Следовательно, } 1 + 5\sin\alpha - 3\cos^{-1}\alpha = 1 + 5\left(-\frac{4}{5}\right) - 3\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1} = 2.$$

Ответ: 2.

4.031. Упростить выражение $(\cos\alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin 2\beta)^2$.

Решение.

$$\begin{aligned} (\cos\alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin 2\beta)^2 &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos 2\beta + \cos^2 2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin 2\beta + \sin^2 2\beta = \\ &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta) - 2(\cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta) = 2 - 2\cos(\alpha + 2\beta) = \\ &= 2 - 2\cos\left(2\frac{\alpha + 2\beta}{2}\right) = 2 - 2\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha + 2\beta}{2}\right) = 4\sin^2\frac{\alpha + 2\beta}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 4\sin^2\frac{\alpha + 2\beta}{2}.$$

4.032. Преобразовать в произведение: а) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$; б) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$.

Решение.

а) Заменяя $1 + \cos\alpha$ на $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\alpha$ на $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Тогда $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$

Преобразовав сумму $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$ в произведение по формуле (4.31), окончательно получим

$$1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

б) Применяя формулы (4.19) и (4.20), найдем

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2} = -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = -\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta).$$

Ответ: а) $2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$; б) $-\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)$.

4.033. Упростить выражение $\frac{\sin x\alpha - \sin y\alpha}{\cos y\alpha - \cos x\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\sin x\alpha - \sin y\alpha}{\cos y\alpha - \cos x\alpha} = -\frac{\sin y\alpha - \sin x\alpha}{\cos y\alpha - \cos x\alpha} = -\frac{2 \cos \frac{y+x}{2} \alpha \sin \frac{y-x}{2} \alpha}{-2 \sin \frac{y+x}{2} \alpha \sin \frac{y-x}{2} \alpha} = \frac{\cos \frac{x+y}{2} \alpha}{\sin \frac{x+y}{2} \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{x+y}{2} \alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg} \frac{x+y}{2} \alpha$.

4.034. Доказать тождество $\frac{\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2 \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$.

Решение.

Упростим левую часть равенства, используя формулу (4.12):

$$\frac{\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2 \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \frac{(\sin \alpha + \sin 5\alpha) + 2 \sin 3\alpha}{(\sin 3\alpha + \sin 7\alpha) + 2 \sin 5\alpha} = \frac{2 \sin 3\alpha \cos(-2\alpha) + 2 \sin 3\alpha}{2 \sin 5\alpha \cos(-2\alpha) + 2 \sin 5\alpha} = \frac{2 \sin 3\alpha (\cos 2\alpha + 1)}{2 \sin 5\alpha (\cos 2\alpha + 1)} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}.$$

Таким образом, получили $\frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$.

QED.

4.035. Упростить выражение $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha.$$

Ответ: $-\cos 2\alpha$.

4.036. Упростить выражение $A = 2 \cdot \frac{\sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha - \sin \alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha}$.

Решение.

Так как $2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$, то преобразуем числитель: $\sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha - 1 = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

В знаменателе имеем:

$$\begin{aligned}\cos \alpha - \sin \alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha &= (\cos \alpha - \cos 3\alpha) + (\sin 3\alpha - \sin \alpha) = -2 \cdot \sin \frac{\alpha+3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha-3\alpha}{2} + 2 \cdot \sin \frac{3\alpha-\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha+\alpha}{2} = \\ &= 2 \sin 2\alpha \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha).\end{aligned}$$

Таким образом, $A = 2 \cdot \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Ответ: $\frac{1}{\sin \alpha}$.

4.037. Упростить выражение $\frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 (\alpha - 180^\circ)}{\cos^3 (\alpha - 720^\circ)} + \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha + \sin^2 (\alpha + 180^\circ)}{\cos \alpha (4 \sin \alpha + 1)}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 (\alpha - 180^\circ)}{\cos^3 (\alpha - 720^\circ)} + \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha + \sin^2 (\alpha + 180^\circ)}{\cos \alpha (4 \sin \alpha + 1)} &= \frac{\cos^2 \alpha + 2(-\sin(180^\circ - \alpha))^2}{\cos^3 (\alpha - 720^\circ)} + \\ &+ \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha + (\sin(180^\circ + \alpha))^2}{\cos \alpha (4 \sin \alpha + 1)} = \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (4 \sin \alpha + 1)} = \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \\ &+ \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \frac{2}{\cos^3 \alpha}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{\cos^3 \alpha}$.

4.038. Доказать тождество $\cos^2(x+y) + \cos^2(x-y) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) \cos(4\pi + 2y) = \operatorname{tg} 1305^\circ$.

Решение.

Преобразуем: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = -\cos 2x$, $\cos(4\pi + 2y) = \cos 2y$, $\operatorname{tg} 1305^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 7 + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Таким образом, требуется доказать, что

$$\cos^2(x+y) + \cos^2(x-y) - \cos 2x \cos 2y = 1.$$

Применив к $\cos^2(x+y)$, $\cos^2(x-y)$ формулу (4.20), преобразуем левую часть последнего равенства:

$$\begin{aligned}\cos^2(x+y) + \cos^2(x-y) - \cos 2x \cos 2y &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2(x+y)) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2(x-y)) - \cos 2x \cos 2y = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2(x+y) + \cos 2(x-y)) - \cos 2x \cos 2y = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2x \cos 2y - \cos 2x \cos 2y = 1.\end{aligned}$$

Таким образом, получили $1 = 1$.

QED.

4.039. Преобразовать в произведение $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + 2$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + 2 &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 = \frac{2}{\sin 2\alpha} + 2 = \frac{2 + 2 \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \\ &= \frac{2(1 + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{2(\sin 90^\circ + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \cdot 2 \sin \frac{90^\circ + 2\alpha}{2} \cos \frac{90^\circ - 2\alpha}{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{4 \sin(45^\circ + \alpha) \cos(45^\circ - \alpha)}{\sin 2\alpha} = \\ &= \frac{4 \sin(45^\circ + \alpha) \cos(90^\circ - (45^\circ - \alpha))}{\sin 2\alpha} = \frac{4 \sin(45^\circ + \alpha) \sin(45^\circ + \alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{4 \sin^2(45^\circ + \alpha)}{\sin 2\alpha} = \\ &= 4 \sin^2(45^\circ + \alpha) \sin^{-1} 2\alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $4 \sin^2(45^\circ + \alpha) \sin^{-1} 2\alpha$.

4.040. Упростить выражение $A = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{4}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{4}}$, если $\alpha \in (6\pi, 8\pi)$.

Решение.

Преобразуем данное выражение:

$$A = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{4}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{4}} = \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{4}} + \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{4}} = \left| \cos \frac{\alpha}{4} \right| + \left| \sin \frac{\alpha}{4} \right|.$$

Так как по условию $6\pi < \alpha < 8\pi$, то $\frac{3\pi}{2} < \frac{\alpha}{4} < 2\pi$. Поскольку $\frac{\alpha}{4}$ принадлежит IV координатной четверти, то $\cos \frac{\alpha}{4} > 0$ и

$$\sin \frac{\alpha}{4} < 0, \text{ следовательно, } \left| \cos \frac{\alpha}{4} \right| = \cos \frac{\alpha}{4}, \left| \sin \frac{\alpha}{4} \right| = -\sin \frac{\alpha}{4}.$$

$$\text{Таким образом, } A = \cos \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{4}.$$

Ответ: $\cos \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{4}$.

4.041. Преобразовать в произведение $3 \sin^2(\alpha - \frac{3\pi}{2}) - \cos^2(\alpha + \frac{3\pi}{2})$.

Решение.

$$\begin{aligned} 3 \sin^2(\alpha - \frac{3\pi}{2}) - \cos^2(\alpha + \frac{3\pi}{2}) &= 3(-\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha))^2 - (\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha))^2 = 3(\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha))^2 - \\ &- (\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha))^2 = 3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 4 \left(\frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \times \\ &\times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{6} \sin \alpha \right) \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{6} \sin \alpha \right) = 4 \cos(\frac{\pi}{6} + \alpha) \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha). \end{aligned}$$

Ответ: $4 \cos(\frac{\pi}{6} + \alpha) \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha)$.

4.042. Вычислить $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Решение.

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{4 \left(\frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ \right)}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{4(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{4 \sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = 4.$$

Ответ: 4.

4.043. Преобразовать в произведение $\sin 10x \sin 8x + \sin 8x \sin 6x - \sin 4x \sin 2x$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin 10x \sin 8x + \sin 8x \sin 6x - \sin 4x \sin 2x &= \sin 8x (\sin 10x + \sin 6x) - \sin 4x \sin 2x = 2 \sin 8x \sin 8x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x = 2 \sin^2 8x \cos 2x - \\ &- \sin 4x \sin 2x = 2 \sin^2 8x \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 2x \sin 2x = 2 \cos 2x (\sin^2 8x - \sin^2 2x) = 2 \cos 2x (\sin 8x - \sin 2x)(\sin 8x + \sin 2x) = \\ &= 2 \cos 2x \cdot 2 \cos 5x \sin 3x \cdot 2 \sin 5x \cos 3x = 2 \cos 2x \sin 6x \sin 10x. \end{aligned}$$

Ответ: $2 \cos 2x \sin 6x \sin 10x$.

4.044. Доказать, что если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin \beta = -\frac{\sqrt{21}}{14}$ ($\alpha, \beta \in (0; 90^\circ)$), то $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

Вычислим $\cos(\alpha + \beta)$ по формуле (4.5). Для этого сначала найдем значения $\cos \alpha$ и $\cos \beta$: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{14}. \text{ Тогда } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{14} - \frac{\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{1}{2}.$$

По условию $\alpha, \beta \in (0; 90^\circ)$, значит, $\alpha + \beta \in (0; 180^\circ)$. Из равенства $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ следует, что промежутку $(0; 180^\circ)$ принадлежит единственное значение $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$. QED.

4.045. Преобразовать в произведение $\sqrt{\lg 2\alpha + \sin 2\alpha} - \sqrt{\lg 2\alpha - \sin 2\alpha}$, $0 < 2\alpha < 90^\circ$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{\lg 2\alpha + \sin 2\alpha} - \sqrt{\lg 2\alpha - \sin 2\alpha} &= \sqrt{\lg 2\alpha(1 + \cos 2\alpha)} - \sqrt{\lg 2\alpha(1 - \cos 2\alpha)} = \sqrt{\lg 2\alpha} (\\ &= \sqrt{\lg 2\alpha} (\sqrt{2} \cos \alpha - \sqrt{2} \sin \alpha) = \sqrt{2} \lg 2\alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) = \sqrt{2} \lg 2\alpha (\cos \alpha - \cos(90^\circ - \alpha)) = \sqrt{2} \lg 2\alpha \times \\ &\times \left(-2 \sin \frac{\alpha + 90^\circ - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha - 90^\circ + \alpha}{2} \right) = -2\sqrt{2} \lg 2\alpha \sin 45^\circ \sin(\alpha - 45^\circ) = 2\sqrt{2} \lg 2\alpha \sin(45^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{2} \lg 2\alpha \sin(45^\circ - \alpha)$.

4.046. Вычислить $\lg \lg 1^\circ + \lg \lg 2^\circ + \dots + \lg \lg 89^\circ$.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} \lg \lg 1^\circ + \lg \lg 2^\circ + \dots + \lg \lg 89^\circ &= \lg(\lg 1^\circ \lg 2^\circ \dots \lg 89^\circ) = \lg((\lg 1^\circ \lg 89^\circ)(\lg 2^\circ \lg 88^\circ) \dots (\lg 44^\circ \lg 46^\circ)(\lg 45^\circ)) = \\ &= \lg \left(\left(\lg 1^\circ \cdot \frac{1}{\lg 1^\circ} \right) \left(\lg 2^\circ \cdot \frac{1}{\lg 2^\circ} \right) \dots \left(\lg 44^\circ \cdot \frac{1}{\lg 44^\circ} \right) (\lg 45^\circ) \right) = \lg 1 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

4.047. Доказать, что если $\lg \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

Вычислим $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}2\beta} = \frac{\frac{1}{7} + \operatorname{tg}2\beta}{1 - \frac{1}{7}\operatorname{tg}2\beta}$. Далее, $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{3}$, поэтому

$$\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}. \text{ Таким образом, } \operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1.$$

По условию, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, значит, $0 < 2\beta < \pi$. Но $\operatorname{tg}2\beta = \frac{3}{4} > 0$, следовательно, $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$, а поэтому

$0 < \alpha + 2\beta < \pi$. В интервале $(0; \pi)$ функция $\operatorname{tg}x$ принимает значение 1 только в точке $\frac{\pi}{4}$. Значит, $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$. QED.

4.048. Преобразовать в произведение $1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha$.

Решение.

$$\begin{aligned} 1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha &= 1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha - (\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(1 - \cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{(\cos 2\alpha - \cos(90^\circ - 2\alpha))(\cos 360^\circ - \cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{-2 \sin 45^\circ \sin(2\alpha - 45^\circ)}{\cos 2\alpha} \times \\ &\times (-2 \sin(180^\circ + \alpha) \sin(180^\circ - \alpha)) = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\alpha - 45^\circ)(-2 \sin^2 \alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sqrt{2} \sin^2 \alpha \sin(2\alpha - 45^\circ)}{\cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2} \sin^2 \alpha \sin(2\alpha - 45^\circ)}{\cos 2\alpha}$.

4.049. Упростить выражение $\frac{1}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} (\sin^2 \alpha - \cos^2 3\alpha)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} (\sin^2 \alpha - \cos^2 3\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} (\sin \alpha - \cos 3\alpha)(\sin \alpha + \cos 3\alpha) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} (\cos(90^\circ - \alpha) + \cos 3\alpha)(\cos(90^\circ - \alpha) - \cos 3\alpha) = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} \left(2 \cos \frac{90^\circ + 2\alpha}{2} \cos \frac{90^\circ - 4\alpha}{2} 2 \sin \frac{90^\circ + 2\alpha}{2} \sin \frac{90^\circ - 4\alpha}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} (\sin(90^\circ + 2\alpha) \sin(90^\circ - 4\alpha)) = -\frac{\cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{3}}$.

4.050. Доказать справедливость равенства $1 - 2 \sin 50^\circ = \frac{1}{2 \cos 160^\circ}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 1 - 2 \sin 50^\circ &= \frac{(1 - 2 \sin 50^\circ) 2 \cos 160^\circ}{2 \cos 160^\circ} = \frac{2 \cos 160^\circ - 4 \sin 50^\circ \cos 160^\circ}{2 \cos 160^\circ} = \frac{2 \cos 160^\circ - 2(\sin(-110^\circ) + \sin 210^\circ)}{2 \cos 160^\circ} \\
 &= \frac{2 \cos 160^\circ + 2 \sin 110^\circ - 2 \sin 210^\circ}{2 \cos 160^\circ} = \frac{2 \cos(180^\circ - 20^\circ) + 2 \sin(90^\circ + 20^\circ) - 2 \sin(180^\circ + 30^\circ)}{2 \cos 160^\circ} = \\
 &= \frac{-2 \cos 20^\circ + 2 \cos 20^\circ + 2 \sin 30^\circ}{2 \cos 160^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cos 160^\circ} = \frac{1}{2 \cos 160^\circ}.
 \end{aligned}$$

QED.

4.051. Тангенсы трех острых углов равны соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$. Доказать, что сумма этих углов равна 45° .

Решение.

Пусть α, β, γ — данные острые углы. Так как тангенсы этих углов равны соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$, меньше $\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$, то каждый из углов α, β, γ меньше 30° ; следовательно, $0 < \alpha + \beta + \gamma < 90^\circ$. Доказав, что $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1$, мы тем самым докажем, что $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$.

Вычислим $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$, дважды применив формулу (4.10):

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \tan((\alpha + \beta) + \gamma) = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \gamma} = \frac{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} + \tan \gamma}{1 - \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \tan \gamma} = \frac{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{8}} = 1.
 \end{aligned}$$

Получили $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1$, значит, $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$.

QED.

4.052. Вычислить $\operatorname{ctg} \frac{13}{12} \pi - \operatorname{ctg} \frac{5}{12} \pi$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg} \frac{13}{12} \pi - \operatorname{ctg} \frac{5}{12} \pi &= \operatorname{ctg} \frac{12+1}{12} \pi - \operatorname{ctg} \frac{5}{12} \pi = \operatorname{ctg}(\pi + \frac{\pi}{12}) - \operatorname{ctg} \frac{5}{12} \pi = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} - \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12} = \\
 &= \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} - \frac{\cos \frac{5\pi}{12}}{\sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{12}}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{4\pi}{12} - \cos \frac{6\pi}{12} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - 0} = 2\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

4.053. Доказать справедливость равенства $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$.

Решение.

Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned}
 (\sin 47^\circ + \sin 61^\circ) - (\sin 11^\circ + \sin 25^\circ) &= 2 \sin 54^\circ \cos 7^\circ - 2 \sin 18^\circ \cos 7^\circ = 2 \cos 7^\circ (\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = \\
 &= 2 \cos 7^\circ \cdot 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = 2 \cos 7^\circ \frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = 2 \cos 7^\circ \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ \frac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ.
 \end{aligned}$$

QED.

4.054. Вычислить $\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4} + x) - \operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4} - x)$, если $\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{2} + 2x) = \frac{10}{11}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4} + x) - \operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4} - x) &= \operatorname{tg}(\frac{4\pi + \pi}{4} + x) - \operatorname{tg}(\frac{4\pi + \pi}{4} - x) = \operatorname{tg}(\pi + (x + \frac{\pi}{4})) - \operatorname{tg}(\pi - (x - \frac{\pi}{4})) = \\
 &= \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sin 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{2 \sin 2x}{\cos \frac{\pi}{2} + \cos 2x} = \frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} 2x}.
 \end{aligned}$$

Далее, из условия $\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{2} + 2x) = \frac{10}{11}$ паходим:

$$\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{2} + 2x) = \operatorname{tg}(\frac{6\pi + \pi}{2} + 2x) = \operatorname{tg}(3\pi + (\frac{\pi}{2} + 2x)) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + 2x) = -\operatorname{ctg} 2x.$$

Поэтому $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{10}{11}$. Таким образом, $\frac{2}{\operatorname{ctg} 2x} = \frac{2}{-\frac{10}{11}} = -\frac{11}{5}$.

Ответ: $-\frac{11}{5}$.

4.055. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что $3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 10 \operatorname{tg} \alpha + 3 = 0$ и $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$.

Решение.

Уравнение $3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 10 \operatorname{tg} \alpha + 3 = 0$ является квадратным относительно $\operatorname{tg} \alpha$. Решая его, находим $\operatorname{tg} \alpha = 3$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$. Так как на интервале $(\pi; \frac{5\pi}{4})$ тангенс принимает значения из интервала $(0; 1)$, то из двух найденных значений подходит $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Далее, используя формулу $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, вычислим $\sin 2\alpha$:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

4.056. Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{7}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найти $\alpha + \beta$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta &= \frac{1}{7} + \frac{3}{4} = \frac{25}{28} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{25}{28} \Leftrightarrow \frac{\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{25}{28}. \text{ Так как } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{7}, \text{ то } \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{49} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} &= \frac{1}{49} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{49}{50} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}} \left(\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \right). \text{ Аналогично из } \operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4} \text{ находим } \sin \beta = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения, имеем: $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}}} = \frac{25}{28} \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; значит $\alpha + \beta = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Учитывая

ограничения на α и β , окончательно получаем $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

4.057. Доказать тождество $\frac{\cos^2 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Решение.

Преобразуем левую часть тождества:

$$\frac{\cos^2 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos^2 2\alpha}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{\cos^2 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha.$$

QED.

4.058. Показать, что выражение $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$ неотрицательно в области определения.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} &= \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \left[\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right] = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)}{\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right)} = \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^2} = \frac{8 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^2} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{8} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

т. е. $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} \geq 0$.

QED.

4.059. Найти $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $5 + 4\cos 2\alpha = 3\sin 2\alpha$.

Решение.

Перенесем все члены равенства в левую часть и, воспользовавшись формулами (4.22), (4.23), получим

$$5 + 4 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 3 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha - 6 \operatorname{tg} \alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 3. \text{ Из формулы } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ получаем } 3 = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ откуда}$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 3 = 0, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Ответ: $\frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}$.

4.060. Величины x, y, z составляют арифметическую прогрессию. Доказать, что $\frac{\sin x - \sin z}{\cos z - \cos x} = \operatorname{ctg} y$.

Решение.

По свойству членов арифметической прогрессии $y = \frac{x+z}{2}$. Тогда $\frac{\sin x - \sin z}{\cos z - \cos x} = \frac{2 \cos \frac{x+z}{2} \sin \frac{x-z}{2}}{2 \sin \frac{x+z}{2} \sin \frac{x-z}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{x+z}{2} = \operatorname{ctg} y$.

QED.

4.061. Доказать тождество $4\sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x) = \sin 3x$.

Решение.

Имеем:

$$4 \sin x \frac{\cos(60^\circ - x - 60^\circ - x) - \cos(60^\circ - x + 60^\circ + x)}{2} = 2 \sin x (\cos(-2x) - \cos 120^\circ) = 2 \sin x \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \right) =$$

$$2 \sin x \cos 2x + \sin x = 2 \frac{\sin(x - 2x) + \sin(x + 2x)}{2} + \sin x = -\sin x + \sin 3x + \sin x = \sin 3x.$$

Таким образом, получили $\sin 3x = \sin 3x$.

QED.

4.062. Доказать тождество $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)(1 - \cos(270^\circ - 2\alpha)) \cos^{-1} 2\alpha - 2 \cos 4\alpha}{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)(1 + \sin(720^\circ + 2\alpha)) \cos^{-1} 2\alpha + 2 \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}(30^\circ + 2\alpha) \operatorname{tg}(2\alpha - 30^\circ)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
& \frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)(1 - \cos(270^\circ - 2\alpha))\cos^{-1}2\alpha - 2\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)(1 + \sin(720^\circ + 2\alpha))\cos^{-1}2\alpha + 2\cos 4\alpha} = \frac{\frac{\sin(90^\circ - 2\alpha)}{1 + \cos(90^\circ - 2\alpha)} \cdot (1 + \sin 2\alpha) \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha} - 2\cos 4\alpha}{\frac{\sin(90^\circ - 2\alpha)}{1 + \cos(90^\circ - 2\alpha)} \cdot (1 + \sin 2\alpha) \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha} + 2\cos 4\alpha} = \\
& = \frac{\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} \cdot (1 + \sin 2\alpha) \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha} - 2\cos 4\alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} \cdot (1 + \sin 2\alpha) \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha} + 2\cos 4\alpha} = \frac{1 - 2\cos 4\alpha}{1 + 2\cos 4\alpha} = \frac{2(\frac{1}{2} - \cos 4\alpha)}{2(\frac{1}{2} + \cos 4\alpha)} = \frac{\cos 60^\circ - \cos 4\alpha}{\cos 60^\circ + \cos 4\alpha} = \\
& = \frac{\frac{1}{2}(\cos(30^\circ + 2\alpha - 2\alpha + 30^\circ) - \cos(30^\circ + 2\alpha + 2\alpha - 30^\circ))}{\frac{1}{2}(\cos(30^\circ + 2\alpha - 2\alpha + 30^\circ) + \cos(30^\circ + 2\alpha + 2\alpha - 30^\circ))} = \left[\frac{\frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))}{\frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))} = \sin x \sin y; \right] = \\
& = \frac{\sin(30^\circ + 2\alpha)\sin(2\alpha - 30^\circ)}{\cos(30^\circ + 2\alpha)\cos(2\alpha - 30^\circ)} = \operatorname{tg}(30^\circ + 2\alpha)\operatorname{tg}(2\alpha - 30^\circ).
\end{aligned}$$

QED.

4.063. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha = 1$.

Решение.

Преобразуем левую часть равенства, учитывая, что по условию $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \\
& = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \\
& = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, получили $1 = 1$.

QED.

4.064. Доказать тождество $\frac{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha$.

Решение.

$$\begin{aligned}
& \frac{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2\cos^2 2\alpha - 1}{3 - 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2\cos^2 2\alpha - 1} = \frac{3 + 8\cos^2 \alpha - 4 + 2(\cos 2\alpha)^2 - 1}{3 - 8\cos^2 \alpha + 4 + 2(\cos 2\alpha)^2 - 1} = \\
& = \frac{8\cos^2 \alpha + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 2}{-8\cos^2 \alpha + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 + 6} = \frac{8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 2 - 2}{-8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 2 + 6} = \frac{8\cos^4 \alpha}{8\cos^4 \alpha - 16\cos^2 \alpha + 8} = \\
& = \frac{\cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha - 2\cos^2 \alpha + 1} = \frac{\cos^4 \alpha}{(\cos^2 \alpha - 1)^2} = \frac{\cos^4 \alpha}{(\sin^2 \alpha)^2} = \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^4 \alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha.
\end{aligned}$$

QED.

4.065. Вычислить $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta)$, если $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

Преобразуем данное выражение:

$$(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta) = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha \right) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \beta \right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \beta)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \beta} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) \sin(\frac{\pi}{4} + \beta)}{\cos^2 \frac{\pi}{4} \cos \alpha \cos \beta}.$$

Далее, по условию $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$, $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$. Тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

$$\text{Следовательно, } (1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta) = \frac{\cos \beta \cos \alpha}{\cos^2 \frac{\pi}{4} \cos \alpha \cos \beta} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2.$$

Ответ: 2.

4.066. Доказать тождество $\frac{1 + \cos(\alpha - 2\pi) + \cos(2\alpha + 2\pi) - \cos(3\alpha - \pi)}{\cos(2\pi - \alpha) + 2 \cos^2(\alpha + \pi) - 1} = 2 \cos \alpha$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos(\alpha - 2\pi) + \cos(2\alpha + 2\pi) - \cos(3\alpha - \pi)}{\cos(2\pi - \alpha) + 2 \cos^2(\alpha + \pi) - 1} &= \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \\ \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{bmatrix}}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{1 + \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 + 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = \frac{4 \cos^3 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = \\ &= \frac{2 \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1)}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = \cos \alpha. \end{aligned}$$

QED.

4.067. Зная, что A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника, доказать равенство $\sin A + \sin B + \sin C =$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Решение.

Так как $A + B + C = 180^\circ$, то $C = 180^\circ - (A + B)$ и $\sin C = \sin(180^\circ - (A + B)) = \sin(A + B)$. Преобразуем левую часть

$$\begin{aligned} \text{исходного равенства: } \sin A + \sin B + \sin C &= (\sin A + \sin B) + \sin(A + B) = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$, то $\sin \frac{A+B}{2} = \sin(90^\circ - \frac{C}{2}) = \cos \frac{C}{2}$; следовательно,

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

QED.

4.068. Доказать тождество $4\cos\alpha\cos x\cos(\alpha-x) - 2\cos^2(\alpha-x) - \cos 2x = \cos 2\alpha$.

Решение.

$$4\cos\alpha\cos x\cos(\alpha-x) - 2\cos^2(\alpha-x) - \cos 2x = 2\cos(\alpha-x)(2\cos\alpha\cos x - \cos(\alpha-x)) - \cos 2x = 2\cos(\alpha-x)(\cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x) - \cos 2x = 2\cos(\alpha-x)\cos(\alpha+x) - \cos 2x = \cos 2x + \cos 2\alpha - \cos 2x = \cos 2\alpha.$$

Таким образом, получили $\cos 2\alpha = \cos 2\alpha$.

QED.

4.069. Доказать неравенство $a\sin^2\alpha + \frac{b}{\sin^2\alpha} \geq 2\sqrt{ab}$, если $a > 0$, $b > 0$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение.

Воспользуемся неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных

чисел x и y : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Допустим в этом неравенстве $a\sin^2\alpha = x$, $\frac{b}{\sin^2\alpha} = y$. Получим: $\frac{a\sin^2\alpha + \frac{b}{\sin^2\alpha}}{2} =$

$$= \sqrt{a\sin^2\alpha \cdot \frac{b}{\sin^2\alpha}} \Leftrightarrow a\sin^2\alpha + \frac{b}{\sin^2\alpha} \geq 2\sqrt{ab}.$$

QED.

4.070. Доказать тождество $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha &= (\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha) - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha \left(\frac{1}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \\ &= \sin \alpha \frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha \cos 2\alpha}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \left(\cos \alpha - \frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos 5\alpha) \right)}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 5\alpha \right)}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha (\cos \alpha - \cos 5\alpha)}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha (-2 \sin 3\alpha \sin(-2\alpha))}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha} = \frac{\sin 3\alpha \sin 2\alpha \sin \alpha}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

QED.

4.071. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Решение.

Преобразуем левую часть данного неравенства. Получим:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C.$$

Так как $A + B + C = 180^\circ$, то $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$ и, следовательно, $\cos \frac{A+B}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{C}{2}$. Далее, так как

$0 \leq \cos \frac{A-B}{2} \leq 1$, то $\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq \sin \frac{C}{2}$. Таким образом,

$$2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C \leq 2 \sin \frac{C}{2} + \cos C.$$

Рассмотрим правую часть последнего неравенства: $2 \sin \frac{C}{2} + \cos C = 2 \sin \frac{C}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$. Пусть $x = \sin \frac{C}{2}$. Тогда $2 \sin \frac{C}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = -2x^2 + 2x + 1$.

Если теперь докажем, что $-2x^2 + 2x + 1 \leq \frac{3}{2}$, то тем самым докажем и исходное неравенство. Составим разность $(-2x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{2})$ и выясним ее знак. Получаем

$$(-2x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{2}) = -2x^2 + 2x - \frac{1}{2} = -2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

Таким образом, $-2x^2 + 2x + 1 \leq \frac{3}{2}$, т. е. $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

QED.

4.072. Доказать тождество $\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha = \cos 2\alpha \cdot \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha &= (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \times \\ &\times \left((\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right) = \cos 2\alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = \cos 2\alpha \left(1 - \frac{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2} \right) = \\ &= \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \right) = \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} \right) = \cos 2\alpha \cdot \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}. \end{aligned}$$

QED.

4.073. Доказать неравенство $\sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha < \frac{3}{4}$.

Решение.

Выполним преобразование левой части:

$$\sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha = (\sin \alpha \sin 2\alpha) \sin 3\alpha = \frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{2} \sin 3\alpha = \frac{2 \sin 3\alpha \cos \alpha - 2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha}{4} = \frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha - \sin 6\alpha}{4}.$$

Далее, так как $\sin 4\alpha \leq 1$, $\sin 2\alpha \leq 1$, $-\sin 6\alpha \leq 1$, то $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha - \sin 6\alpha \leq 3$, причем знак равенства имеет место только для тех значений α , которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \sin 4\alpha = 1; \\ \sin 2\alpha = 1; \\ \sin 6\alpha = -1. \end{cases}$$

Однако эта система не имеет решения. В самом деле, если $\sin 2\alpha = 1$, то $\cos 2\alpha = 0$, и поэтому $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 0$. Таким образом, $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha - \sin 6\alpha < 3$, а значит, $\frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha - \sin 6\alpha}{4} < \frac{3}{4}$, откуда и следует доказываемое неравенство.

QED.

4.074. Упростить выражение $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, если $90^\circ < \alpha < 135^\circ$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}} &= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}}} = \sqrt{\frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha \cos \alpha|. \end{aligned}$$

Так как $90^\circ < \alpha < 135^\circ$, то $|\sin \alpha \cos \alpha| = -\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

Ответ: $-\frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

4.075. Доказать, что $\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$, если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Так как в интервале $(0; \frac{\pi}{2})$ функция $y = \sin x$ возрастает, а функция $y = \cos x$ убывает, то $0 < \sin \alpha_1 < \sin \alpha_2 < \dots < \sin \alpha_n$ и $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2 > \dots > \cos \alpha_n > 0$. Значит, $n \sin \alpha_1 < \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n < n \sin \alpha_n$, $n \cos \alpha_1 > \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n > n \cos \alpha_n$, откуда

$$\frac{n \sin \alpha_1}{n \cos \alpha_1} < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} < \frac{n \sin \alpha_n}{n \cos \alpha_n},$$

т. е. верно данное неравенство.

QED.

4.076. Упростить выражение $\frac{2 \sin 2x \cos^2 x}{\cos^2 4x} + \frac{\sin 3x \cos x - 3 \sin x \cos x}{\cos^2 4x}$.

Решение.

Используя формулы $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

$1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$, преобразуем данное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin 2x \cos^2 x}{\cos^2 4x} + \frac{\sin 3x \cos x - 3 \sin x \cos x}{\cos^2 4x} &= \frac{\sin 2x(1 + \cos 2x)}{\cos^2 4x} + \frac{(3 \sin x - 4 \sin^3 x) \cos x - 3 \sin x \cos x}{\cos^2 4x} = \\ &= \frac{\sin 2x + \sin 2x \cos 2x + (3 - 4 \sin^2 x) \sin x \cos x - 3 \sin x \cos x}{\cos^2 4x} = \frac{\sin 2x + \sin 2x \cos 2x + \sin x \cos x (3 - 4 \sin^2 x - 3)}{\cos^2 4x} = \\ &= \frac{\sin 2x + \sin 2x \cos 2x - 4 \sin x \cos x \sin^2 x}{\cos^2 4x} = \frac{\sin 2x + \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin^2 x}{\cos^2 4x} = \frac{\sin 2x(1 + \cos 2x - 2 \sin^2 x)}{\cos^2 4x} = \\ &= \frac{\sin 2x(\cos 2x + (1 - 2 \sin^2 x))}{\cos^2 4x} = \frac{\sin 2x(\cos 2x + \cos 2x)}{\cos^2 4x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\cos^2 4x} = \sin 4x \cos^{-2} 4x. \end{aligned}$$

Ответ: $\sin 4x \cos^{-2} 4x$.

4.077. Доказать, что если A, B, C – углы треугольника, то $(\sin A + \sin B + \sin C)^2 \geq 9 \sin A \sin B \sin C$.

Решение.

Вспользуемся неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое трех положительных

чисел: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Пусть в этом неравенстве $\sin A = a, \sin B = b, \sin C = c$, тогда $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \geq \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}$

и далее $(\sin A + \sin B + \sin C)^2 \geq 9 \sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^2}$, но $\sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^2} > \sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^3}$. Таким образом,

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 \geq 9 \sin A \sin B \sin C.$$

QED.

4.078. Упростить выражение $(1 - \operatorname{ctg}^2(270^\circ - \alpha)) \sin^2(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(225^\circ - \alpha) + \cos(2\alpha - 90^\circ)$.

Решение.

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{ctg}^2(270^\circ - \alpha)) \sin^2(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(225^\circ - \alpha) + \cos(2\alpha - 90^\circ) &= (1 - (\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha))^2) (\sin(90^\circ + \alpha))^2 \times \\ &\times \operatorname{tg}(180^\circ + (45^\circ - \alpha)) + \cos(90^\circ - 2\alpha) = (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) \cos^2 \alpha \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha (1 - \cos(90^\circ - 2\alpha))}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} + \sin 2\alpha = \\ &= \frac{\cos 2\alpha (1 - \sin 2\alpha)}{\cos^2 \alpha} + \sin 2\alpha = 1 - \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

4.079. Доказать неравенство $\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \sin \alpha$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Выберем в качестве опорного неравенство $\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Преобразовав его, получим

$$\alpha \cos \frac{\alpha}{2} < 2 \sin \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} < 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} < \sin \alpha \Leftrightarrow \alpha (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) < \sin \alpha. \quad (1)$$

Вспользуемся еще одним опорным неравенством $\sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$.

Так как, по условию, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ и $\frac{\alpha}{2} > 0$, поэтому неравенство $\sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$ можно переписать в виде

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{4} \text{ и далее } 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} > 1 - \frac{\alpha^2}{4}, \text{ откуда } \alpha (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) > \alpha - \frac{\alpha^3}{4} \text{ или } \alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \alpha (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}). \quad (2)$$

Сопоставив неравенства (1) и (2), получим $\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \alpha (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) < \sin \alpha$, откуда $\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \sin \alpha$.

QED.

4.080. Преобразовать в произведение $\operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 3$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 3 &= \operatorname{tg}^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1) - 3(\operatorname{tg} \alpha - 1) = (\operatorname{tg} \alpha - 1) (\operatorname{tg}^2 \alpha - 3) = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 \right) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 3 \right) = \\
 &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha)(\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \\
 &= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right) \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right)}{\cos^3 \alpha} = \\
 &= \frac{4\sqrt{2}(\cos 45^\circ \sin \alpha - \sin 45^\circ \cos \alpha)(\cos 60^\circ \sin \alpha - \sin 60^\circ \cos \alpha)(\cos 60^\circ \sin \alpha + \sin 60^\circ \cos \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \\
 &= [\sin x \cos y \pm \cos x \sin y = \sin(x \pm y)] = \frac{4\sqrt{2}(\sin \alpha - 45^\circ) \sin(\alpha - 60^\circ) \sin(\alpha + 60^\circ)}{\cos^3 \alpha}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}(\sin \alpha - 45^\circ) \sin(\alpha - 60^\circ) \sin(\alpha + 60^\circ)}{\cos^3 \alpha}$.

4.081. Доказать неравенство $\operatorname{tg} \alpha - \alpha < \operatorname{tg} \beta - \beta$, если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Воспользуемся неравенством $\operatorname{tg} x > x$, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Пусть $x = \beta - \alpha$, тогда $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) > \beta - \alpha$. Если теперь докажем, что $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$, то тем самым будет доказано неравенство $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha > \beta - \alpha$, а следовательно, и исходное неравенство.

Итак, докажем неравенство $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$. Составим разность $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$ и преобразуем ее:

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \cdot (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha).$$

Полученное выражение положительно, так как $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \beta > 0$ и $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$. Таким образом, доказано неравенство $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$, а значит, и исходное неравенство. **QED.**

4.082. Упростить выражение $\frac{\sqrt{1+\sin \alpha} + \sqrt{1-\sin \alpha}}{\sqrt{1+\sin \alpha} - \sqrt{1-\sin \alpha}}$, если а) $0 < \alpha < 90^\circ$; б) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Решение.

Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{1+\sin \alpha} + \sqrt{1-\sin \alpha}}{\sqrt{1+\sin \alpha} - \sqrt{1-\sin \alpha}} &= \frac{(\sqrt{1+\sin \alpha} + \sqrt{1-\sin \alpha})(\sqrt{1+\sin \alpha} + \sqrt{1-\sin \alpha})}{(\sqrt{1+\sin \alpha} - \sqrt{1-\sin \alpha})(\sqrt{1+\sin \alpha} + \sqrt{1-\sin \alpha})} = \\
 &= \frac{(\sqrt{1+\sin \alpha} + \sqrt{1-\sin \alpha})^2}{(\sqrt{1+\sin \alpha})^2 - (\sqrt{1-\sin \alpha})^2} = \frac{1 + \sin \alpha + 2\sqrt{(1+\sin \alpha)(1-\sin \alpha)} + 1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha - 1 + \sin \alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{1 + \sqrt{\cos^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{1 + |\cos \alpha|}{\sin \alpha}.
 \end{aligned}$$

Отсюда, если: а) $0 < \alpha < 90^\circ$, то $\frac{1 + |\cos \alpha|}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

б) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то $\frac{1 + |\cos \alpha|}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: а) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; б) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

4.083. Доказать неравенство

$$\cos \alpha + 3 \cos 3\alpha + 6 \cos 6\alpha \geq -7 \frac{3}{16}. \quad (1)$$

Решение.

Предположим противное, т. е. для некоторого α выполняется неравенство

$$\cos \alpha + 3 \cos 3\alpha + 6 \cos 6\alpha < -7 \frac{3}{16}. \quad (2)$$

Преобразуем неравенство (2):

$$\begin{aligned} \cos \alpha + 3 \cos 3\alpha + 6 \cos 6\alpha + 6 < -1 \frac{3}{16} &\Leftrightarrow \cos \alpha + 3 \cos 3\alpha + 12 \cos^2 3\alpha < -1 \frac{3}{16} \Leftrightarrow \cos \alpha + 3(\cos 3\alpha + 4 \cos^2 3\alpha) < -1 \frac{3}{16} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 \left(4 \cos^2 3\alpha + \cos \alpha + \frac{1}{16} \right) + \cos \alpha - \frac{3}{16} < -1 \frac{3}{16} \Leftrightarrow 3 \left(2 \cos 3\alpha + \frac{1}{4} \right)^2 + \cos \alpha < -1. \quad (3) \end{aligned}$$

Неравенство (3) ложно, так как $\left(2 \cos 3\alpha + \frac{1}{4} \right)^2 \geq 0$, а $\cos \alpha \geq -1$. Значит, наше предположение (2) неверно, т. е. верно неравенство (1). **QED.**

4.084. Доказать справедливость равенства: а) $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; б) $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Решение.

а) Так как $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$, то $\cos 2 \cdot 18^\circ = \sin 3 \cdot 18^\circ$. Отсюда получаем $1 - 2 \sin^2 18^\circ = 3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ \Leftrightarrow 4 \sin^3 18^\circ - 2 \sin^2 18^\circ - 3 \sin 18^\circ + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1) = 0 \Leftrightarrow 4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0$. Решая полученное уравнение как квадратное относительно $\sin 18^\circ$, получаем:

$$1) \quad \sin 18^\circ \neq \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0, \text{ так как } 18^\circ \in (0; 90^\circ) \text{ и } \sin 18^\circ > 0;$$

$$2) \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{ тогда } \cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{2\sqrt{5}+2}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$б) \quad \sin 36^\circ = \cos 54^\circ \Leftrightarrow 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ \Leftrightarrow 2 \sin 18^\circ = 4 \cos^2 18^\circ - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3 \Leftrightarrow 4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ = 1 \Leftrightarrow 4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(2 \sin 18^\circ + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Отсюда имеем:

$$1. \quad 2 \sin 18^\circ + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \sin 18^\circ \neq \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0;$$

$$2. \quad 2 \sin 18^\circ + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \quad \text{QED.}$$

4.085. Доказать неравенство

$$\cos 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ. \quad (1)$$

Решение.

Предположим, что неравенство (1) ложно, т. е. $\cos 36^\circ \leq \operatorname{tg} 36^\circ$. Тогда последовательно получаем: (2)

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ \leq \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} &\Leftrightarrow \cos^2 36^\circ \leq \sin 36^\circ \Leftrightarrow 1 + \cos 72^\circ \leq 2 \sin 36^\circ \Leftrightarrow 1 + \cos (90^\circ - 18^\circ) \leq 2 \sin (6^\circ + 30^\circ) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \sin 18^\circ \leq 2 \sin 6^\circ \cos 30^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 6^\circ \Leftrightarrow 1 + 2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ \leq \cos 6^\circ + 2 \sin 6^\circ \cos 30^\circ. \quad (2) \end{aligned}$$

Так как $1 > \cos 6^\circ$, $\sin 9^\circ > \sin 6^\circ$, $\cos 9^\circ > \cos 30^\circ$, то неравенство (2) ложно. Следовательно, верно неравенство (1).

QED.

4.086. Вычислить $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ и $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, если $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$, $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}$, $\frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

Решение.

По условию,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{21}{65}, \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{27}{65} \end{cases} &\Leftrightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{-\frac{21}{65}}{-\frac{27}{65}} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = \\ = \frac{49}{81} &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{49}{81} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} - 1 = \frac{49}{81} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{81}{130} \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \pm \frac{9}{\sqrt{130}}. \end{aligned}$$

$$\text{Далее } \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{81}{130} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 - \frac{81}{130} = \frac{49}{130} \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \pm \frac{7}{\sqrt{130}}.$$

Для того чтобы определить, какой четверти принадлежит угол $\frac{\alpha + \beta}{2}$, складываем два неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{4} &< \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2} \\ + \\ -\frac{\pi}{4} &< \frac{\beta}{2} < 0 \\ = \\ \pi &< \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, угол $\frac{\alpha + \beta}{2}$ принадлежит третьей четверти единичной окружности.

$$\text{Таким образом, } \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{7}{\sqrt{130}}, \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{9}{\sqrt{130}}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{7}{\sqrt{130}}, -\frac{9}{\sqrt{130}}.$$

4.087. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$. (1)

Решение.

Предположим, что неравенство (1) ложно, т. е. $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > \frac{1}{8}$ при некотором наборе значений A, B, C — углов

треугольника. Преобразуем предположенное неравенство:

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > \frac{1}{8} &\Leftrightarrow \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \sin \frac{C}{2} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{C}{2} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{A-B+C}{2} + \sin \frac{-A+B+C}{2} - \sin \frac{A+B+C}{2} + \sin \frac{A+B-C}{2} > \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как $A + B + C = 180^\circ$, то $A - B + C = 180^\circ - 2B$, $-A + B + C = 180^\circ - 2A$, $A + B - C = 180^\circ - 2C$, а потому

$$\sin \frac{A+C-B}{2} = \cos B, \quad \sin \frac{C-A+B}{2} = \cos A, \quad \sin \frac{A+B+C}{2} = 1, \quad \sin \frac{A+B-C}{2} = \cos C.$$

С учетом этого перепишем неравенство (2) следующим образом: $\cos B + \cos A - 1 + \cos C > \frac{1}{2}$ или $\cos B + \cos A + \cos C \geq \frac{3}{2}$.

А это противоречит неравенству, доказанному в задаче 4.071. Значит, наше предположение неверно, т. е. истинно неравенство (1). **QED.**

4.088. Вывести формулу $\cos n\alpha = 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha$, где n — действительное число, и с ее помощью представить $\cos 5\alpha$ в виде многочленов от $\cos\alpha$.

Решение.

Имеем: $\cos n\alpha = \cos((n-1) + 1)\alpha = \cos((n-1)\alpha + \alpha) = \cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha\sin\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha\sin\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - (\cos(n-1)\alpha\cos\alpha + \sin(n-1)\alpha\sin\alpha) = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos((n-1)\alpha - \alpha) = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$.

Далее $\cos 5\alpha = 2\cos\alpha\cos 4\alpha - \cos 3\alpha = 2\cos\alpha(2\cos\alpha\cos 3\alpha - \cos 2\alpha) - (2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha) = 2\cos\alpha(2\cos\alpha(2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha) - (2\cos^2\alpha - 1)) - 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) + \cos\alpha = 2\cos\alpha(2\cos\alpha(2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \cos\alpha) - 2\cos^2\alpha + 1) - 4\cos^3\alpha + 2\cos\alpha + \cos\alpha = 2\cos\alpha(2\cos\alpha(4\cos^3\alpha - 2\cos\alpha - \cos\alpha) - 2\cos^2\alpha + 1) - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha = 2\cos\alpha(8\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1) - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha = 16\cos^5\alpha - 8\cos^3\alpha - 8\cos^3\alpha + 2\cos\alpha - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$.

Ответ: $\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$.

4.089. Доказать неравенство $\operatorname{tg} n\alpha > n\operatorname{tg}\alpha$, (1)

если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

Решение.

Воспользуемся методом математической индукции.

1) Проверим выполнимость неравенства (1) при $n = 2$, т. е. убедимся, что $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$, (2)

где $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(2-1)} = \frac{\pi}{4}$.

Действительно, $\operatorname{tg} 2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} - 2\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$. При $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ имеем: $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $1 - \operatorname{tg}^2\alpha > 0$, а значит,

$2\operatorname{tg}\alpha \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} > 0$. Отсюда следует, что неравенство (2) выполняется.

2) Предположим, что неравенство (1) выполняется при $n = k$, т. е. $\operatorname{tg} k\alpha > k\operatorname{tg}\alpha$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(k-1)}$. Докажем, что тогда неравенство (1) выполняется и при $n = k + 1$, т. е. $\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\operatorname{tg}\alpha$, (3)

где $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(k+1-1)} = \frac{\pi}{4k}$.

В самом деле, $\operatorname{tg}(k+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} k\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg}\alpha} > \frac{k\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg}\alpha}$.

По условию, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4k}$, значит, $\operatorname{tg} k\alpha < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\operatorname{tg}\alpha < 1$. Но тогда $\frac{k\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg}\alpha} > (k+1)\operatorname{tg}\alpha$, и, следовательно, неравенство (3) выполняется.

По принципу математической индукции заключаем, что неравенство (1) верно для любых натуральных $n \geq 2$. QED.

4.090. Доказать тождество $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x) + \operatorname{ctg}(\frac{7\pi}{6} - x) + \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{6} - x) = 3\operatorname{tg} 3x$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x) + \operatorname{ctg}(\frac{7\pi}{6} - x) + \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{6} - x) &= \operatorname{tg} x + \frac{\cos(\frac{7\pi}{6} - x)}{\sin(\frac{7\pi}{6} - x)} + \frac{\cos(\frac{5\pi}{6} - x)}{\sin(\frac{5\pi}{6} - x)} = \operatorname{tg} x + \frac{\sin(2\pi - 2x)}{\sin(\frac{7\pi}{6} - x)\sin(\frac{5\pi}{6} - x)} = \\ &= \operatorname{tg} x - \frac{\sin 2x}{\sin(\frac{7\pi}{6} - x)\sin(\frac{5\pi}{6} - x)} = \operatorname{tg} x - \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos(2\pi - 2x)\right)} = \operatorname{tg} x - \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cos 2x\right)} = \operatorname{tg} x - \frac{4\sin 2x}{1 - 2\cos 2x} = \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{4 \cdot 2\sin x \cos x}{1 - 2(2\cos^2 x - 1)} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{8\sin x \cos x}{4\cos^2 x - 3} = \frac{\sin x(4\cos^2 x - 3 + 8\cos^2 x)}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \frac{\sin x(12\cos^2 x - 3)}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \\ &= \frac{3\sin x(4(1 - \sin^2 x) - 1)}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \frac{3\sin x(3 - 4\sin^2 x)}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \frac{3(3\sin x - 4\sin^3 x)}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \left[\frac{3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha}{4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha} = \sin 3\alpha \right] = \frac{3\sin 3x}{\cos 3x} = 3\operatorname{tg} 3x. \end{aligned}$$

QED.

4.091. Доказать, что если $\cos(\alpha + \beta) = 0$, то $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha$.

Решение.

Для доказательства умножим обе части равенства $\cos(\alpha + \beta) = 0$ на $2\sin \beta$ и применим формулу $\sin x \sin y =$

$$= \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)). \text{ Имеем:}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) = 0 &\Leftrightarrow 2\sin \beta \cos(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}(\sin(\beta - (\alpha + \beta)) + \sin(\beta + (\alpha + \beta))) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin(-\alpha) + \sin(\alpha + 2\beta) = 0 \Leftrightarrow -\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta) = 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha. \end{aligned}$$

QED.

4.092. Доказать тождество $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x$, где n — любое натуральное число или 0.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} - \\ &- 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \\ &= 2(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x) - 4\operatorname{tg} 4x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) - 4\operatorname{tg} 4x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \\ &= \frac{2(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}{\sin 2x \cos 2x} - 4\operatorname{tg} 4x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \frac{4\cos 4x}{\sin 4x} - 4\operatorname{tg} 4x - 8\operatorname{tg} 8x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \\ &= 4\operatorname{ctg} 4x - 4\operatorname{tg} 4x - 8\operatorname{tg} 8x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = 4(\operatorname{ctg} 4x - \operatorname{tg} 4x) - 8\operatorname{tg} 8x - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x. \end{aligned}$$

QED.

4.093. Доказать, что сумма $\sin^n \alpha + \cos^n \alpha$ тождественно равна 1 только при $n = 2$.

Решение.

Пусть $\sin^n \alpha + \cos^n \alpha = 1$ — тождество. Тогда при $\alpha = 45^\circ$ получаем $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$, откуда $2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$ и $(\sqrt{2})^n = 2$.

Эти равенства возможны лишь при $n = 2$, так как при $n > 2$ получим $(\sqrt{2})^n > 2$, а при $n < 2$ получаем $(\sqrt{2})^n < 2$.

Следовательно, данное равенство тождественно равно 1 лишь при $n = 2$.

QED.

4.094. Доказать, что $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

Решение.

В силу формулы $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$ левая часть исходного тождества равна $2 \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$. (1)

Умножив и разделив (1) на $2 \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10}$ и пользуясь формулой $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, получим $2 \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10} =$

$= \frac{\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5}}{2 \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10}}$. Но $\cos \frac{\pi}{10} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \right) = \sin \frac{3\pi}{5}$, а $\cos \frac{3\pi}{10} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} \right) = \sin \frac{\pi}{5}$. Следовательно, левая часть исходного

тождества равна $\frac{1}{2}$.

QED.

4.095. Доказать тождество $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$, где n — число слагаемых.

Решение.

Пусть $S_n = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n-1)x$. Тогда $2 \sin x \cdot S_n = 2 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos 3x + 2 \sin x \cos 5x + \dots + 2 \sin x \cos (2n-1)x =$

$= \sin 2x - \sin 2x + \sin 4x - \sin 4x + \sin 6x - \dots - \sin (2n-2)x + \sin 2nx = \sin 2nx$, т. е. $2 \sin x \cdot S_n = \sin 2nx$. Следовательно,

$$S_n = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

QED.

4.096. Найти $\frac{1 - \sin x}{\cos x}$, если $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = m$.

Решение.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin x}{\cos x} &= \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l} \text{разделим числитель и знаменатель} \\ \text{полученного выражения на } \sin^2 \frac{x}{2} \neq 0 \end{array} \right] = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1} = \frac{\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1 \right)^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 1} = \frac{m-1}{m+1}, \text{ если } m \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Отметим: $\frac{m-1}{m+1}$ при $m \neq \pm 1$.

4.097. Доказать, что при всех допустимых значениях x имеет место формула

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x.$$

Решение.

Из формулы $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ следует, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$, откуда $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. Полагая в последнем равенстве $\alpha = x, \beta = 2x$, получаем $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x$. QED.

4.098. Доказать тождество $\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx = \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x} + \frac{n}{2}$, где n — число слагаемых.

Решение.

Пусть $S_n = \cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx$. Тогда

$$S_n = \frac{1 + \cos x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \dots + \frac{1 + \cos 2nx}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 6x + \dots + \frac{1}{2} \cos 2nx =$$

n слагаемых

$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 2nx).$$

Отсюда $S_n - \frac{n}{2} = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 2nx) \Leftrightarrow 2 \left(S_n - \frac{n}{2} \right) = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 2nx$.

Далее $2 \left(S_n - \frac{n}{2} \right) \cdot 2 \sin x = 2 \sin x \cos 2x + 2 \sin x \cos 4x + 2 \sin x \cos 6x + \dots + 2 \sin x \cos 2nx = -\sin x + \cos 3x - \sin 3x + \sin 5x - \dots - \sin(2n-1)x + \sin(2n+1)x = -\sin x + \sin(2n-1)x$.

Таким образом, получаем $4 \sin x \left(S_n - \frac{n}{2} \right) = \sin(2n+1)x - \sin x = 2 \cos(n+1)x \sin nx$, откуда $S_n - \frac{n}{2} = \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}$ или

$$S_n = \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x} + \frac{n}{2}. \quad \text{QED.}$$

4.099. Упростить выражение $\sin^3 \alpha \cos 3\alpha + \cos^3 \alpha \sin 3\alpha$.

Решение.

$$\sin^3 \alpha \cos 3\alpha + \cos^3 \alpha \sin 3\alpha = \sin^3 \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) + \cos^3 \alpha (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = 4 \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha - 3 \sin^3 \alpha \cos \alpha + 3 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha = -3 \sin^3 \alpha \cos \alpha + 3 \cos^3 \alpha \sin \alpha = 3 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{3}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{3}{4} \sin 4\alpha.$$

Ответ: $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$.

4.100. Доказать, что при всех допустимых значениях x справедливо равенство

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + x \right).$$

Решение.

Имеем $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \operatorname{tg} x \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x} \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x (3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$. С другой стороны, применяя повторно формулу для

тангенса суммы двух углов, легко найдем, что $\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x (3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$. QED.

4.101. Найти сумму чисел α и β , если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ являются корнями уравнения $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение.

Решаем уравнение $6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{1}{3}$. По условию, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha = \arctg \frac{1}{2}, \beta = \arctg \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \alpha + \beta = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tg(\alpha + \beta) = \tg\left(\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tg(\alpha + \beta) &= \frac{\tg \arctg \frac{1}{2} + \tg \arctg \frac{1}{3}}{1 - \tg \arctg \frac{1}{2} \cdot \tg \arctg \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \tg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

4.102. Доказать тождество $\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}$, где n — число слагаемых.

Решение.

Пусть $S_n = \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx$. Тогда

$$S_n = (1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 2x) + \dots + (1 - \cos^2 nx) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ слагаемых}} - (\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx) = n - \left(\frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x} + \frac{n}{2} \right)$$

(см. решение задачи 4.098). Следовательно,

$$S_n = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x} = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}.$$

QED.

4.103. Доказать тождество $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}$.

Решение.

Пользуясь формулами для суммы и разности синусов, представим левую часть тождества в виде:

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right).$$

Отсюда, применив формулу для разности косинусов, легко получаем, что левая часть тождества совпадает с правой.

QED.

4.104. Преобразовать в произведение $1 + \ctg x + \cos x + \sin x$.

Решение.

$$\begin{aligned}1 + \ctg x + \cos x + \sin x &= 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x + \sin x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} + (\cos x + \sin x) = (\cos x + \sin x) \cdot \left(\frac{1}{\sin x} + 1 \right) = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)(1 + \sin x)}{\sin x} = \frac{(\cos x + \sin x) \left(\cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{\sin x} = \frac{(\cos x + \sin x) \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2}{\sin x} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos(45^\circ - x) \left(\sqrt{2} \cos \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right) \right)^2}{\sin x} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos(45^\circ - x) 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right)}{\sin x} = \frac{2 \sqrt{2} \cos(90^\circ - (45^\circ + x)) \cos^2 \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right)}{\sin x} = \frac{2 \sqrt{2} \sin(45^\circ + x) \cos^2 \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right)}{\sin x}.\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{2} \sin(45^\circ + x) \cos^2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)}{\sin x}.$$

4.105. Доказать справедливость равенства $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{256}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ &= (\sin 10^\circ \sin 80^\circ)(\sin 20^\circ \sin 70^\circ)(\sin 30^\circ \sin 60^\circ) \cdot (\sin 40^\circ \sin 50^\circ) = \\ &= \frac{\cos 70^\circ - \cos 90^\circ}{2} \cdot \frac{\cos 50^\circ - \cos 90^\circ}{2} \cdot \frac{\cos 30^\circ - \cos 90^\circ}{2} \cdot \frac{\cos 10^\circ - \cos 90^\circ}{2} = \frac{\cos 70^\circ \cos 50^\circ \cos 30^\circ \cos 10^\circ}{16} = \\ &= \frac{\sqrt{3} \cos 70^\circ (\cos 50^\circ \cos 10^\circ)}{32} = \frac{\sqrt{3} \cos 70^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 40^\circ + \cos 60^\circ)}{32} = \frac{\sqrt{3} \cos 70^\circ \cdot (\cos 40^\circ + \frac{1}{2})}{64} = \frac{\sqrt{3} \cos 70^\circ \cdot (2 \cos 40^\circ + 1)}{128} = \\ &= \frac{\sqrt{3}(2 \cos 70^\circ \cos 40^\circ) + \sqrt{3} \cos 70^\circ}{128} = \frac{\sqrt{3}(\cos 30^\circ + \cos 110^\circ) + \sqrt{3} \cos 70^\circ}{128} = \frac{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 110^\circ\right) + \sqrt{3} \cos 70^\circ}{128} = \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} \cos 110^\circ + 2\sqrt{3} \cos 70^\circ}{256} = \frac{3 + 2\sqrt{3}(\cos 110^\circ + \cos 70^\circ)}{256} = \frac{3 + 2\sqrt{3} 2 \cos 90^\circ \cos 20^\circ}{256} = \frac{3 + 0}{256} = \frac{3}{256}. \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

4.106. Доказать, что при целом n и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, имеет место тождество $\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma = (-1)^{n+1} 4 \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma$.

Решение.

Используя тождество, указанное в задаче 4.103, получаем

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma = 4 \sin n(\alpha + \beta) \sin n(\beta + \gamma) \sin n(\gamma + \alpha). \quad (1)$$

Имеем далее $\sin n(\alpha + \beta) = \sin n(\pi - \gamma) = (-1)^{n+1} \sin n\gamma$. Преобразуя аналогично два других множителя в правой части (1), приходим к решению задачи. QED.

4.107. Найти $\operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$.

Решение.

Имеем $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$. Так как $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, $x \neq \pi + 2\pi i$, $i \in \mathbb{Z}$ и $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то мы получим $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow (1 - \sqrt{2}) \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha - (2 + \sqrt{2}) = 0$. Решив это уравнение как квадратное

$$\text{относительно } \operatorname{tg} \alpha, \text{ находим } (\operatorname{tg} \alpha)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}{2(1 - \sqrt{2})} = \frac{-3 \pm (2\sqrt{2} - 1)}{2(1 - \sqrt{2})}.$$

Таким образом, получаем: $(\operatorname{tg} \alpha)_1 = \frac{-3 - 2\sqrt{2} + 1}{2(1 - \sqrt{2})} = 3 + 2\sqrt{2}$ и $(\operatorname{tg} \alpha)_2 = \sqrt{2}$. Следовательно, $(\operatorname{ctg} \alpha)_1 = \frac{1}{(\operatorname{tg} \alpha)_1} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} =$

$$= 3 - 2\sqrt{2} \text{ и } (\operatorname{ctg} \alpha)_2 = \frac{1}{(\operatorname{tg} \alpha)_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $3 - 2\sqrt{2}$.

4.108. Найти наименьшее значение выражения $\frac{\operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx}}{1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 4x\right)}$ при $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{8}$.

Решение.

Упростим данное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx}}{1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 4x\right)} &= \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \cos 4x} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}}{1 + \cos 4x} = \\ &= \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x(1 + \cos 4x)} = \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x(1 + 2 \cos^2 2x - 1)} = \frac{2 \cos 2x}{2 \sin 2x \cos^2 2x} = \frac{2}{2 \sin 2x \cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x}. \end{aligned}$$

При постоянном числителе дробь $\frac{2}{\sin 4x}$ будет наименьшей, когда знаменатель — наибольший, т. е.

$$\sin 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{8} \right).$$

Следовательно, $\frac{2}{\sin\left(4 \frac{\pi}{8}\right)} = 2$ — наименьшее значение исходного выражения.

Ответ: 2 при $\frac{\pi}{8}$.

4.109. Доказать, что если $3 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{tg} \alpha$ при всех допустимых α и β .

Решение.

Допустимые значения аргументов определяются условием $\cos \alpha \cos(\alpha + \beta) \neq 0$. Заметим, что равенство $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{tg} \alpha$, (1)

подлежащее доказательству, содержит аргументы $\alpha + \beta$ и α . Естественно поэтому ввести эти же аргументы и в исходное равенство. Имеем: $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$, $2\alpha + \beta = (\alpha + \beta) + \alpha$. Подставляя эти выражения для β и $2\alpha + \beta$ в исходное равенство $3 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$ (2)

и пользуясь формулами для синуса суммы и разности углов, преобразуем (2) к следующему виду:

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha = 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha. \quad (3)$$

Разделив обе части (3) на $\cos \alpha \cos(\alpha + \beta)$, получим (1).

QED.

4.110. Найти наибольшее значение выражения $\frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Преобразуем данное выражение:

$$\frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \cos^2 2\alpha - 1 + 1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \cos^2 2\alpha}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{2 \cos^2 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} = \cos 2\alpha \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \sin 4\alpha.$$

Выражение $\frac{1}{2} \sin 4\alpha$ принимает наибольшее значение, когда $\sin 4\alpha$ — наибольший, т. е. $\sin 4\alpha = 1$. Отсюда

$$\alpha = \frac{\pi}{8} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}). \text{ Тогда } \frac{1}{2} \sin\left(4 \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \text{ — наибольшее значение исходного выражения.}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$ при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

4.111. Доказать, что если $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 1$, то $\cos 2x + \cos 2y = 0$.

Решение.

Из условия имеем: $\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = 1$; $\sin x \sin y = \cos x \cos y$; $\sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 x \cos^2 y$; $(1 - \cos 2x) \cdot (1 - \cos 2y) = (1 + \cos 2x)(1 + \cos 2y)$;

$$-\cos 2x - \cos 2y = \cos 2x + \cos 2y; \cos 2x + \cos 2y = 0.$$

QED.

4.112. Доказать, что если $\sin \alpha = A \sin(\alpha + \beta)$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - A}$ при всех допустимых значениях α и β .

Решение.

Допустимыми являются все значения α и β , кроме тех, при которых $\cos(\alpha + \beta) = 0$, $\cos \beta = A$. Заметив, что $\sin \alpha = \sin(\alpha + \beta - \beta)$, запишем исходное равенство в виде

$$\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta = A \sin(\alpha + \beta). \quad (1)$$

Разделив обе части (1) на $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, получим $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin \beta = A \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. Выражая отсюда $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, приходим к требуемому равенству. **QED.**

4.113. Упростить выражение $\sqrt{1 + \cos 2\alpha} + \sqrt{1 - \cos 2\alpha} + \sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$.

Решение.

$$\text{Имеем } A = \sqrt{1 + \cos 2\alpha} + \sqrt{1 - \cos 2\alpha} + \sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) = \sqrt{2}|\cos \alpha| + \sqrt{2}|\sin \alpha| + \sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha.$$

Далее рассмотрим случаи:

$$1) \cos \alpha \geq 0, \sin \alpha \geq 0, \text{ т. е. } 2\pi k \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \text{ тогда } A = 2\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha);$$

$$2) \cos \alpha < 0, \sin \alpha > 0, \text{ т. е. } \frac{\pi}{2} + 2\pi k < \alpha < \pi + 2\pi k, \text{ тогда } A = 2\sqrt{2} \sin \alpha;$$

$$3) \cos \alpha \leq 0, \sin \alpha \leq 0, \text{ т. е. } \pi + 2\pi k \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \text{ тогда } A = 0;$$

$$4) \cos \alpha > 0, \sin \alpha < 0, \text{ т. е. } \frac{3\pi}{2} + 2\pi k < \alpha < 2\pi + 2\pi k, \text{ тогда } A = 2\sqrt{2} \cos \alpha, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } A = \begin{cases} 2\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha), & \text{если } 2\pi k \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 2\sqrt{2} \sin \alpha, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi k < \alpha < \pi + 2\pi k, \\ 0, & \text{если } \pi + 2\pi k \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \\ 2\sqrt{2} \cos \alpha, & \text{если } \frac{3\pi}{2} + 2\pi k < \alpha < 2\pi + 2\pi k, \end{cases} \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

4.114. Доказать утверждение: если $m \operatorname{ctg} \alpha = a$ и $n \sin 2\alpha = b$, то $b(a^2 + m^2) = 2am$.

Решение.

По условию,

$$m \operatorname{ctg} \alpha = a \Leftrightarrow m \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = a \quad (1)$$

$$\text{и } n \sin 2\alpha = b \Leftrightarrow 2n \sin \alpha \cos \alpha = b \quad (2)$$

Перемножим почленно равенства (1) и (2):

$$m \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} 2n \sin \alpha \cos \alpha = ab. \quad (3)$$

Далее, используя формулу $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, находим $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\frac{a^2}{m^2}}{1 + \frac{a^2}{m^2}} = \frac{a^2}{a^2 + m^2}$ (так

как $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{m}$). Подставляя полученное выражение для $\cos^2 \alpha$ в выражение (3), находим $2mn \frac{a^2 m^2}{a^2 + m^2} = ab \Rightarrow 2a^2 mn = ab(a^2 + m^2) \Leftrightarrow 2amn = b(a^2 + m^2)$.

QED.

4.115. Доказать, что если углы α и β связаны соотношением $\frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{n}{m}$ ($|m| > |n|$), то имеет место равенство

$$\frac{1 + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}{m + n} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{m - n}.$$

Решение.

Легко проверить, что в силу условий задачи $\sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $|m| \leq |n|$. Поэтому равенство, которое необходимо доказать, имеет смысл. Это равенство перепишем в виде

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{m + n}{m - n} \operatorname{tg} \alpha, \quad (1)$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{m + n}{m - n} \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

В соотношении (2) заменим тангенс углов α и $\alpha + \beta$ через синусы и косинусы, приведем дроби к общему знаменателю и отбросим общий знаменатель. Получим

$$m(\cos \alpha \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)) - n(\sin \alpha \cos(\alpha + \beta) + \cos \alpha \sin(\alpha + \beta)) = 0 \quad (3)$$

или

$$m \sin \beta - n \sin(2\alpha + \beta) = 0. \quad (4)$$

Итак, доказательство сводится к доказательству соотношения (4). Так как (4) выполняется по условию задачи, то имеет

$$\text{место (3), а следовательно, и (2). Но из (2) следует (1), а из (1) следует соотношение } \frac{1 + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}{m + n} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{m - n}. \quad \text{QED.}$$

4.116. Доказать утверждение: если $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ и $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = b$, то $a^3 - 3a + 2b = 0$.

Решение.

По условию, $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = b$, откуда $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = b \Leftrightarrow a(1 - \sin \alpha \cos \alpha) = b$ ($\sin \alpha + \cos \alpha = a$ и

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$). Далее $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}$, поэтому

$$a \left(1 - \frac{a^2 - 1}{2} \right) = b \Leftrightarrow a(3 - a^2) = 2b \Leftrightarrow 3a - a^3 - 2b = 0 \Leftrightarrow a^3 - 3a + 2b = 0. \quad \text{QED.}$$

4.117. Доказать, что если $a = \operatorname{tg} 5^\circ$, $b = \operatorname{tg} 20^\circ$ и $c = \operatorname{tg} 65^\circ$, то $ab + bc + ca = 1$.

Решение.

По условию, $a = \operatorname{tg} 5^\circ$, $b = \operatorname{tg} 20^\circ$, $c = \operatorname{tg} 65^\circ$, поэтому

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &= \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 65^\circ + \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg}(90^\circ - 25^\circ) + \operatorname{tg}(90^\circ - 25^\circ) \operatorname{tg} 5^\circ = \\ &= \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 25^\circ + \operatorname{ctg} 25^\circ \operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{ctg} 25^\circ (\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ) = \\ &= \frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ} \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} \left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ} \right) = \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ - \cos 25^\circ) + \cos 25^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 25^\circ)}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 25^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 25^\circ)} = 1. \end{aligned} \quad \text{QED.}$$

4.118. Доказать, что если $\cos x \cos y \cos z \neq 0$, то имеет место формула

$$\cos(x+y+z) = \cos x \cos y \cos z (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x).$$

Решение.

Рассмотрим тождество $\cos(x+y+z) = \cos(x+y) \cos z - \sin(x+y) \sin z = \cos x \cos y \cos z - \cos z \sin x \cdot \sin y - \cos y \sin x \sin z - \cos x \sin y \sin z$. Так как, по условию задачи, $\cos x \cos y \cos z \neq 0$, то из этого тождества следует, что

$$\cos(x+y+z) = \cos x \cos y \cos z \left(1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin y \sin z}{\cos y \cos z} - \frac{\sin z \sin x}{\cos z \cos x} \right) = \cos x \cos y \cos z (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x). \quad \text{QED.}$$

4.119. Доказать, что $\operatorname{tg} 142^\circ 30' + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ есть целое число.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 142^\circ 30' + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} &= \frac{1 - \cos 285^\circ}{\sin 285^\circ} + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1 - \sin 15^\circ}{-\cos 15^\circ} + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \left[\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right] = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - 1}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2 - 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{8 - 4\sqrt{3} - 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2. \end{aligned} \quad \text{QED.}$$

4.120. Найти $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{4}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Имеем:

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2} = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) = \frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1 + 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) = \frac{1}{2} (4 \cos^3 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha - 1).$$

$$\text{Далее, так как } \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{4}{3} \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \text{ откуда } \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{16}{9} \\ = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

$$\text{Учитывая, что } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ имеем } \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

Таким образом, $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 2 \left(\frac{3}{5} \right)^2 - 3 \frac{3}{5} - 1 \right) = -\frac{76}{125}$.

Ответ: $-\frac{76}{125}$.

4.121. Найти алгебраические связи между углами α, β, γ , если известно, что $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$.

Решение.

В задаче 4.118 доказана формула для косинуса суммы трех углов. Аналогично можно получить формулу $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma)$, предполагая, что $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \neq 0$. Из этой формулы находим, что в условиях данной задачи $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\alpha + \beta + \gamma = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4.122. Доказать, что если $\cos 2\alpha = \cos 2\beta$, то $1 + \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sin^2 \gamma}$.

Решение.

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) &= \frac{1}{\sin^2 \gamma} \Leftrightarrow 1 + \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} = \frac{1}{\sin^2 \gamma} \Leftrightarrow 1 + \frac{\frac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\alpha)}{\frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)} = \\ &= \frac{2}{1 - \cos 2\gamma} \Leftrightarrow 1 + \frac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{\cos 2\beta - \cos 2\alpha} = \frac{2}{1 - \cos 2\gamma} \Leftrightarrow \frac{2 \cos 2\beta}{\cos 2\beta - \cos 2\alpha} = \frac{2}{1 - \cos 2\gamma} \Leftrightarrow \frac{\cos 2\beta}{\cos 2\beta \left(1 - \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta} \right)} = \\ &= \frac{1}{1 - \cos 2\gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta}} = \frac{1}{1 - \cos 2\gamma}. \end{aligned}$$

Далее, так как $\cos 2\alpha = \cos 2\beta \cos 2\gamma$, то $\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta} = \cos 2\gamma$, и последнее равенство принимает вид $\frac{1}{1 - \cos 2\gamma} = \frac{1}{1 - \cos 2\gamma}$. QED.

4.123. Доказать утверждение: если $\sin^2 \beta = \sin \alpha \cos \alpha$, то $\cos 2\beta = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$.

Решение.

Имеем,

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = 1 - 2 \sin^2 \beta = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \sin 2\alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right).$$

QED.

4.124. Преобразовать в произведение $\operatorname{ctg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 2x - 8 \cos 4x \operatorname{ctg} 4x$.

Решение.

Обозначим данное выражение через S . Первые два слагаемых преобразуем следующим образом:

$$\operatorname{ctg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 2x = \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} - \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{\cos^4 2x - \sin^4 2x}{\sin^2 2x \cos^2 2x} = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\sin^2 4x} = \frac{4 \cos 4x}{\sin^2 4x}.$$

Следовательно, $S = \frac{4 \cos 4x}{\sin^2 4x} - 8 \cos 4x \operatorname{ctg} 4x = \frac{4 \cos 4x}{\sin^2 4x} - 8 \cos 4x \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \frac{4 \cos 4x}{\sin^2 4x} (1 - 2 \sin 4x \cos 4x) = \frac{4 \cos 4x}{\sin^2 4x} (1 - \sin 8x)$.

Так как $1 - \sin 8x = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right)$, то окончательно получаем $S = \frac{8 \cos 4x \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right)}{\sin^2 4x}$.

Ответ: $\frac{8 \cos 4x \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right)}{\sin^2 4x}$.

4.125. Доказать утверждение: если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = m$ и $\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = n$, то $m \sqrt[3]{mn^2} - n \sqrt[3]{m^2 n} = 1$.

Решение.

Последовательно находим:

$$\begin{aligned} m \sqrt[3]{mn^2} &= (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sqrt[3]{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right)^2} = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sqrt[3]{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)^2} = \\ &= (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sqrt[3]{\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1; \\ n \sqrt[3]{m^2 n} &= \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) \sqrt[3]{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right)} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Тогда $m \sqrt[3]{mn^2} - n \sqrt[3]{m^2 n} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$.

QED.

4.126. Найти $\frac{\sin 4x + \sin 10x - \sin 6x}{\cos 2x + 1 - 2 \sin^2 4x}$, если известно, что $\sin x - \cos x = a$.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 4x + \sin 10x - \sin 6x}{\cos 2x + 1 - 2 \sin^2 4x} &= \frac{2 \sin 7x \cos 3x - 2 \sin 3x \cos 3x}{\cos 2x + \cos 8x} = \frac{2 \cos 3x (\sin 7x - \sin 3x)}{\cos 2x + \cos 8x} = \frac{2 \cos 3x \cdot 2 \cos 5x \sin 2x}{2 \cos 5x \cos 3x} = \\ &= 2 \sin 2x = 4 \sin x \cos x = -2(1 - 2 \sin x \cos x - 1) = -2(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 1) = -2((\sin x - \cos x)^2 - 1) = \\ &= 2(1 - (\sin x - \cos x)^2) = 2(1 - a^2). \end{aligned}$$

Ответ: $2(1 - a^2)$.

4.127. Преобразовать в произведение $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2$.

Решение.

Обозначим рассматриваемое выражение через S . Первые два слагаемых преобразуем по формуле $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, а произведение $\cos \alpha \cos \beta$ заменим суммой по формуле $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$, наконец, заменим $\sin^2 \gamma$ на $1 - \cos^2 \gamma$.

Тогда получим

$$S = -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) - \cos^2 \gamma + (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \cos \gamma.$$

Преобразуя сумму $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$ в произведение и раскрывая скобки, получаем: $S = -\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \cos^2 \gamma + \cos(\alpha + \beta)\cos \gamma + \cos(\alpha - \beta)\cos \gamma$. Группируя слагаемые в S , находим, что $S = -(\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma)(\cos(\alpha + \beta) - \cos \gamma)$.

$$\text{Следовательно, } S = 4 \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}.$$

$$\text{Ответ: } 4 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}.$$

4.128. Найти наименьшее значение выражения $\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\cos 4\alpha + 1}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Решение.

Упростим данное выражение:

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 1} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}}{2 \cos^2 2\alpha} = \frac{\frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}}{2 \cos^2 2\alpha} = \frac{2}{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2}{\sin 4\alpha}.$$

Выражение $\frac{2}{\sin 4\alpha}$ принимает наименьшее значение, когда $\sin 4\alpha$ — наибольшее, т. е. когда $\sin 4\alpha = 1$, отку-

да $\alpha = \frac{\pi}{8}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$).

$$\text{Таким образом, } \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{8}\right) + 1} = 2.$$

Ответ: 2 при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

4.129. Вычислить без таблиц и калькулятора $S = \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$.

Решение.

Применив ко всем слагаемым исследуемой суммы сначала формулу $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, а затем $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, найдем, что

$$S = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} \right) + \frac{1}{8} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} \right).$$

Суммы, стоящие в скобках, равны нулю, так как $\cos \frac{\pi}{8} = -\cos \frac{7\pi}{8}$, $\cos \frac{3\pi}{8} = -\cos \frac{5\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{4} = -\cos \frac{3\pi}{4}$, $\cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{7\pi}{4}$.

Следовательно, $S = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

4.130. Доказать утверждение: если $a\cos^3\alpha + 3a\cos\alpha\sin^2\alpha = m$ и $a\sin^3\alpha + 3a\cos^2\alpha\sin\alpha = n$, то $\sqrt[3]{(m+n)^2} + \sqrt[3]{(m-n)^2} = 2\sqrt[3]{a^2}$.

Решение.

Имеем: $m+n = a(\cos^3\alpha + 3\cos\alpha\sin^2\alpha + \sin^3\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha) = a(\cos\alpha + \sin\alpha)^3$ и $m-n = a(\cos^3\alpha + 3\cos\alpha\sin^2\alpha - \sin^3\alpha - 3\cos^2\alpha\sin\alpha) = a(\cos\alpha - \sin\alpha)^3$.

Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(m+n)^2} + \sqrt[3]{(m-n)^2} &= \sqrt[3]{a^2(\cos\alpha + \sin\alpha)^6} + \sqrt[3]{a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)^6} = \sqrt[3]{a^2((\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + \\ &+ (\cos\alpha - \sin\alpha)^2)} = \sqrt[3]{a^2(\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha)} = 2\sqrt[3]{a^2}.\end{aligned}$$

QED.

ТЕМА: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

4.131. Объединить семейства значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$

Решение.

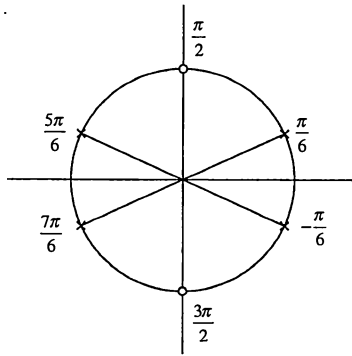


Рис. 4.20

Отметим на числовой окружности значения x из первого семейства кружками и значения x из второго семейства — крестиками (рис. 4.20). Как видно из рисунка, на окружности получилось шесть точек, которые делят окружность на шесть равных частей. Это позволяет более компактно записать все значения x , принадлежащие заданным семействам, а именно:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z}$

4.132. Из семейства $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$ исключить значения, принадлежащие семейству $x = \frac{\pi}{2}n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

Решение.

$$4.136. \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение.

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \text{ Так как } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ то } 2x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n$$

$$\text{или } 2x - \frac{\pi}{3} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, \text{ откуда } x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4.137. \sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}.$$

Решение.

Преобразуем данное уравнение:

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow -2 \sin 2x \cos 2x = 1 \Leftrightarrow -\sin 4x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = -1.$$

$$\text{Отсюда } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.138. 2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$$

Решение.

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то получим $2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$ или $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$. Это уравнение является

квадратным относительно $t = \sin x$, $|t| \leq 1$, т. е. $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Решив его, находим $t = \frac{1}{2}$, $t = 2$. Тогда $\sin x = 2$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Но уравнение $\sin x = 2$ не имеет корней, так как $t = 2 > 1$. Из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ находим $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4.139. \sin x + \cos x = 0.$$

Решение.

Данное уравнение является однородным относительно $\cos x$ и $\sin x$. Рассмотрим такие x , что $\cos x = 0$. Из исходного уравнения следует, что и $\sin x = 0$. Но это невозможно, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ для любых x . Следовательно, $\cos x \neq 0$, поэтому

$$\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

4.140. $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$.

Решение.

Легко заметить, что уравнение теряет смысл при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $x = -\frac{\pi}{4} + \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$, а при прочих x оно равносильно следующему уравнению: $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 1 + \sin 2x$. После преобразований получаем $\sin x(3 + \sin 2x + \cos 2x) = 0$. Уравнение $\sin 2x + \cos 2x + 3 = 0$ не имеет решений, так как $\sin 2x + \cos 2x > -3$, поэтому исходное уравнение сводится к уравнению $\sin x = 0$, откуда $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

4.141. $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

Решение.

Данное уравнение является однородным уравнением второй степени. Деление обеих его частей на $\cos^2 x \neq 0$ приводит к уравнению $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$. Полагая $t = \operatorname{tg} x$, получаем $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1$, $t_2 = -3$. Тогда $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = -3$,

откуда находим: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$ и $x_2 = \operatorname{arctg}(-3) + \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg}(-3) + \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

4.142. $2 \sin 17x + \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 0$.

Решение.

Имеем

$$2 \sin 17x + \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 17x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 17x + \sin \frac{\pi}{3} \cos 5x + \cos \frac{\pi}{3} \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 17x + \sin \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \left(11x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(6x - \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

откуда $\sin \left(11x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$ или $\cos \left(6x - \frac{\pi}{6} \right) = 0$

Следовательно, $x_1 = -\frac{\pi}{66} + \frac{\pi m}{11}$, $x_2 = \frac{\pi}{36} + \frac{(2k+1)\pi}{12}$, $m, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{66} + \frac{\pi m}{11}$, $x_2 = \frac{\pi}{36} + \frac{(2k+1)\pi}{12}$, $m, k \in \mathbb{Z}$.

4.143. $5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 2$.

Решение.

Так как $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$, то перепишем исходное уравнение в виде $5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$ или $3 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0$. Это уравнение представляет собой однородное уравнение второй степени. Разделив обе его

части на $\cos^2 x$, получаем квадратное уравнение $3 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 5 = 0$, откуда находим $x = \operatorname{arctg} \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.144. $\frac{\sin z - \sin 3z}{2 \sin^2 z} = 0.$

Решение.

Областью определения уравнения являются все значения z , при которых $\sin z \neq 0$, т. е. $z \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Если $\sin z \neq 0$, то получим $\sin z - \sin 3z = 0$ или $2 \sin z \cos 2z = 0$. С учетом области определения решаем только уравнение $\cos 2z = 0$, откуда $z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

4.145. $\operatorname{ctg} x - 2 \sin 2x = 1.$

Решение.

Уравнение теряет смысл при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, а при прочих x оно равносильно следующему: $\cos x - \sin x = 2 \sin 2x \sin x$ или

$$\cos x - \sin x = \cos x - \cos 3x, \text{ откуда } \sin x = \cos 3x. \text{ Тогда получаем } \sin x - \cos 3x = 0 \text{ или } 2 \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0.$$

Следовательно, $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ и $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi l, k, l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi l, k, l \in \mathbb{Z}$.

4.146. $\frac{\sin^3 2x - \sin 2x}{\cos 3x} = 0.$

Решение.

Следствием этого уравнения является уравнение $\sin 2x(\sin^2 2x - 1) = 0$, которое равносильно совокупности уравнений

$\sin 2x = 0, \sin 2x = 1, \sin 2x = -1$. Решением первого уравнения этой совокупности является семейство $x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$, второго — семейство $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, и третьего — семейство $x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$. Объединением этих трех семейств

является семейство $x = \frac{\pi}{4} l, l \in \mathbb{Z}$.

Далее при переходе от заданного уравнения к уравнению $\sin 2x(\sin^2 2x - 1) = 0$ область определения исходного уравнения расширилась. Поэтому исключим из семейства

$x = \frac{\pi}{4} l$ значения x , при которых $\cos 3x = 0$, т. е. значения

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} r, r \in \mathbb{Z}$. Сделаем это с помощью окружности (рис. 4.22), на которой отметим кружками значения x ,

принадлежащие семейству $x = \frac{\pi}{4} l$, и вычеркнем значения

x , принадлежащие семейству $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} r$. Оставшиеся

значения x можно записать как объединение двух семейств:

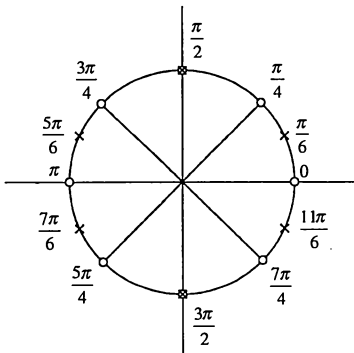


Рис. 4.22

$$x_1 = \pi k, x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \pi k, x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, k, n \in \mathbb{Z}.$

4.147. $2\operatorname{tg}(70^\circ + x) - \operatorname{tg}(20^\circ - x) = 1.$

Решение.

Области определения уравнения принадлежат значения x , при которых $\cos(70^\circ + x) \neq 0$ и $\cos(20^\circ - x) \neq 0$, т. е. $x \neq 20^\circ + 180^\circ n, x \neq -70^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}.$

Так как $\operatorname{tg}(70^\circ + x) = \operatorname{ctg}(20^\circ - x)$, то преобразуем исходное уравнение к виду $2\operatorname{ctg}(20^\circ - x) - \operatorname{tg}(20^\circ - x) = 1$ или

$$\frac{2}{\operatorname{tg}(20^\circ - x)} - \operatorname{tg}(20^\circ - x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2(20^\circ - x) + \operatorname{tg}(20^\circ - x) - 2 = 0. \text{ Пусть } \operatorname{tg}(20^\circ - x) = t, \text{ тогда получим квадратное уравнение}$$

$$t^2 + t - 2 = 0, \text{ откуда } t = -2, t = 1. \text{ Из совокупности уравнений } \begin{cases} \operatorname{tg}(20^\circ - x) = -2, \\ \operatorname{tg}(20^\circ - x) = 1 \end{cases} \text{ найдем: } \begin{cases} 20^\circ - x = \operatorname{arctg}(-2) + 180^\circ n, & n \in \mathbb{Z}, \\ 20^\circ - x = \operatorname{arctg}1 + 180^\circ k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значит, решением исходного уравнения являются значения $x_1 = 20^\circ + \operatorname{arctg}2 + 180^\circ n, x_2 = -25^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x_1 = 20^\circ + \operatorname{arctg}2 + 180^\circ n, x_2 = -25^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}.$

4.148. $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0.$

Решение.

Пусть $\sin x - \cos x = t$. Используя тождество $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$, запишем исходное уравнение в виде $t^2 + 12t - 13 = 0$.

Это уравнение имеет корни $t_1 = -13, t_2 = 1$. Но $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$, откуда $|t| \leq \sqrt{2}$, следовательно, корень $t_1 = -13$ можно не рассматривать. Таким образом, исходное уравнение сводится к уравнению $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $x_1 = \pi + 2\pi k, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, k, m \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi k, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, k, m \in \mathbb{Z}.$

4.149. $\cos 2x + \cos 3x = 2.$

Решение.

Заметим, что $\cos 2x \leq 1$ и $\cos 3x \leq 1$. Следовательно,

$$\cos 2x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{2}{3}\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Придавая n и k значения $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, находим общее решение полученной системы уравнений, которое можно записать в виде $x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$

4.150. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

Решение.

Применив формулу $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, преобразуем уравнение к виду

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 6x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 6x - \cos 4x - \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos 6x - \cos 4x) + (1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 \sin 5x \sin x + 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\sin x - \sin 5x) = 0.$$

Это уравнение распадается на совокупность двух уравнений: $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x - \sin 5x = 0. \end{cases}$

Из первого уравнения находим $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение перепишем в виде $2 \sin 2x \cos 3x = 0$, откуда $\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos 3x = 0, \end{cases}$ т. е.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что значения $x = \pi n$ входят составной частью в значения $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому получаем окончательный ответ:

$$x_1 = \frac{\pi n}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi n}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4.151. $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$.

Решение.

Имеем: $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5 (\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$. Ясно, что делить обе части этого уравнения на $\cos^2 x$ нельзя, так как те значения x , при которых $\cos^2 x = 0$, удовлетворяют этому уравнению, а поэтому деление на $\cos^2 x$ приводит к потере корней. Мы поступим по-другому, а именно запишем уравнение в виде

$\cos x (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$, откуда получим совокупность уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Повторяющихся значений x эти семейства решений не содержат, но запись ответа можно представить в виде $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k$, где $k \neq 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k$, где $k \neq 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$.

4.152. $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

Решение.

Данное уравнение теряет смысл при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а при $x \neq \pi k$ может быть записано в виде $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^3 x + \cos^2 x = \sin^3 x + \sin^2 x$. Перенеся все члены уравнения в левую часть и разложив на множители, получаем $(\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin x + \cos x) = 0$. Отсюда вытекают две возможности:

$$\text{а) } \sin x - \cos x = 0, \text{ тогда } x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (1)$$

$$\text{б) } \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin x + \cos x = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) аналогично рассмотренному в задаче 4.148, поэтому имеет решения

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad (3) \text{ и } x_3 = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Но значения x , содержащиеся в семействе (4), не являются корнями исходного уравнения, так как при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, исходное уравнение теряет смысл.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4.153. \cos(\cos x) = 0.$$

Решение.

$$\text{Имеем: } \cos(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = y, \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = y, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что $y = \cos x$ — четная функция, и ее наибольшее значение равно 1. С другой стороны, из уравнения $\cos y = 0$ следует, что наименьшее положительное значение y равно $\frac{\pi}{2}$, что больше единицы. Следовательно, исходное уравнение не имеет решения.

Ответ: \emptyset .

$$4.154. 8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0. \quad (1)$$

Решение.

Пусть $y = \cos x$. Тогда уравнение (1) примет вид: $8y^4 - 8y^2 - y + 1 = 0 \Leftrightarrow 8y^2(y - 1)(y + 1) - (y - 1) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(8y^3 + 8y^2 - 1) = 0$.

Таким образом, получили следующую совокупность уравнений $\begin{cases} y - 1 = 0, \\ 8y^3 + 8y^2 - 1 = 0. \end{cases}$ Из первого уравнения совокупности получаем $y_1 = 1$. Решим второе уравнение. Пусть $z = 2y$, тогда получим $z^3 + 2z^2 - 1 = 0$, откуда подбором находим $z_1 = -1$, а

$$\text{затем, разделив } z^3 + 2z^2 - 1 \text{ на } z + 1, \text{ получим } z^3 + 2z^2 - 1 = (z + 1)(z^2 + z - 1), \text{ т. е. } \begin{cases} z + 1 = 0, \\ z^2 + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -1, \\ z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, $y_2 = -\frac{1}{2}$, $y_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Итак, исходное уравнение равносильно следующей совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первые два семейства можно объединить в одно: $x = \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x_1 = \frac{2\pi}{3}k, x_2 = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} + 2\pi m, k, m \in \mathbb{Z}$.

4.155. $2\operatorname{ctg} 2x - 3\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

Решение.

Данное уравнение можно записать в виде

$$3 \left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \text{ или } \frac{3 \sin x}{\sin 2x \sin 3x} = \frac{1}{\sin 2x \cos 2x} \quad (1)$$

Замечание: уравнение (1) имеет смысл, если $\sin 2x \neq 0, \sin 3x \neq 0, \cos 2x \neq 0$.

Для тех x , при которых уравнение (1) имеет смысл, получим $3 \sin x \cos 2x = \sin 3x \Leftrightarrow \sin x (3 - 4 \sin^2 x - 3 \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^3 x \Leftrightarrow \sin^3 x = 0$. Так как это уравнение равносильно уравнению $\sin x = 0$, то, учитывая замечание, исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: \emptyset .

4.156. $\sin 2x + \sin 3x = 0$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \sin 2x + \sin 3x = 0 &\Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-3x) \Leftrightarrow 2x = (-1)^n \arcsin(\sin(-3x)) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = (-1)^n (-3x) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = -3x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{или } \begin{cases} n = 2l + 1, l \in \mathbb{Z}, \\ 2x = 3x + 2\pi l + \pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x_2 = -2\pi l - \pi, l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z}; x_2 = -2\pi l - \pi, l \in \mathbb{Z}$.

4.157. $4\sin 3x + 3\cos 3x = 2$.

Решение.

Выразив $\sin 3x$ и $\cos 3x$ через тангенс половинного аргумента, т. е. через $\operatorname{tg} \frac{3x}{2} = t$, придем к уравнению

$$\frac{8t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} = 2 \Leftrightarrow 5t^2 - 8t - 1 = 0; \text{ следовательно, } t = \operatorname{tg} \frac{3x}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{21}}{5}. \text{ Отсюда } x = \frac{2}{3} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{4 \pm \sqrt{21}}{5} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Осталось проверить подстановкой в уравнение, не являются ли решениями значения $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$, при которых не определен

$\operatorname{tg} \frac{3x}{2}$. Получим $4\sin(\pi + 2\pi k) + 3\cos(\pi + 2\pi k) \neq 2$. Значит $x = \frac{\pi}{3}(2k + 1), k \in \mathbb{Z}$, не удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x = \frac{2}{3} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{4 \pm \sqrt{21}}{5} \right), n \in \mathbb{Z}$.

$$4.158. \sin x + 7 \cos x = 5. \quad (1)$$

Решение.

$$\text{Разделив обе части уравнения (1) на } \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}, \text{ получим: } \frac{1}{\sqrt{50}} \sin x + \frac{7}{\sqrt{50}} \cos x = \frac{5}{\sqrt{50}}. \quad (2)$$

Так как $\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right)^2 = 1$, то существует такое значение φ , что $\frac{1}{\sqrt{50}} = \sin \varphi$, $\frac{7}{\sqrt{50}} = \cos \varphi$, где $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{50}}$ (или

$\varphi = \arccos \frac{7}{\sqrt{50}}$) — вспомогательный угол. Тогда (2) можно записать в виде

$$\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x - \varphi = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{50}}$, то окончательно получаем следующее семейство, являющееся решением уравнения (1):

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{50}} + 2\pi k \text{ (или } x = \pm \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{50}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.159. 6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$$

Решение.

Запишем данное уравнение в виде $6(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x$, откуда получим

$$6\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Leftrightarrow \frac{6 \cos 2x}{\cos x \sin 3x} = \frac{\cos x}{\cos 2x \sin 3x} \Rightarrow 6 \cos^2 2x = \cos^2 x \Leftrightarrow 12 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\cos 2x$, найдем $\cos 2x = \frac{1 \pm 7}{24}$, откуда:

$$1) \quad \cos 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \quad \cos 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

В процессе решения обе части уравнения были умножены на $\cos x \cos 2x \sin 3x$. Но легко видеть, что ни при одном из найденных значений x это произведение не обращается в нуль. Следовательно, все найденные значения для x являются корнями исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } x_1 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4.160. \sin x - \cos x + 1 = 0.$$

Решение.

Имеем:

$$\sin x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, \\ x - \frac{\pi}{4} = -1 \left(-\frac{\pi}{4} \right) + 2\pi k + \pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.161. $\frac{\sin z}{1 + \cos z} = 2 - \operatorname{ctg} z$.

Решение.

Областью определения уравнения являются все значения z , при которых имеет смысл $\operatorname{ctg} z$ и $\cos z \neq -1$, т. е. $z \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Воспользовавшись универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{z}{2}$, получим $\frac{2t}{1+t^2} = 2 - \frac{1-t^2}{2t}$, откуда $t^2 - 4t + 1 = 0$. Решив $1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}$

это уравнение, находим $t = \operatorname{tg} \frac{z}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Следовательно, $z = 2 \operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Значения $z = \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$, при которых теряет смысл $\operatorname{tg} \frac{z}{2}$, проверять подстановкой не нужно, так как они не входят в область определения уравнения и, следовательно, не могут быть его корнями.

Ответ: $z = 2 \operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4.162. Найти корни уравнения $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -\cos 3x$, (1) принадлежащие отрезку $[-\pi, 2\pi]$.

Решение.

Преобразуем уравнение (1) следующим образом:

$$\cos x - \cos 3x = \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow 2 \sin 2x \sin x - \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 \sin 2x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ 2 \sin 2x - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Выделим из найденных значений те, которые принадлежат отрезку $[-\pi, 2\pi]$.

Рассмотрев значения $x = \pi k$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, замечаем, что отрезку $[-\pi, 2\pi]$ принадлежат точки $-\pi$ (при $k = -1$), 0 (при $k = 0$), π (при $k = 1$), 2π (при $k = 2$).

Рассмотрев значения $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, заметим, что отрезку $[-\pi, 2\pi]$ принадлежат точки $\frac{\pi}{6}$ ($n = 0$),

$$\frac{\pi}{3} \quad (n = 1), \quad \frac{7\pi}{6} \quad (n = 2), \quad \frac{4\pi}{3} \quad (n = 3), \quad -\frac{2\pi}{3} \quad (n = -1).$$

Ответ: $-\pi; -\frac{2\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi$.

4.163. Найти в градусах корень уравнения $\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - 2 \cos^2 2x = 0$, если $-45^\circ < x < 0$.

Решение.

Уравнение является однородным второго порядка. Разделив обе его части на $\cos^2 2x$, получим уравнение

$$\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x - 2 = 0 \text{ — квадратное относительно } \operatorname{tg} 2x. \text{ Решив его, найдем: } \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 2, \\ \operatorname{tg} 2x = -1. \end{cases}$$

По условию, $-45^\circ < x < 0$, значит, $-90^\circ < 2x < 0$. При этих значениях аргумента $\operatorname{tg} 2x < 0$, следовательно, уравнение $\operatorname{tg} 2x = 2$ не подходит по смыслу задачи.

Из уравнения $\operatorname{tg} 2x = -1$ находим $2x = -45^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}$. Значит, $x = -22^\circ 30' + 90^\circ n, n \in \mathbb{Z}$. Придавая n значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, выбираем x , удовлетворяющие условию $-45^\circ < x < 0$. При $n = 0$ получим $x = -22^\circ 30'$.

Ответ: $x = -22^\circ 30'$.

Решить уравнения (4.164—4.174).

4.164. $\sin^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$.

Решение.

Данное уравнение теряет смысл, когда $\cos x = 0$, поэтому можно считать, что $\cos x \neq 0$. Правая часть уравнения равна $3 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$, поэтому, разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим

$$\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3(\operatorname{tg} x + 1) \Leftrightarrow (\operatorname{tg}^2 x - 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0, \\ \operatorname{tg} x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi m, & m \in \mathbb{Z}, \\ x_3 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}; x_3 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.165. $3 \sin x + 4 \cos x - 5 \sin 7x = 0$.

Решение.

Имеем: $3 \sin x + 4 \cos x - 5 \sin 7x = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = \sin 7x$.

Введем вспомогательный угол φ такой, что $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ и $\sin \varphi = \frac{4}{5}$. Тогда $\varphi = \arcsin \frac{4}{5}$. С учетом введенных обозначений исходное уравнение представим в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \sin 7x \Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = \sin 7x \Leftrightarrow x + \varphi = (-1)^n 7x + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x + \varphi = 7x + 2\pi k \end{cases}$$

или $\begin{cases} n = 2k + 1, & k \in \mathbb{Z}, \\ x + \varphi = -7x + 2\pi k + \pi \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\varphi}{6} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x_2 = \frac{\pi - \varphi}{8} + \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x_1 = \frac{\varphi}{6} + \frac{\pi}{3} k, x_2 = \frac{\pi - \varphi}{8} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z}, \varphi = \arcsin \frac{4}{5}$.

4.166. $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение к виду: $(\sin x - \sin 3x) + 2\sin 2x = 3 \Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x - 2\sin 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x + \cos^2 2x) + (\sin^2 2x - 2\sin 2x + 1) + 3 = \sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 2x + 1 \Leftrightarrow (\sin x + \cos 2x)^2 + (\sin 2x - 1)^2 + 3 = \sin^2 x + 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\sin x + \cos 2x)^2 + (\sin 2x - 1)^2 + \cos^2 x = 0$.

Но сумма квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Поэтому последнее уравнение

равносильно следующей системе уравнений:
$$\begin{cases} \sin x + \cos 2x = 0, \\ \sin 2x - 1 = 0, \\ \cos x = 0. \end{cases}$$
 Решив третье уравнение этой системы, получим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Подставив эти значения x во второе уравнение системы, будем иметь $\sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) - 1 = \sin(\pi + 2\pi k) - 1 = -1 \neq 0$, т. е. значения

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, не удовлетворяют второму уравнению системы. Значит, система не имеет решений, следовательно, и исходное

уравнение не имеет решений.

Ответ: \emptyset .

4.167. $\sin^5 x - \cos^5 x = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}$.

Решение.

Приведем к общему знаменателю дроби, стоящие в правой части уравнения, и применив формулу $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$, получим $\sin x \cos x (\sin x - \cos x)(\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x) = \sin x - \cos x$. Отсюда следует, что либо

$$\sin x - \cos x = 0, \quad (1)$$

либо

$$\sin x \cos x (\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x) - 1 = 0. \quad (2)$$

Преобразуем уравнение (2), пользуясь тем, что $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, а $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \sin x \cos x$. Пусть еще в уравнении (2) $\sin x \cos x = y$, тогда запишем его в виде $y^3 - y^2 - y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2(y + 1) = 0$.

Если $y = 1$, т. е. $\sin x \cos x = 1$, то $\sin 2x = 2$, что невозможно. Если же $y = -1$, то $\sin 2x = -2$, что также невозможно. Итак,

уравнение (2) не имеет корней. Следовательно, корни исходного уравнения суть корни уравнения (1), т. е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.168. $2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3 = 0$.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} 2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3 = 0 &\Leftrightarrow 2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 2\cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n; x_2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.169. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$.

Решение.

Применим подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно, исходное уравнение запишется в виде $\sqrt{3} \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

При переходе к $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ были исключены значения $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Подставляя $x = \pi + 2\pi k$ в исходное уравнение, получаем верное равенство $\sqrt{3} \sin(\pi + 2\pi k) - \cos(\pi + 2\pi k) = 1$, т. е. $1 = 1$. Следовательно, значения $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x_2 = \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$.

4.170. $\sqrt{-3 - \cos^2 x} + 3 \sin 5x = 1 - \sin x$.

Решение.

Возведя обе части исходного уравнения в квадрат и выполнив последующее приведение подобных членов, получим:

$$2 \sin x + 3 \sin 5x = 5. \quad (1)$$

Так как $\sin x \leq 1, \sin 5x \leq 1$, то уравнению (1) удовлетворяют те и только те значения x , при которых одновременно $\sin x = 1$

и $\sin 5x = 1$, т. е. уравнение (1) равносильно системе $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 5x = 1. \end{cases}$ Из уравнения $\sin x = 1$ находим $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Подставляя

эти значения x во второе уравнение системы, получим $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 10\pi k\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Таким образом,

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, — решение системы, а значит, и исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4.171. $32 \cos^6 x - \cos 6x = 1$.

Решение.

Пользуясь тождеством $\cos^6 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x)$ и формулой $\cos 6x = 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x$, приведем исходное уравнение к виду

$$4 \cos^2 2x + 5 \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n, k \in \mathbb{Z}$.

4.172. $\sqrt{\sin x} = \cos x$.

Решение.

Область определения: $\sin x \geq 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin x} = \cos x &\Rightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \sin x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \\ \sin x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

4.173. $(1 - \operatorname{tg} z)(1 + \sin 2z) = 1 + \operatorname{tg} z$.

Решение.

Области определения уравнения не принадлежат значения $z = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$, при которых не определен $\operatorname{tg} z$.

Преобразуем слагаемые исходного уравнения:

$$1 - \operatorname{tg} z = 1 - \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\cos z - \sin z}{\cos z}; \quad 1 + \operatorname{tg} z = \frac{\sin z + \cos z}{\cos z}; \quad 1 + \sin 2z = \sin^2 z + \cos^2 z + 2 \sin z \cos z = (\sin z + \cos z)^2.$$

Тогда уравнение запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{(\cos z - \sin z)(\sin z + \cos z)^2}{\cos z} &= \frac{\sin z + \cos z}{\cos z} \Rightarrow (\cos z - \sin z)(\sin z + \cos z)^2 - (\sin z + \cos z) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sin z + \cos z)(\cos^2 z - \sin^2 z - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos z + \sin z = 0, \\ \cos 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} z = -1, \\ \cos 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ z_2 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $z_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad z_2 = \pi k, \quad n \in \mathbb{Z}$.

4.174. $\sin x + 2\sin 2x = 4 + \sin 17x$.

(1)

Решение.

Так как $\sin x \leq 1$, $\sin 2x \leq 1$, то $\sin x + 2\sin 2x \leq 3$. Более того, $\sin x + 2\sin 2x < 3$. В самом деле, рассмотрим уравнение $\sin x + 2\sin 2x = 3$. Такое равенство возможно только в том случае, когда $\sin x = 1$ и $\sin 2x = 1$, что невозможно, ибо $\sin x = 1$

при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$, а при этих значениях имеем $\sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin(\pi + 4\pi k) = 0$.

Итак, $\sin x + 2\sin 2x < 3$. В то же время правая часть уравнения (1) удовлетворяет неравенству $4 + \sin 17x \geq 3$. Следовательно, уравнение (1) не имеет решений.

Ответ: \emptyset .

4.175. Решить уравнение $\sin^{2n}x + \cos^{2n}x = 1$, где n — целое положительное число.

Решение.

Очевидно, уравнение имеет корни, кратные $\frac{\pi}{2}$, т. е. $x = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$. Покажем, что уравнение $\sin^{2n}x + \cos^{2n}x = 1$ не имеет других корней. Пусть $x_0 \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$; тогда $\sin^2 x_0 < 1$ и $\cos^2 x_0 < 1$, откуда следует, что при $n > 1$ будет $\sin^{2n} x_0 < \sin^2 x_0$ и $\cos^{2n} x_0 < \cos^2 x_0$; следовательно, $\sin^{2n} x_0 + \cos^{2n} x_0 < \sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решить уравнения (4.176—4.180).

4.176. $\sin x + \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right| = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin x + \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right| = 0 &\Leftrightarrow \sin x + |\sin x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x + \sin x = 0, \\ \sin x < 0, \\ \sin x - \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x = 0, \\ x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$.

4.177. $\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \cos 2x - 1} = 2\sin x$.

Решение.

Областью определения данного уравнения являются все значения x , при которых $\begin{cases} 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \cos 2x - 1 \geq 0, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$ (2)

Так как $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 - \sin x$, то неравенство (1) запишется в виде

$$\cos 2x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}.$$

Учитывая, что из неравенства (2) $\sin x \geq 0$, окончательно записываем $0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$.

Решим исходное уравнение:

$$\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\cos 2x-1}=2\sin x \Rightarrow 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\cos 2x-1=4\sin^2 x \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-\sin x=4\sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 x+\sin x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=-\frac{1}{2}, \\ \sin x=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Из этих значений только $\sin x = \frac{1}{3}$ удовлетворяет условию $0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$. Решив уравнение $\sin x = \frac{1}{3}$, найдем $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$4.178. \operatorname{tg} \frac{\pi}{x^2+4x+7} = \sqrt{3} \frac{1}{\sin(\pi + \frac{\pi x}{4})}. \quad (1)$$

Решение.

Имеем $\operatorname{tg} \frac{\pi}{x^2+4x+7} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{(x+2)^2+3}$. Так как $0 < \frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \frac{\pi}{3}$, а на промежутке $[0; \frac{\pi}{3}]$ функция $\operatorname{tg} x$ возрастает, то

$$\operatorname{tg} 0 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}, \text{ т. е. } 0 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \sqrt{3}. \quad (2)$$

Значит, правая часть уравнения (1) должна быть положительной. Более того, поскольку $\sin\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right) \leq 1$, получим

$$\sqrt{3} \frac{1}{\sin(\pi + \frac{\pi x}{4})} \geq \sqrt{3}. \quad (3)$$

Анализируя неравенства (2) и (3), получаем систему
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{(x+2)^2+3} = \sqrt{3}, \\ \sqrt{3} \frac{1}{\sin(\pi + \frac{\pi x}{4})} = \sqrt{3}. \end{cases}$$
 Первое уравнение системы обращается в верное равенство только при $x = -2$.

Поскольку это значение удовлетворяет и второму уравнению системы, то $x = -2$ — единственный корень уравнения (1).

Ответ: $x = -2$.

$$4.179. \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right).$$

Решение.

Пусть $\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = y$, тогда $\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2} = \pi - 3\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \pi - 3y$ и исходное уравнение примет вид

$$\sin 3y = 2\sin y \Leftrightarrow 3\sin y - 4\sin^3 y - 2\sin y = 0 \Leftrightarrow \sin y(4\sin^2 y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ y_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ y_3 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Возвращаясь к аргументу x по формуле $x = \frac{3\pi}{5} - 2y$, окончательно получим три семейства решений исходного уравнения:

$$x_1 = \frac{3\pi}{5} - 2\pi k, \quad x_2 = \frac{3\pi}{5} + (-1)^k \frac{\pi}{3} - \pi k, \quad x_3 = \frac{3\pi}{5} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} - \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{3\pi}{5} - 2\pi k, \quad x_2 = \frac{3\pi}{5} + (-1)^k \frac{\pi}{3} - \pi k, \quad x_3 = \frac{3\pi}{5} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} - \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

4.180. $\sin^{1991} x + \cos^{1991} x = 1.$

Решение.

Преобразуем исходное уравнение: $\sin^{1991} x + \cos^{1991} x = 1 \Leftrightarrow \sin^{1991} x + \cos^{1991} x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x (\sin^{1989} x - 1) = \cos^2 x (1 - \cos^{1989} x).$

Левая часть последнего уравнения меньше или равна нулю, а правая — больше или равна нулю. Таким образом, равенство

возможно тогда и только тогда, когда и левая, и правая части уравнения равны нулю: $\begin{cases} \sin^2 x (\sin^{1989} x - 1) = 0, \\ \cos^2 x (1 - \cos^{1989} x) = 0. \end{cases}$ Если $\sin x = 0$, то $\cos x \neq 0$, и тогда необходимо, чтобы $1 - \cos^{1989} x = 0$. Если $\sin x = 1$, то $\cos x = 0$.

Итак, $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 2\pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4.181. Найти все решения уравнения $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

Решение.

Области определения уравнения не принадлежат значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$, при которых не определен $\operatorname{tg} x$. Далее преобразуем исходное уравнение. Имеем

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = 0 \Rightarrow \sin x - \sin^2 x + \cos 2x = 0 \quad (\text{при } \cos x \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(первое семейство значений x решением исходного уравнения не является, так как не входит в область определения уравнения).

Выберем из значений $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$, те, при которых $\operatorname{tg} x < 0$. Пусть k — четное число, т. е. $k = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ Определим знак тангенса при этих значениях } x: \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} < 0. \text{ Значит,}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ удовлетворяют условию задачи.}$$

Если k — нечетное число, т. е. $k = 2n + 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}$. Так как $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1)\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} > 0$, то значения

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ условию задачи не удовлетворяют.}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.182. Найти корни уравнения $\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$.

Решение.

Воспользовавшись формулой $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$, перепишем исходное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 14x + \cos 4x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 12x - \cos 14x) = 0 \Leftrightarrow \sin 13x \sin x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 13x = 0, \\ \sin x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{13}k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, что второе семейство содержится в первом, следовательно, решением заданного уравнения является семейство

$$x = \frac{\pi}{13}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Осталось выделить из найденных значений те, которые удовлетворяют неравенству $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$.

Имеем $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Таким образом, придавая параметру k целые значения, нужно выбрать из них те, при которых $\frac{\pi}{13}k \in (0; 2)$. Из системы неравенств $0 < \frac{\pi}{13}k < 2$ находим, что $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Ответ: $\frac{\pi}{13}, \frac{2\pi}{13}, \frac{3\pi}{13}, \frac{4\pi}{13}, \frac{5\pi}{13}, \frac{6\pi}{13}, \frac{7\pi}{13}, \frac{8\pi}{13}$.

Решить уравнения (4.183—4.191).

$$4.183. \frac{1 - \operatorname{tg} z + \dots + (-1)^n \operatorname{tg}^n z + \dots}{1 + \operatorname{tg} z + \dots + \operatorname{tg}^n z + \dots} = 1 + \sin 2z, \quad |\operatorname{tg} z| < 1.$$

Решение.

Область допустимых значений данного уравнения $\cos z \neq 0$. Заметим, что в числителе дроби — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 1$, $q = -\operatorname{tg} z$, а в знаменателе — сумма членов бесконечно

убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 1$, $q = \operatorname{tg} z$. Воспользовавшись формулой $S = \frac{b_1}{1-q}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \operatorname{tg} z} = 1 + \sin 2z &\Leftrightarrow \frac{1 - \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg} z} = 1 + \sin 2z \Leftrightarrow \frac{1 - \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg} z} = 1 + \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg}^2 z} \Leftrightarrow \operatorname{tg} z (\operatorname{tg}^2 z + \operatorname{tg} z + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} z = 0, \\ \operatorname{tg}^2 z + \operatorname{tg} z + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \emptyset, \quad (D < 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4.184. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$.

Решение.

Воспользовавшись тождеством $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$, получим

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \Leftrightarrow \sin^8 x + \cos^8 x = \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x = \frac{17}{32} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^4 2x = \frac{17}{32} \Leftrightarrow \sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + \frac{15}{4} = 0. \end{aligned}$$

Решив полученное биквадратное уравнение, найдем: $\sin^2 2x = 4 \pm \frac{7}{2}$; $\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{8}\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{2k+1}{8}\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4.185. $\cos y^2 + \cos y = 0$.

Решение.

Имеем

$$\begin{aligned} \cos y^2 + \cos y = 0 &\Leftrightarrow \cos y^2 = -\cos y \Leftrightarrow \cos y^2 = \cos(\pi - y) \Leftrightarrow y^2 = \pm(\pi - y) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \pi - y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ y^2 = -\pi + y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - \pi(2n+1) = 0, n \in \mathbb{Z}, \\ y^2 - y + \pi(1-2n) = 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\pi(2n+1)}}{2}, n = 0, 1, 2, \dots, \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\pi(2n-1)}}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4\pi(2n+1)}}{2}, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ответ: $y = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4\pi(2n+1)}}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$

4.186. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 16 \cos 2x$.

Решение.

Области определения уравнения принадлежат значения x , при которых определены $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{tg} x$, т. е. при которых

$\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. Следовательно, $x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Преобразуем исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x &= 16 \cos 2x \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 16 \cos 2x \Leftrightarrow \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 16 \cos 2x \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 16 \cos 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 16 \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x \left(\frac{1 - 16 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \frac{1 - 16 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ 1 - 16 \sin^2 x \cos^2 x = 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ 1 - 4 \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ \cos 4x = \frac{1}{2}, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x_2 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

4.187. $\operatorname{ctg}(2\pi x^2) + \operatorname{ctg}(4\pi x) = 0.$

Решение.

Область допустимых значений данного уравнения $\begin{cases} \sin(2\pi x^2) \neq 0, \\ \sin(4\pi x) \neq 0. \end{cases}$ Из условия получаем:

$$\frac{\sin(2\pi x^2 + 4\pi x)}{\sin(2\pi x^2) \sin(4\pi x)} = 0 \Rightarrow \sin(2\pi x^2 + 4\pi x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi x^2 + 4\pi x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - n = 0, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2n}}{2}, n \in \mathbb{Z}, 4+2n \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2n}}{2}, n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Учитывая область допустимых значений, окончательно получаем: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2n}}{2}, n \geq 1, n \neq 2(l^2 - 1), n, l \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2n}}{2}, n \geq 1, n \neq 2(l^2 - 1), n, l \in \mathbb{Z}.$

4.188. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin 3x + 5.$

Решение.

Так как $|\cos x| \leq 1, \sin x \geq -1$, то $|\cos 4x - \cos 2x| \leq 2, \sin 3x + 5 \geq 4$. Итак, левая часть исходного уравнения не превосходит 4, правая часть не меньше 4. Следовательно, $|\cos 4x - \cos 2x| = 2$ (и тогда либо $\cos 4x = -1$ и $\cos 2x = 1$, либо $\cos 4x = 1$ и $\cos 2x = -1$) и $\sin 3x = -1$. Рассмотрим возможные случаи:

$$a) \begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos 2x = 1, \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset;$$

$$b) \begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \cos 2x = -1, \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}l = \frac{4l-1}{6}\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi, m \in \mathbb{Z}.$

4.189. $\frac{3 \sin 4x + 2 \sin 2x}{3 \cos 4x + 2 \cos 2x + 3} + 2 \operatorname{tg} x = 0.$

Решение.

Область определения исходного уравнения $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ 3 \cos 4x + 2 \cos 2x + 3 \neq 0. \end{cases}$

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{3 \sin 4x + 2 \sin 2x}{3 \cos 4x + 2 \cos 2x + 3} + 2 \operatorname{tg} x &= 0 \Leftrightarrow \frac{6 \sin 2x \cos 2x + 2 \sin 2x}{3 \cos^2 2x - 3 \sin^2 2x + 2 \cos 2x + 3 \sin^2 2x + 3 \cos^2 2x} + 2 \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 \sin 2x (3 \cos 2x + 1)}{2 \cos 2x (3 \cos 2x + 1)} + 2 \operatorname{tg} x &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cos 2x + 1 \neq 0, \\ \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + 2 \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cos 2x + 1 \neq 0, \\ \frac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x} + 2 \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cos 2x + 1 \neq 0, \\ \sin x = 0, \\ \frac{3 \cos 2x + 1 \neq 0,}{\frac{\cos x}{\cos 2x} + \frac{1}{\cos x} = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 3 \cos 2x + 1 \neq 0, \\ \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 1 = 0 \\ \cos 2x \cos x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 3 \cos 2x + 1 \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ 3 \cos^2 x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 3(2 \cos^2 x - 1) + 1 \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ 3 \cos^2 x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 2(3 \cos^2 x - 1) \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ 3 \cos^2 x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \in \mathbb{Q} \end{cases} &\Leftrightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.190. $(1+k) \frac{\cos x \cos(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)} = 1 + k \cos 2x$.

Решение.

Запишем данное уравнение в виде

$$(1+k) \cos x \cos(2x-\alpha) = \cos(x-\alpha) + k \cos 2x \cos(x-\alpha). \quad (1)$$

Так как $\cos x \cos(2x-\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(3x-\alpha) + \cos(x-\alpha))$ и $\cos(x-\alpha) \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos(3x-\alpha) + \cos(x+\alpha))$, то уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} k(\cos(x-\alpha) - \cos(x+\alpha)) &= \cos(x-\alpha) - \cos(3x-\alpha) \Leftrightarrow k \sin x \sin \alpha = \sin(2x-\alpha) \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin(2x-\alpha) = k \sin \alpha \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \frac{\alpha}{2} + (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin(k \sin \alpha) + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для того чтобы второе выражение для x имело смысл, k и α должны быть связаны условием $|k \sin \alpha| \leq 1$.

Ответ: $x_1 = \pi n, x_2 = \frac{\alpha}{2} + (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin(k \sin \alpha) + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, |k \sin \alpha| \leq 1$.

4.191. $\operatorname{ctg}(\sin x) = 1$.

Решение.

Имеем: $\operatorname{ctg}(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Но $|\sin x| \leq 1$, поэтому последнее уравнение имеет смысл только при $k = 0$, т.

е. получаем $\sin x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.192. Решить уравнение $\sin a x \sin b x = \sin c x \sin d x$, где a, b, c и d — последовательные положительные члены арифметической прогрессии.

Решение.

Так как числа a, b, c, d являются последовательными членами арифметической прогрессии, то можно принять $b = a + r$, $c = a + 2r$, $d = a + 3r$ (r — разность прогрессии). Воспользовавшись формулой $2\sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, запишем

$$\text{данное уравнение в виде } \cos(2\alpha + r)x - \cos(2\alpha + 5r)x = 0 \Leftrightarrow \sin(2\alpha + 3r)x \sin 2rx = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi k}{2\alpha + 3r}, \quad x_2 = \frac{\pi k}{2r}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Написанные выражения имеют смысл, так как $2\alpha + 3r = b + c > 0$ и $r \neq 0$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi k}{2\alpha + 3r}$, $x_2 = \frac{\pi k}{2r}$, где r — разность прогрессии.

Решить уравнения (4.193—4.198).

$$4.193. \log_{\frac{1}{2} \sin 2x} \sin x = \frac{1}{2}.$$

Решение.

$$\text{Область допустимых значений данного уравнения } \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \sin x \cos x < 1. \end{cases}$$

Упростим исходное уравнение, переходя к основанию $\sin x$:

$$\log_{\frac{1}{2} \sin 2x} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\log_{\sin x} \sin x}{\log_{\sin x} \frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log_{\sin x} \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log_{\sin x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \log_{\sin x} \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $1 + \log_{\sin x} \cos x = 2 \Leftrightarrow \log_{\sin x} \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Учитывая область определения,

$$\text{находим } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{4}(8k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4}(8k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.194. \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 \cos^2 x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}.$$

Решение.

Правая часть уравнения теряет смысл при $x = \pi k$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$, так как при $x = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, не определена функция

$\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, при $x = (2l + 1)\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, не определена функция $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, а при $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, знаменатель правой части обращается

в нуль. При $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, имеем $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = -\frac{2 \cos x}{\sin x}$. Следовательно, при $x \neq \pi k$ и $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $k, m \in \mathbb{Z}$, правая часть уравнения равна $-2 \sin x \cos x$.

Левая часть уравнения не имеет смысла при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}l$, $k, l \in \mathbb{Z}$, а при прочих значениях равна $-\operatorname{tg} x$, так как

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Итак, если $x \neq \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} l$ ($k, m, l \in \mathbb{Z}$), то исходное уравнение имеет вид $\operatorname{tg} x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow x = \pi k$ и $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$). Отсюда следует, что исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: \emptyset .

$$4.195. \cos(\pi x^2) = -\frac{1}{2}.$$

Решение.

Имеем

$$\cos(\pi x^2) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \pi x^2 = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi x^2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x^2 = \pm \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{2}{3} + 2k, & k \in \mathbb{Z}, & (1) \\ x^2 = -\frac{2}{3} + 2k, & k \in \mathbb{Z}. & (2) \end{cases}$$

Но $x^2 \geq 0$; поэтому из уравнения (1) получаем $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3} + 2k}, k = 0, 1, 2, \dots$, а из уравнения (2) — $x = \pm \sqrt{-\frac{2}{3} + 2k}, k = 1, 2, \dots$

$$\text{Ответ: } x_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{3} + 2k}, k = 0, 1, 2, \dots; x_2 = \pm \sqrt{-\frac{2}{3} + 2k}, k = 1, 2, \dots$$

$$4.196. \cos \frac{\pi x}{31} \cos \frac{2\pi x}{31} \cos \frac{4\pi x}{31} \cos \frac{8\pi x}{31} \cos \frac{16\pi x}{31} = \frac{1}{32}.$$

Решение.

Преобразуем данное уравнение, умножая обе его части на $32 \sin \frac{\pi x}{31}$ и применяя несколько раз формулу

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

:

$$\sin \frac{32\pi x}{31} = \sin \frac{\pi x}{31} \text{ или } \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{33\pi x}{62} = 0. \quad (1)$$

Отсюда находим два семейства корней уравнения (1): $x_1 = 2n, x_2 = \frac{31}{33}(3n+1), n \in \mathbb{Z}$.

Так как в процессе решения обе части данного уравнения умножались на множитель $32 \sin \frac{\pi x}{31}$, который может обращаться в нуль, то уравнение (1) может иметь корни, являющиеся посторонними для исходного уравнения. Посторонними корнями будут те и только те корни уравнения

$$\sin \frac{\pi x}{31} = 0, \quad (2)$$

которые не удовлетворяют исходному уравнению.

Корни уравнения (2) задаются формулой $x = 31k, k \in \mathbb{Z}$, (3) и, как легко видеть, не удовлетворяют исходному уравнению. Поэтому из пайденого семейства корней уравнения (1) следует исключить все те, которые имеют вид (3). Для корней первого семейства это приводит к равенству $2n = 31k$, возможному только при четном k , т. е. при $k = 2l$ и $n = 31l, l \in \mathbb{Z}$. Для

корней второго семейства аналогично получаем равенство $\frac{31}{33}(2n+1) = 31k$ или $2n+1 = 33k$, возможное только при нечетном k , т. е. при $k = 2l+1$ и $n = 33l+16, l \in \mathbb{Z}$.

Итак, корни исходного уравнения таковы: $x_1 = 2n, n \neq 31l; x_2 = \frac{31}{33}(2n+1), n \neq 33l + 16, l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x_1 = 2n, n \neq 31l; x_2 = \frac{31}{33}(2n+1), n \neq 33l + 16, l \in \mathbb{Z}$.

4.197. $x^2 + 6x\sin(xy) + 9 = 0$.

Решение.

Решим данное уравнение как квадратное относительно x : $D = 36\sin^2(xy) - 36 = 36(\sin^2(xy) - 1)$. Уравнение имеет решение, если $D \geq 0$, т. е. если $36(\sin^2(xy) - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2(xy) \geq 1$. Так как неравенство $\sin^2(xy) > 1$ невозможно, то $\sin^2(xy) = 1$; поэтому $D = 0$.

Итак, имеем два случая:

$$1) \begin{cases} \sin(xy) = 1, \\ x = -3\sin(xy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = -3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin(xy) = -1, \\ x = -3\sin(xy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = -3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-3; -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi k\right); \left(-3; -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

4.198. $\operatorname{tg}(\pi \cos x) = \operatorname{ctg}(\pi \sin x)$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi \cos x) &= \operatorname{ctg}(\pi \sin x) \Leftrightarrow \frac{\sin(\pi \cos x)}{\cos(\pi \cos x)} = \frac{\cos(\pi \sin x)}{\sin(\pi \sin x)} \Rightarrow \sin(\pi \cos x) \sin(\pi \sin x) = \cos(\pi \cos x) \cos(\pi \sin x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(\pi \cos x) \cos(\pi \sin x) - \sin(\pi \cos x) \sin(\pi \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos(\pi \cos x + \pi \sin x) = 0 \Leftrightarrow \pi \cos x + \pi \sin x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1+2k}{2\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+2k}{2\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+2k}{2\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Так как $-1 \leq \frac{1+2k}{2\sqrt{2}} \leq 1, k \in \mathbb{Z}$, то $-\sqrt{2} \leq 1+2k \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{2}-1}{2} \leq k \leq \frac{2\sqrt{2}-1}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -1$ или $k = 0$. Тогда, если

$$1) k = 1, \text{ то } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) k = 0, \text{ то } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Объединив решения, имеем $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.199. Доказать, что уравнение $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2$ не имеет решений.

Решение.

Разделив данное уравнение почленно на 2 и заметив, что $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, получим равносильное уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin 4x = 1$. Это равенство возможно только в том случае, когда $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$ и $\sin 4x = \pm 1$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x = \frac{1}{4}(\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Приравняв оба значения, придем после сокращения на π к равенству $-\frac{1}{3} \pm \frac{1}{2} + 2n = \pm \frac{1}{8} + \frac{m}{2}$ или после умножения на 24 к равенству $12m - 48n = -8 \pm 9$. При любых целых m и n слева стоит четное число, а справа — нечетное (1 или -17). Последнее равенство при целых m, n невозможно, т. е. исходное уравнение не имеет решений. **QED.**

4.200. Решить уравнение $\cos(x - y) - 2\sin x + 2\sin y = 3$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение:

$$\cos(x - y) - 2\sin x + 2\sin y = 3 \Leftrightarrow -2(\sin x - \sin y) = (1 - \cos(x - y)) + 2 \Leftrightarrow -4\sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2} = 2\sin^2 \frac{x - y}{2} + 2.$$

Пусть $z = \sin \frac{x - y}{2}$, тогда получим уравнение $z^2 + 2\cos \frac{x + y}{2} \cdot z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -\cos \frac{x + y}{2} \pm \sqrt{\cos^2 \frac{x - y}{2} - 1}$. Отсюда следует, что $\cos^2 \frac{x + y}{2} - 1 \geq 0$. Но $\cos^2 \frac{x + y}{2} \leq 1$, следовательно, $\cos^2 \frac{x + y}{2} = 1$, и тогда $z = -\cos \frac{x + y}{2}$.

В итоге приходим к системе тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{x + y}{2} = 1, \\ \sin \frac{x - y}{2} = -\cos \frac{x + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x + y}{2} = 1, \\ \sin \frac{x - y}{2} = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x + y}{2} = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{x - y}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(k + n), \quad k, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k - n), \quad k, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x + y}{2} = -1, \\ \sin \frac{x - y}{2} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x + y}{2} = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{x - y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(k + n), \quad k, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k - n), \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi(k + n); \frac{\pi}{2} + 2\pi(k - n)\right); \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi(k + n); \frac{\pi}{2} + 2\pi(k - n)\right), k, n \in \mathbb{Z}$.

4.201. Решить уравнение с параметром a : $\sin^4 x + \cos^4 x = a$.

Решение.

Воспользовавшись формулами понижения степени, получим:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a \Leftrightarrow \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = a \Leftrightarrow \cos^2 2x = 2a - 1. \quad (1)$$

Найдем контрольные значения параметра a . В данном случае это такие значения параметра, при которых правая часть уравнения 0 или 1 (если $2a - 1 < 0$ или $2a - 1 > 1$, то уравнение (1) не имеет решения).

Если $2a - 1 = 0$, то $a = \frac{1}{2}$; если $2a - 1 = 1$, то $a = 1$.

Далее рассмотрим уравнение (1) в каждом из следующих пяти случаях.

- 1) Если $a < \frac{1}{2}$, то $2a - 1 < 0$ и уравнение (1) не имеет корней.
- 2) Если $a = \frac{1}{2}$, то уравнение (1) принимает вид $\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- 3) Если $\frac{1}{2} < a < 1$, то $0 < 2a - 1 < 1$. Перепишем уравнение (1) в виде $\frac{1 + \cos 4x}{2} = 2a - 1$, и далее $\cos 4x = 4a - 3$. Так как $\frac{1}{2} < a < 1$, то $2 < 4a < 4; -1 < 4a - 3 < 1$. Значит, уравнение $\cos 4x = 4a - 3$ имеет решение. Получим

$$4x = \pm \arccos(4a - 3) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{4} \arccos(4a - 3) + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$
- 4) Если $a = 1$, то уравнение (1) принимает вид: $\cos^2 2x = 1$. Из этого уравнения находим $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- 5) Если $a > 1$, то $2a - 1 > 1$ и уравнение (1) не имеет корней.

Заметим, что если $a = \frac{1}{2}$ или $a = 1$, то решение тоже можно записать в виде.

Ответ: 1) если $a < \frac{1}{2}$; $a > 1$, то корней нет;

$$2) \text{ если } \frac{1}{2} \leq a \leq 1, \text{ то } x = \pm \frac{1}{4} \arccos(4a - 3) + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

4.202. При каких значениях параметров a, b, c уравнение $a \cos(3x - 90^\circ) + b \sin(2x + 540^\circ) + c \sin(x + 1260^\circ) = 0$ имеет корни $x_1 = 30^\circ, x_2 = 45^\circ, x_3 = 60^\circ$?

Решение.

Преобразуем исходное уравнение: $a \cos(3x - 90^\circ) + b \sin(2x + 540^\circ) + c \sin(x + 1260^\circ) = 0 \Leftrightarrow a \sin 3x - b \sin 2x - c \sin x = 0 \Leftrightarrow a(3 \sin x - 4 \sin^3 x) - 2b \sin x \cos x - c \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(3a - 4a \sin^2 x - 2b \cos x - c) = 0 \Leftrightarrow \sin x(4a \cos^2 x - 2b \cos x - a - c) = 0$. Итак, исходное уравнение равносильно последнему уравнению, которое равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ 4a \cos^2 x - 2b \cos x - a - c = 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой совокупности, находим, что $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, ни при каком $n \in \mathbb{Z}$ мы не получаем решений из условия задачи. Поэтому требуемые решения должно иметь второе уравнение совокупности.

Так как левая часть этого уравнения — квадратный трехчлен относительно $\cos x$, то рассматриваемое уравнение будет иметь более двух решений только в случае $a = b = c = 0$.

Ответ: при $a = b = c = 0$.

4.203. При каких значениях a уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = a$ имеет решения? Найти эти решения.

Решение.

Умножив правую часть уравнения на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, приведем его к виду

$$(1 - a) \sin^2 x - \sin x \cos x - (a + 2) \cos^2 x = 0. \quad (1)$$

Предположим сначала, что $a \neq 1$. Тогда из (1) следует, что $\cos x \neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $\sin x = \cos x = 0$, что невозможно. Разделив (1) на $\cos^2 x \neq 0$ и обозначив $\operatorname{tg} x = y$, получим уравнение

$$(1 - a)y^2 - y - (a + 2) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) имеет решения в том и только в том случае, когда корни уравнения (2) вещественные, т. е. когда его дискриминант

$$D = -4a^2 - 4a + 9 \geq 0. \quad (3)$$

Решая неравенство (3), находим $-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}$. Пусть y_1 и y_2 — корни уравнения (2). Тогда соответствующие решения уравнения (1) имеют вид $x_1 = \arctg y_1 + \pi k$, $x_2 = \arctg y_2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим случай, когда $a = 1$. Тогда уравнение (1) запишется в виде $\cos x(\sin x + 3\cos x) = 0$ и имеет решения

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x_2 = -\arctg 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: 1) при $a = 1$ — $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = -\arctg 3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) при $-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}$ — $x_1 = \arctg y_1 + \pi k$, $x_2 = \arctg y_2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где y_1 и y_2 — корни уравнения

$$(1-a)y^2 - y - (a+2) = 0;$$

3) при других значениях a решений нет.

4.204. При каких значениях параметра a равносильны уравнения

$$2\sin^2 x - (1-a)\sin^2 x + (2a^3 - 2a - 1)\sin x = 0 \quad (1)$$

и

$$2\sin^6 x + \cos 2x = 1 - a - 2a^3 + a\cos^2 x? \quad (2)$$

Решение.

Заметим, что $x = \pi$ — корень уравнения (1) при любом значении параметра a . А тогда по условию задачи это значение $x = \pi$ должно быть и корнем уравнения (2). Подставляя $x = \pi$ в (2), получаем, что должно выполняться равенство $a^3 = a \Leftrightarrow a(a^2 - 1) = 0$. Отсюда следует, что искомое значение параметра a может принадлежать только множеству $\{-1; 0; 1\}$.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнения (1) и (2) запишутся в виде $\sin x(\sin^2 x - 1)(2\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1) = 0$ и $\sin^2 x(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1) = 0$ соответственно. Замечая, что $2\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1 \neq 0$ и $\sin^2 x + 1 \neq 0$, приходим к выводу, что при $a = 0$ уравнения (1) и (2) равносильные.

Пусть $a = -1$. В этом случае приходим к рассмотрению уравнений $\sin x(2\sin^6 x - 2\sin^2 x - 1) = 0$ и $\sin^2 x(2\sin^4 x - 3) = 0$, которые будут равносильными, так как $2\sin^6 x - 2\sin^2 x - 1 = 2\sin^2 x(\sin^4 x - 1) - 1 < 0$ и $2\sin^4 x - 3 < 0$.

Если же $a = 1$, то уравнения (1) и (2) запишутся в виде: $\sin x(2\sin^6 x - 1) = 0$ и $\sin^2 x(2\sin^4 x - 1) = 0$ соответственно, и, таким

образом, с одной стороны $\sin x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, а с другой — $\sin x = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Поэтому при $a = 1$ уравнения (1) и (2) не равносильные.

Ответ: $a \in \{-1; 0\}$.

4.205. Решить уравнение $\sqrt{1+a}\sin x + \cos x = 1 + \sqrt{1-a}$ с параметром a .

Решение.

Воспользовавшись формулой $A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x \right) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \varphi)$,

где $\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, перепишем исходное уравнение в виде $\sin(x + \varphi) = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{\sqrt{a+2}}$ ($a+1 \geq 0$,

$A = \sqrt{1+a}$, $B = 1$). Полученное уравнение имеет смысл, только если $\left| \frac{1 + \sqrt{1-a}}{\sqrt{a+2}} \right| \leq 1$. Таким образом, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+2}} \leq 1, \\ a+1 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+1 \geq 0, \\ 1-a \geq 0, \\ a+2 > 0, \\ (1+\sqrt{1-a})^2 \leq a+2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in [-1; 1], \\ \sqrt{1-a} \leq a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in [-1; 1], \\ a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1 \right].$$

Далее из уравнения $\sin(x+\varphi) = \frac{1+\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+2}}$ получаем решение: $x+\varphi = (-1)^n \arcsin \frac{1+\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Так как

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2+a}}, \text{ то окончательно получаем: } x = -\arcsin \frac{1}{\sqrt{2+a}} + (-1)^n \arcsin \frac{1+\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, a \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1 \right].$$

Ответ: $x = -\arcsin \frac{1}{\sqrt{2+a}} + (-1)^n \arcsin \frac{1+\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, a \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1 \right]$.

4.206. При каких значениях параметра a уравнение

$$\cos \sqrt{a-x^2} = 1 \tag{1}$$

имеет ровно восемь корней?

Решение.

Из вида аргумента функции косинус следует, что $a \geq 0$ и $|x| \leq \sqrt{a}$. Тогда из свойства четности левой части уравнения (1) по x следует, что если $x = 0$ — корень уравнения, то на отрезке $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$ будет нечетное число корней исходного уравнения. Учитывая это, рассмотрим уравнение $\sqrt{a-x^2} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$, полученное из уравнения (1). Это уравнение равносильно уравнению $x^2 = a - 4\pi^2 k^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{a - 4\pi^2 k^2}$.

Чтобы этих решений на отрезке $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$ было четное число, должно выполняться неравенство $a - 4\pi^2 k^2 > 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(k - \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \right) \left(k + \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \right) < 0$. Из этого неравенства относительно k следует, что среди всех его целочисленных решений, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\sqrt{a}}{2\pi}; \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \right)$, неотрицательных будет четыре (а значит, решений исходного уравнения восемь) только при $3 < \frac{\sqrt{a}}{2\pi} < 4$, т. е. при условии $36\pi^2 < a < 64\pi^2$.

Ответ: $36\pi^2 < a < 64\pi^2$.

4.207. Определить все значения параметра a , при которых уравнение $\sin^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0$ имеет решения. Найти эти решения.

Решение.

Воспользовавшись формулами $\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ и обозначив $\cos 2x = t$, запишем данное уравнение в виде

$$t^2 - 6t + 4a^2 - 3 = 0. \tag{1}$$

Исходное уравнение будет иметь решения при тех и только при тех значениях a , при которых корни t_1 и t_2 уравнения (1) вещественные и по крайней мере один из этих корней по абсолютной величине не превосходит единицы.

Решив уравнение (1), находим: $t_1 = 3 - 2\sqrt{3-a^2}$, $t_2 = 3 + 2\sqrt{3-a^2}$. Следовательно, корни уравнения (1) вещественные, если $|a| \leq \sqrt{3}$. \tag{2}

Если это условие выполнено, то $t_2 > 1$, и поэтому этот корень можно отбросить. Таким образом, задача сводится к отысканию тех значений a , удовлетворяющих условию (2), при которых $|t_1| \leq 1$, т. е. $-1 \leq 3 - 2\sqrt{3 - a^2} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq -2\sqrt{3 - a^2} \leq -2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{3 - a^2} \leq 2$. Так как неравенство $\sqrt{3 - a^2} \leq 2$ выполняется при $|a| \leq \sqrt{3}$, то остается решить неравенство $1 \leq \sqrt{3 - a^2} \Leftrightarrow |a| \leq \sqrt{2}$.

Итак, исходное уравнение разрешимо, если $|a| \leq \sqrt{2}$, и имеет решения $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(3 - 2\sqrt{3 - a^2}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(3 - 2\sqrt{3 - a^2}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}, |a| \leq 2$.

4.208. При каких значениях параметра $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение $\sin 2x + \sin x + \sin(x - a) = \sin a + \sin(x + a)$ имеет на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ ровно пять различных корней?

Решение.

Исходное уравнение преобразуем к виду $(\sin x - \sin a)(2\cos x + 1) = 0$, откуда рассматриваемое уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\begin{cases} 2\cos x + 1 = 0, \\ \sin x = \sin a. \end{cases} \quad (2)$

Первое уравнение этой совокупности имеет на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ три корня: $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. Отсюда следует, что требование задачи будет выполнено, если второе уравнение совокупности будет иметь на рассматриваемом промежутке два корня, не совпадающих с уже найденными. Решим теперь уравнение (2) при $x \in \left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ и $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это лучше всего делать графически, рассматривая возможные варианты пересечения графиков функций $y = \sin x, y = c$, где $c = \sin a$.

В случае $a = -\frac{\pi}{2}$ находим, что $x_1 = -\frac{\pi}{2}$.

При $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right)$ получаем, что $x = x_2$ и $x = x_3$, где $x_2 = -a - \pi, x_3 = a$, причем эти корни не совпадают с уже найденными корнями уравнения (1), и, следовательно, эти значения a удовлетворяют требованиям задачи.

Если $a = -\frac{\pi}{3}$, то $x = -\frac{5\pi}{3}, x = -\frac{4\pi}{3}$, т. е. исходное уравнение имеет четыре различных корня.

При $a \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ находим, что $x = x_2, x = x_3$ и $x = x_4$, где $x_4 = \pi - a$. Ни один из этих корней не совпадает с корнями уравнения (1).

Если $a \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, то уравнение (2) имеет четыре корня: x_1, x_2, x_3 и x_4 , отличных от корней уравнения (1).

При $a = \frac{\pi}{3}$ уравнение (2) также имеет четыре корня, но два из них, а именно $x = -\frac{2}{3}\pi$ и $x = \frac{2}{3}\pi$, совпадают с корнями уравнения (1), т. е. исходное уравнение имеет пять различных корней.

Наконец, если $a = \frac{\pi}{2}$, то уравнение (2) имеет корни $x = -\frac{3}{2}\pi, x = \frac{\pi}{2}$, т. е. это значение параметра a удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

4.209. Решить уравнение с параметром a .

$$(a-1)\sin^2 x - 2(a+1)\sin x + 2a-1 = 0. \quad (1)$$

Решение.

Пусть $y = \sin x$, тогда уравнение (1) примет вид

$$(a-1)y^2 - 2(a+1)y + 2a-1 = 0. \quad (2)$$

Первым контрольным значением параметра a будет $a = 1$, которое обращает в нуль коэффициент при y^2 .

При $a = 1$ уравнение (2) запишется в виде $-4y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}$, т. е. $\sin x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим случай, когда $a \neq 1$. Найдем дискриминант уравнения (2). Имеем $\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (a-1)(2a-1) = -a^2 + 5a$.

Вторыми контрольными значениями параметра a будут те значения, при которых $D = 0$. Это будут значения $a = 0, a = 5$. Заметим, что $D < 0$, если $a < 0$ или $a > 5$; $D \geq 0$, если $0 \leq a \leq 5$.

Следовательно, нам необходимо рассмотреть уравнение (2) в каждом из следующих случаев: $\begin{cases} 0 \leq a \leq 5, \\ a \neq 1; \end{cases} a > 5$.

Если $a < 0$ или $a > 5$, то уравнение (2) не имеет корней.

В случае $\begin{cases} 0 \leq a \leq 5, \\ a \neq 1 \end{cases}$ уравнение (2) имеет два действительных корня: $y_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{5a-a^2}}{a-1}$. Далее, так как $y = \sin x$, то должны выполняться следующие двойные неравенства: $-1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1$.

Легко заметить, что $y_1 = \frac{a+1+\sqrt{5a-a^2}}{a-1}$ удовлетворяет двойному неравенству $-1 \leq y_1 \leq 1$ лишь при $a = 0$. Действительно, если $a = 0$, то $y_1 = -1$; если $a > 0$, то $a+1 > a-1$ и тем более $a+1+\sqrt{5a-a^2} > a-1$, т. е. $y_1 > 1$.

Если $a = 0$, то уравнение $\sin x = y_1$ запишется в виде $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Будем теперь искать значения параметра a (из рассматриваемого множества $\begin{cases} 0 \leq a \leq 5, \\ a \neq 1 \end{cases}$), которые удовлетворяют системе неравенств $-1 \leq y_2 \leq 1$, т. е. системе

$$\begin{cases} \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \geq -1, \\ \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 > 0, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \geq 1-a, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \leq a-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ \sqrt{5a-a^2} \leq 2a, \\ \sqrt{5a-a^2} \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 5a-a^2 \leq 4a^2, \\ 5a-a^2 \geq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ \sqrt{5a-a^2} \geq 2a, \\ \sqrt{5a-a^2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ 5a-a^2 \geq 4a^2, \\ 5a-a^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a \leq 4, \\ 0 \leq a < 1. \end{cases}$$

Итак, на множестве $\begin{cases} 0 \leq a \leq 5, \\ a \neq 1 \end{cases}$ уравнение

$$\sin x = \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \quad (3)$$

имеет решение только в том случае, если $\begin{cases} 0 \leq a \leq 4, \\ a \neq 1. \end{cases}$ Это решение следующее: $x = (-1)^n \arcsin \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} +$

$+\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что эта запись включает в себя и рассматриваемый выше случай, когда $a = 0$.

Если $4 < a \leq 5$, то уравнение (3), а с ним и уравнение (1), не имеют корней.

Ответ: 1) если $a = 1$, то $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

2) если $\begin{cases} 0 \leq a \leq 4, \\ a \neq 1, \end{cases}$ то $x = (-1)^n \arcsin \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

3) если $a < 0, a > 4$, то уравнение не имеет корней.

4.210. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\frac{a \sin x - 2}{a - 2 \cos x} = \frac{a \cos x - 2}{a - 2 \sin x} \quad (1)$$

и определить число его корней на отрезке $[20\pi, 29\pi]$.

Решение.

Допустимые значения переменной x задаются системой $\begin{cases} \cos x \neq \frac{a}{2}, \\ \sin x \neq \frac{a}{2}. \end{cases}$ Уравнение (1) перепишем в виде
$$\frac{(\sin x - \cos x)(2a(\sin x + \cos x) - a^2 - 4)}{(a - 2 \cos x)(-a + 2 \sin x)} = 0,$$
 откуда получаем следующую совокупность двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sin x - \cos x}{(a - 2 \cos x)(-a + 2 \sin x)} = 0, \\ \sin x + \cos x = \frac{a^2 + 4}{2a}. \end{cases} \quad (2)$$

Так как $\left| \frac{a}{2} + \frac{2}{a} \right| \geq 2$, $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$, то второе уравнение совокупности (2) решений не имеет. Рассмотрим первое уравнение совокупности. Здесь числитель должен быть равен нулю, т. е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. При таких значениях x с учетом области допустимых значений находим, что $a \neq \pm\sqrt{2}$.

Итак, при $a \neq \pm\sqrt{2}$ из неравенств $20\pi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k \leq 29\pi$ следует, что $19\frac{3}{4} \leq k \leq 28\frac{3}{4}$. Этим неравенствам удовлетворяют девять целых значений k , следовательно, исходное уравнение имеет девять решений.

Пусть $a = -\sqrt{2}$, тогда первое уравнение совокупности (2) запишется в виде $\frac{\sin x - \cos x}{(\sqrt{2} \cos x + 1)(\sqrt{2} \sin x + 1)} = 0$. Исключая из множества $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, решения уравнений $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. А тогда, решая неравенство $20\pi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k \leq 29\pi$, находим, что $19\frac{3}{4} \leq 2k \leq 28\frac{3}{4}$, и, таким образом, существует пять целых значений k , поэтому исходное уравнение имеет пять решений.

Рассмотрим случай $a = \sqrt{2}$. При таком значении параметра a имеем уравнение $\frac{\sin x - \cos x}{(\sqrt{2} - 2 \cos x)(2 \sin x - \sqrt{2})} = 0$. Здесь необходимо из множества решений $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, исключить решения уравнений $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Сделав это, получим $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Решая же неравенство $20\pi \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \leq 29\pi$, окончательно получаем, что при $a = \sqrt{2}$ исходное уравнение имеет четыре решения.

Ответ: 1) если $a \neq \pm\sqrt{2}$, то девять корней $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = \overline{20, 28}$;

2) если $a = -\sqrt{2}$, то пять корней $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k = \overline{10, 14}$;

3) если $a = \sqrt{2}$, то четыре корня $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k = \overline{10, 13}$.

4.211. Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=0, \end{cases}$ удовлетворяющие условиям: $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$.

Решение.

Из данной системы сразу получаем $x+y = \pi k$, $x-y = \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Отсюда $x = \frac{k+n}{2}\pi$, $y = \frac{k-n}{2}\pi$. По условию задачи

$0 \leq k+n \leq 2$, $0 \leq k-n \leq 2$. Этим неравенствам удовлетворяют 5 пар значений k и n : $k=0, n=0$; $k=1, n=0$; $k=1, n=-1$; $k=1, n=1$; $k=2, n=0$.

Ответ: $(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $(0; \pi)$, $(\pi; 0)$, $(\pi; \pi)$.

Решить системы уравнений (4.212—4.221).

$$4.212. \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}, \\ x+y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Областью определения данной системы являются все значения x и y , кроме $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Систему будем решать методом подстановки. Из второго уравнения выразим $y = \frac{\pi}{4} - x$ и подставим в первое. Получим $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{6}. \text{ При } \operatorname{tg} x \neq -1 \text{ это уравнение равносильно уравнению}$$

$$6 \operatorname{tg}(1 - \operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg} x \Leftrightarrow 6 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctg \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \arctg \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Далее находим соответствующие значения y по формуле $y = \frac{\pi}{4} - x$: $\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{2} - \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{3} - \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\arctg \frac{1}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{2} - \pi n\right)$, $\left(\arctg \frac{1}{3} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{3} - \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$4.213. \begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{2} \sin y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y. \end{cases}$$

Решение.

Возведем оба уравнения в квадрат, сложим почленно и воспользуемся тождеством $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$. Получим $\sin^2 2x = 1$. Если $\sin 2x = 1$, то либо $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, либо $x = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. В первом случае из исходной системы найдем $\sin y = \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а во втором случае $\sin y = \cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Аналогично рассматривается случай $\sin 2x = -1$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right), \left(\frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi; \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \right), \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right),$
 $\left(\frac{3\pi}{4} + (2n+1)\pi; \frac{3\pi}{4} + (2k+1)\pi \right), n, k \in \mathbb{Z}.$

4.214. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 2y = -1,8. \end{cases}$

Решение.

Область допустимых значений данной системы $\begin{cases} \sin 2x \neq 0, \\ \sin 2y \neq 0. \end{cases}$

Воспользовавшись формулой $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \operatorname{tgy} = 2 - \operatorname{tg} x, \\ \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 y}{2 \operatorname{tg} y} = -1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tgy} = 2 - \operatorname{tg} x, \\ \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x} + \frac{1 - (2 - \operatorname{tg} x)^2}{2(2 - \operatorname{tg} x)^2} = -1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tgy} = 2 - \operatorname{tg} x, \\ 4 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tgy} = 2 - \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tgy} = 2 - \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tgy} = 2 - \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg} x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tgy} = \frac{5}{2}, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tgy} = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ y_1 = \operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ y_2 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi n \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi k; -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n \right) k, n \in \mathbb{Z}.$

4.215. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4}. \end{cases}$

Решение.

Почленно складывая и вычитая уравнения, получаем $\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

От последней системы перейдем к совокупности четырех систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi(n+k), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{12} + \pi(k-n), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi(n+k), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi(k-n), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + \pi(n+k), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \\ y = -\frac{\pi}{4} + \pi(k-n), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi(n+k), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \\ y = -\frac{\pi}{12} + \pi(k-n), \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi(n+k); \frac{\pi}{12} + \pi(k-n) \right), \left(\frac{\pi}{12} + \pi(n+k); \frac{\pi}{4} + \pi(k-n) \right),$
 $\left(-\frac{\pi}{12} + \pi(n+k); -\frac{\pi}{4} + \pi(k-n) \right), \left(-\frac{\pi}{4} + \pi(n+k); -\frac{\pi}{12} + \pi(k-n) \right), n, k \in \mathbb{Z}.$

4.216.
$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$$

Решение.

Область допустимых значений данной системы $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$ Возведя в квадрат каждое уравнение системы, получим

$$\begin{cases} \sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin^2 y, \\ \cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^2 y. \end{cases}$$

Складывая почленно первое и второе уравнения, получаем

$$\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда из второго уравнения системы находим $\cos y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+5), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}(2n+1); \frac{\pi}{4}(2k+5) \right), n, k \in \mathbb{Z}.$

4.217.
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Решение.

Первое уравнение системы можно записать в виде $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 1$, откуда в силу второго уравнения получаем:

$\sin(x+y) = \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, либо

$$x+y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

либо

$$x+y = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

Второе уравнение данной системы преобразуем следующим образом:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(x-y) = \sqrt{2} - \cos(x+y). \quad (3)$$

Если имеет место (1), то $\cos(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и из (3) находим $\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x-y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Если имеет место (2),

то $\cos(x+y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x-y) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, что невозможно.

Таким образом, для нахождения x и y мы получили систему уравнений
$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x-y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
 В соответствии с выбором

знака во втором уравнении получим два семейства решений: $x_1 = \frac{\pi}{4} + (k+n)\pi, \quad y_1 = (k-n)\pi; \quad x_2 = (k+n)\pi,$

$$y_2 = \frac{\pi}{4} + (k-n)\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + (k+n)\pi; (k-n)\pi\right), \left((k+n)\pi; \frac{\pi}{4} + (k-n)\pi\right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

$$4.218. \begin{cases} \cos x - \cos y = \sin(x+y), \\ |x| + |y| = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем первое уравнение данной системы:

$$\begin{aligned} \cos x - \cos y = \sin(x+y) &\Leftrightarrow -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} - \sin(x+y) = 0 \Leftrightarrow -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} - 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{x+y}{2} \cdot \left(\sin \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x+y}{2} \cdot \left(\sin \frac{x-y}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x+y}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x+y}{2} \cdot 2\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right) \times \\ &\times \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x+y}{2} \sin \left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} = 0, \\ \sin \left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{y}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{y}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, исходную систему уравнений можно записать в виде совокупности трех систем:

$$\begin{cases} x+y = 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ |x| + |y| = \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ |x| + |y| = \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \\ |x| + |y| = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Первая система совокупности имеет решения, если $k = 0$:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ |x|+|y|=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x, \\ 2|x|=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow |x|=\frac{\pi}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{\pi}{8}, \\ x_2=\frac{\pi}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=-x_1=\frac{\pi}{8}, \\ y_2=-x_2=-\frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Вторая и третья системы решений не имеют.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{8}$, $y = \mp \frac{\pi}{8}$.

$$4.219. \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Решение.

Разделив левую и правую части первого уравнения системы (1) соответственно на левую и правую части второго уравнения

системы, получим уравнение $\cos x \cos y = \frac{1}{4}$. Следовательно, исходную систему можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x+y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x+y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x+y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi(n+k), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n-k), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} x-y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x+y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \pi(n+k), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(n-k), \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi(n+k); \frac{\pi}{3} + \pi(n-k)\right), \left(-\frac{\pi}{3} + \pi(n+k); -\frac{\pi}{3} + \pi(n-k)\right), n, k \in \mathbb{Z}$.

$$4.220. \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение.

Разделив первое уравнение почленно на второе, получим

$$\cos x \cos y = \frac{3}{4\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Складывая это уравнение с первым и вычитая из (1) первое уравнение системы, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x+y = \pm \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \text{В соответствии с выбором знаков в последней системе получим}$$

четыре семейства решений исходной системы: $\left((n+k)\pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}; (n-k)\pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)$.

$$\left((n+k)\pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}; (n-k)\pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right),$$

$$\left((n+k)\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}; (n-k)\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right),$$

$$\left((n+k)\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}; (n-k)\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right), n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left((n+k)\pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}; (n-k)\pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right)$

$$\left((n+k)\pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}; (n-k)\pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right),$$

$$\left((n+k)\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}; (n-k)\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right),$$

$$\left((n+k)\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}; (n-k)\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right), n, k \in \mathbb{Z}.$$

4.221.
$$\begin{cases} \sin x \cos y = a^2, \\ \sin y \cos x = a. \end{cases}$$

Решение.

Заменяя первое уравнение системы суммой, а второе — разностью первого и второго уравнений, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos x = a^2 + a, \\ \sin x \cos y - \sin y \cos x = a^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = a^2 + a, \\ \sin(x-y) = a^2 - a. \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, последняя система имеет решения тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} |a^2 + a| \leq 1 \\ |a^2 - a| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a \leq 1, \\ a^2 + a \geq -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 1 \leq 0, \\ a^2 + a + 1 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 1 \leq 0, \\ a^2 - a - 1 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 1 \leq 0, \\ a^2 - a + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Таким образом, только при этих значениях параметра a имеет решение система (1).

Из системы (1) получаем:

$$\begin{cases} x+y = (-1)^k \arcsin(a^2+a) + \pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x-y = (-1)^n \arcsin(a^2-a) + \pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left((-1)^k \arcsin(a^2+a) + (-1)^n \arcsin(a^2-a) + \pi k + \pi n \right), & k, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{1}{2} \left((-1)^k \arcsin(a^2+a) - (-1)^n \arcsin(a^2-a) + \pi k - \pi n \right), & k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: 1) если $a < -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то решений нет;

2) если $-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ то $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \pi(k+n))$, $y = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \pi(k-n))$, где

$$\alpha = (-1)^k \arcsin(a^2 + a), \beta = (-1)^k \arcsin(a^2 - a), k, n \in \mathbb{Z}.$$

4.222. Найти все значения a , при которых система уравнений $\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1, \\ \cos x \sin 2y = a \end{cases}$ имеет решения, и решить систему.

Решение.

Так как левая часть первого уравнения системы не превосходит единицы, то система может иметь решения лишь при

$a = 0$. Полагая $a = 0$, получим систему $\begin{cases} \sin x \cos 2y = 1, \\ \cos x \sin 2y = 0. \end{cases}$ Из второго уравнения последней системы следует, что либо

$\cos x = 0$, либо $\sin 2y = 0$. Если $\cos x = 0$, то при $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, из первого уравнения этой же системы $y_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; а

при $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, получим $y_2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi$. Случай $\sin 2y = 0$ не дает новых решений. Итак, исходная система

уравнений имеет решения только при $a = 0$: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$; $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: при $a = 0$; $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$; $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

4.223. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} \sin(3(a-y)) + 3\sin x = 0, \\ 2\log_4(a-y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2 \sqrt{y} + 3\log_8(2x) \end{cases}$ имеет четное число решений?

Решение.

Область допустимых значений переменных x и y задается системой $\begin{cases} a-y > 0, \\ x > 0, \\ y > 0, \end{cases}$ а тогда второе уравнение исходной системы

можно переписать в виде $2(a-y)\sqrt{y} = 2x\sqrt{y} \Leftrightarrow x = a-y$. Подставляя это значение x в первое уравнение исходной системы,

имеем $\sin 3x + 3\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(3 - 2\sin^2 x) = 0$. Итак, пришли к уравнению $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но, с другой

стороны, $x = a-y$, и поэтому с учетом области допустимых значений получаем систему $\begin{cases} y = a - \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x > 0, \\ y > 0, \end{cases}$ из которой

следует, что $x = \pi n$ меньше a . Поэтому исходная система будет иметь четное число решений, если $2\pi k < a < \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $2\pi k < a < \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.224. Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos(x-2y) = a \cos^3 y, \\ \sin(x-2y) = a \cos^3 y. \end{cases}$ При каких значениях a система имеет решения?

Решение.

Заметим, что $\cos y$ не может быть равен нулю. В самом деле, если $\cos y = 0$, то $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\cos(x-2y) = \cos(x-\pi) = -\cos x = 0$, $\sin(x-2y) = \sin(x-\pi) = -\sin x = 0$. Но $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть одновременно равны нулю, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Очевидно, $a \neq 0$ (иначе $\cos(x-2y) = \sin(x-2y) = 0$).

Разделив второе уравнение на первое почленно, получим:

$$\operatorname{tg}(x-2y)=1 \Leftrightarrow x-2y=\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Рассмотрим два случая:

1) k четное. В этом случае $\cos(x-2y)=\frac{1}{\sqrt{2}}=a \cos^3 y \Leftrightarrow \cos y=\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}}=\lambda$; $y=\pm \arccos \lambda+2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. Подставляя это значение y в (1), получаем: $x=\pm 2 \arccos \lambda+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}, m, k \in \mathbb{Z}$;

2) k нечетное. Тогда $\cos(x-2y)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=a \cos^3 y \Leftrightarrow y=\pm \arccos(-\lambda)+2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Из (1) находим $x=\pm 2 \arccos(-\lambda)+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}, m, k \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, что система разрешима при $a>\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: 1) если $a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, то система не имеет решения;

2) если $a>\frac{1}{\sqrt{2}}$, то:

$$\text{а) } x=\pm 2 \arccos(-\lambda)+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}, m, k \in \mathbb{Z},$$

$$y=\pm \arccos(-\lambda)+2\pi m, \text{ где } m \in \mathbb{Z}, k=2n+1, n \in \mathbb{Z}, \lambda=\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}},$$

$$\text{б) } x=\pm 2 \arccos(-\lambda)+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}, y=\pm \arccos \lambda+2\pi m, \text{ где } m \in \mathbb{Z},$$

$$k=2n, n \in \mathbb{Z}, \lambda=\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}}.$$

4.225. В зависимости от значений параметра a решить систему

$$\begin{cases} (a^2-a)\sin \frac{x}{2}+2\cos y=a+5, \\ 3\sin \frac{x}{2}+\cos y=4. \end{cases} \quad (1)$$

Решение.

Так как $\sin \frac{x}{2} \leq 1$ и $\cos y \leq 1$, то $3\sin \frac{x}{2}+\cos y \leq 4$. Причем это неравенство обращается в равенство только в том случае,

когда $\sin \frac{x}{2}=1$ и $\cos y=1$. Тогда, учитывая вид второго уравнения исходной системы, приходим к выводу, что она может иметь решения только при тех значениях параметра a , при которых совместна система

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2}=1, \\ \cos y=1. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя значения синуса и косинуса из системы (2) в первое уравнение системы (1), получаем уравнение

$$a^2-a+2=a+5. \quad (3)$$

Из (3) находим, что $a=-1, a=3$. При этих значениях a системы (1) и (2) равносильные. Решая теперь систему (2), получаем $x=\pi+4\pi n, y=2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: если $a=-1, a=3$, то $x=\pi+4\pi n, y=2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$;
при других значениях параметра a исходная система решений не имеет.

4.226. При каких значениях параметра α система $\begin{cases} x - y = \alpha, \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y) \end{cases}$ имеет решения? Найти эти решения.

Решение. Пользуясь формулой $\cos 2x + \cos 2y = 2\cos(x + y)\cos(x - y)$, запишем второе уравнение системы в виде $4\cos(x - y)\cos(x + y) =$

$$= 1 + 4\cos^2(x - y). \text{ Исходную систему теперь можно записать в следующем виде: } \begin{cases} 4\cos\alpha\cos(x + y) = 1 + 4\cos^2\alpha, & (1) \\ x - y = \alpha. & (2) \end{cases}$$

Сравним левую и правую части уравнения (1). Имеем: $|4\cos\alpha\cos(x + y)| \leq 4|\cos\alpha|$. С другой стороны, из неравенства $(a \pm 2\cos\alpha)^2 \geq 0$ следует, что $4|\cos\alpha| \leq 1 + 4\cos^2\alpha$, причем знак равенства здесь достигается лишь в случае $2|\cos\alpha| = 1$.

Следовательно, исходная система имеет решения лишь при условии, что $|\cos\alpha| = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим возможные случаи:

$$1) \cos\alpha = \frac{1}{2}, \text{ тогда из (1) находим}$$

$$\cos(x + y) = 1 \Leftrightarrow x + y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (2) и (3), получим: $x = \frac{\alpha}{2} + \pi k, y = \pi k - \frac{\alpha}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$2) \cos\alpha = -\frac{1}{2}. \text{ Поступая аналогично, находим } x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\alpha}{2}, y = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\alpha}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: 1) если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\alpha}{2} + \pi k, y = \pi k - \frac{\alpha}{2}, k \in \mathbb{Z}$;

$$2) \text{ если } \cos\alpha = -\frac{1}{2}, \text{ то } x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\alpha}{2}, y = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\alpha}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

$$3) \text{ если } |\cos\alpha| \neq \frac{1}{2}, \text{ то система решений не имеет.}$$

4.227. В зависимости от значений параметров a и b решить систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \\ x + y = b. \end{cases} \quad (1)$$

Решение.

Область допустимых значений переменных x и y задается неравенствами $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$. Преобразуем в области допустимых значений первое уравнение системы (1), учитывая, что $x + y = b$. Имеем:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} = \frac{2\sin b}{\cos(b - 2y) + \cos b} = a.$$

Таким образом, систему (1) запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{2\sin b}{\cos(b - 2y) + \cos b} = a, \\ x + y = b. \end{cases} \quad (2)$$

Допустим, что $a \neq 0$. Тогда из первого уравнения системы (2) получаем, что $\frac{2\sin b}{a} - \cos b = \cos(b - 2y)$. Если обозначить $p = \frac{2\sin b}{a} - \cos b$, то очевидно, что при $b \neq \pi n, m \in \mathbb{Z}$, и $|p| > 1$ система (2) решений не имеет.

Если же $|p| \leq 1$ и $b \neq \pi n$, то $2y - b = \pm \arccos p + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $y = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2} \arccos p + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, и $x = \frac{b}{2} \mp \frac{1}{2} \arccos p - \pi k$.

Рассмотрим случай $a = 0, b = \pi n$. При таких значениях параметров a и b из системы (1) приходим к соотношению $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\pi n - x) = 0$, которое представляет собой тождество, так как $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\pi n - x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x$. А поэтому в

рассматриваемом случае $x + y = b$, где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

Предположим, что $a = 0, b \neq \pi n$, где $m \in \mathbb{Z}$. В этом случае из исходной системы получаем уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x - b)$, которое решений не имеет.

Наконец, рассмотрим случай $a \neq 0, b = \pi n$. При таких значениях параметров a и b приходим к ложному тождеству $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = a \neq 0$.

Ответ: 1) при $a = 0, b = \pi n: x + y = b$, где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$;

2) при $a \neq 0, b \neq \pi n, |p| \leq 1: x = \frac{b}{2} \mp \frac{1}{2} \arccos p - \pi k, y = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2} \arccos p + \pi k$;

3) если $a = 0, b \neq \pi n$, или $a \neq 0, b = \pi n$, или $a \neq 0, b \neq \pi n, |p| > 1$, то решений нет, где $p = \frac{2 \sin b}{a} - \cos b, k, m, n \in \mathbb{Z}$.

4.228. Найти все решения системы $\begin{cases} 8 \cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0, \\ x + y = \alpha. \end{cases}$ При каких значениях α решения возможны?

Решение.

Данная задача аналогична задаче 4.226. Однако решим эту задачу иным способом. Применяя формулу

$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$, запишем первое уравнение системы в виде $4 \cos^2(x - y) + 4 \cos(x + y) \cos(x - y) + 1 = 0$.

Пологая $\cos(x - y) = t$ и пользуясь тем, что $x + y = \alpha$, получим уравнение

$$4t^2 + 4t \cos \alpha + 1 = 0. \quad (1)$$

Это уравнение имеет вещественные корни лишь при условии, что дискриминант $D = 16(\cos^2 \alpha - 1) \geq 0$, т. е. когда $|\cos \alpha| = 1$.

Рассмотрим два возможных случая:

а) $\cos \alpha = 1$, тогда из (1) следует, что $t = \cos(x - y) = \frac{1}{2}$. Получаем систему $\begin{cases} x - y = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k + \frac{\alpha}{2}, & k \in \mathbb{Z}, \\ y = \mp \frac{\pi}{3} - \pi k + \frac{\alpha}{2}, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

б) $\cos \alpha = -1$, тогда, поступая аналогично, получим $\begin{cases} x = \pi k + \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\alpha}{2} - \pi k \mp \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Ответ: 1) если $\cos \alpha = 1$, то $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k + \frac{\alpha}{2}, y = \mp \frac{\pi}{3} - \pi k + \frac{\alpha}{2}, k \in \mathbb{Z}$;

2) если $\cos \alpha = -1$, то $x = \pi k + \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}, y = \frac{\alpha}{2} - \pi k \mp \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$;

3) если $|\cos \alpha| \neq \pm 1$, то система не имеет решения.

4.229. Исключить x и y из системы уравнений $\begin{cases} a \sin^2 x + b \cos^2 x = 1, \\ a \cos^2 y + b \sin^2 y = 1, \\ a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y, \end{cases}$ предполагая, что система разрешима и $a \neq b$.

Решение.

Легко заметить, что $\cos x \neq 0, \cos y \neq 0$, так как в противном случае третье уравнение системы не имеет смысла. Поэтому первые два уравнения можно записать в виде

$$(a - 1) \operatorname{tg}^2 x = 1 - b, \quad (1)$$

$$(b - 1) \operatorname{tg}^2 y = 1 - a. \quad (2)$$

Но $a \neq 1$, так как если $a = 1$, то из (1) будем иметь $b = 1$, что противоречит условию $a \neq b$. Аналогично, если $b = 1$, то и $a = 1$.

Следовательно, (1) можно почленно разделить на (2) и получить $\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2$.

Далее $a \neq 0$, так как если $a = 0$, то из второго уравнения системы получим $\sin y \neq 0$, а из третьего — $b = 0$, т. е. $a = b = 0$,

что невозможно. В силу этого можем из третьего уравнения системы найти $\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$.

Итак, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2$. Если $\frac{b}{a} = \frac{1-b}{1-a}$, то $a = b$, что невозможно. Если же $\frac{b}{a} = -\frac{1-b}{1-a}$, то $a + b = 2ab$.

Ответ: $a + b = 2ab$.

4.230. Выяснить, каким условиям должны удовлетворять числа a, b, c , для того чтобы система уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2a, \\ \cos x + \cos y = 2b, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = c \end{cases}$ имела хотя бы одно решение.

Решение.

Возведем в квадрат обе части первого и второго уравнений и, переписав третье уравнение без изменений, придем к системе:

$$\begin{cases} (\sin x + \sin y)^2 = 4a^2, \\ (\cos x + \cos y)^2 = 4b^2, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = c. \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать условия, которым должны удовлетворять числа a, b, c , чтобы система (1) имела хотя бы одно решение. Так как данную систему мы заменяем не равносильной ей системой (1), то надо показать, что обе системы имеют хотя бы одно решение при одних и тех же условиях, наложенных на числа a, b, c .

Если данная система при некоторых a, b, c имеет решение, то, очевидно, при тех же a, b, c имеет решение и система (1). Верно и обратное утверждение: если при некоторых a, b, c система (1) имеет решение, то при тех же значениях a, b, c имеет решение и данная система.

Действительно, пусть x_0, y_0 — есть решение системы (1), тогда осуществляется одна из четырех возможностей:

- 1) либо $\sin x_0 + \sin y_0 = 2a, \cos x_0 + \cos y_0 = 2b$;
- 2) либо $\sin x_0 + \sin y_0 = -2a, \cos x_0 + \cos y_0 = 2b$;
- 3) либо $\sin x_0 + \sin y_0 = -2a, \cos x_0 + \cos y_0 = -2b$;
- 4) либо $\sin x_0 + \sin y_0 = 2a, \cos x_0 + \cos y_0 = -2b$.

Если имеет место первый случай, то x_0, y_0 есть решение данной системы; во втором случае данная система имеет, например, решение $-x_0, -y_0$; в третьем случае — решение $\pi + x_0, \pi + y_0$; в четвертом — решение $\pi - x_0, \pi - y_0$. Следовательно, данная система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда имеет хотя бы одно решение система (1).

Когда же система (1) имеет решение? Складывая и вычитая первое и второе уравнения системы (1), находим

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 2(a^2 + b^2) - 1, \\ \cos 2x + \cos 2y + 2\cos(x+y) = 4(b^2 - a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 2(a^2 + b^2) - 1, \\ \cos(x+y)\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2(b^2 - a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 2(a^2 + b^2) - 1, \\ (a^2 + b^2)\cos(x+y) = b^2 - a^2. \end{cases}$$

Мы пришли к системе $\begin{cases} \cos(x-y) = 2(a^2 + b^2) - 1, \\ (a^2 + b^2)\cos(x+y) = b^2 - a^2, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = c. \end{cases}$ равносильной системе (1).

Если $a^2 + b^2 = 0$, то второе уравнение удовлетворяется при любых x и y . Из первого уравнения получаем $x - y = \pi - 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; третье уравнение дает $\operatorname{tg}(y + \pi + 2\pi k)\operatorname{tg} y = c \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 y = c$. Это уравнение имеет решение при любом $c \geq 0$.

Если $a^2 + b^2 \neq 0$, то имеем

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 2(a^2 + b^2) - 1, \\ \cos(x+y) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$|2(a^2 + b^2) - 1| \leq 1 \quad (3)$$

и

$$\left| \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \right| \leq 1. \quad (4)$$

Неравенство (4) при наличии условия $a^2 + b^2 \neq 0$, очевидно, справедливо, а неравенство (3) равносильно следующему: $0 < a^2 + b^2 \leq 1$. Представим левую часть третьего уравнения системы (1) следующим образом

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} \quad (5)$$

и подставим в (5) значения $\cos(x+y)$ и $\cos(x-y)$ из (2). В результате получим, что решение системы (2) будет удовлетворять

$$\text{третьему уравнению исходной системы, если } c = \frac{2(a^2 + b^2) - 1 - \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}}{\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + 2(a^2 + b^2) - 1} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2 - a^2}.$$

Ответ: данная система имеет хотя бы одно решение в двух случаях:

- 1) $0 < a^2 + b^2 \leq 1$ и $c = \frac{(a^2 + b^2)^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2 - a^2}$;
- 2) $a = b = 0$ и c — любое неотрицательное число.

ТЕМА: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Решить неравенства (4.231—4.240).

4.231. $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

Так как $\sin x$ — периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π , то достаточно найти решение этого неравенства на промежутке, длина которого 2π , например на отрезке $[0; 2\pi]$, а для получения полного решения к найденным решениям прибавить период $\sin x$, т. е. $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

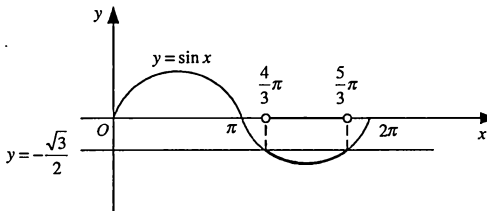


Рис. 4.23

Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $[0; 2\pi]$ (рис. 4.23). Из рисунка видно, что график функции $y = \sin x$ расположен ниже прямой $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ при значениях $\frac{4}{3}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$ (эти значения находятся из решения уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на

отрезке $[0; 2\pi]$. Следовательно, эти значения являются решениями неравенства $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Учитывая, что период функции $\sin x$ равен 2π , $n \in \mathbb{Z}$, записываем полный ответ: $\frac{4}{3}\pi + 2\pi n < x < \frac{5}{3}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{4}{3}\pi + 2\pi n; \frac{5}{3}\pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.232. $\cos x < \frac{1}{3}$.

Решение.

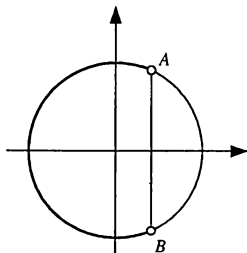


Рис. 4.24

По определению, $\cos x$ — это абсцисса точки x единичной окружности, соответствующей числу x . Отметим на единичной окружности точки, имеющие абсциссу, равную $\frac{1}{3}$ (точки A и B на рис. 4.24). Тогда геометрическим решением исходного неравенства будет открытая дуга AB (каждая ее точка имеет абсциссу, меньшую $\frac{1}{3}$). Составим

аналитическую запись открытой дуги AB : $\arccos \frac{1}{3} + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left(\arccos \frac{1}{3} + 2\pi k; 2\pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.233. $\operatorname{tg} x \leq -\frac{1}{2}$.

Решение.

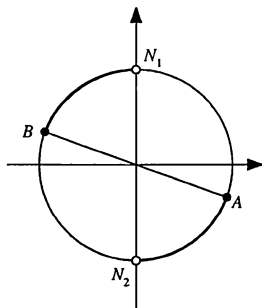


Рис. 4.25

$\operatorname{tg} x$ не определен при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \in \mathbb{Z}$. Этим числам соответствуют точки N_1 и N_2 окружности (рис. 4.25). Отметим на полуокружности $N_1 N_2$ точку $A = A(x)$ такую,

что $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$. Так как на дуге $N_2 N_1$ (а точнее, на каждом из интервалов числовой прямой \mathbb{R} , отображающихся на дугу $N_2 N_1$) функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает, то неравенство $\operatorname{tg} x \leq -\frac{1}{2}$ будет выполняться для всех точек дуги $N_2 N_1$, лежащих от

точки A в отрицательном направлении, т. е. на полуоткрытой дуге $N_2 A$.

Далее основной период тангенса равен π , то исходное неравенство будет истинным и для всех точек дуги $N_1 B$, отличающейся от дуги $N_2 A$ на половину окружности. Следовательно, геометрическим решением исходного неравенства является объединение двух полуоткрытых дуг $N_2 A$ и $N_1 B$. Составим аналитические записи указанных дуг:

для $N_2 A$: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x \leq -\arctg \frac{1}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. для $N_1 B$: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x \leq \pi - \arctg \frac{1}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Кроме того, решение исходного неравенства можно записать короче: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\arctg \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\arctg \frac{1}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.234. $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение.

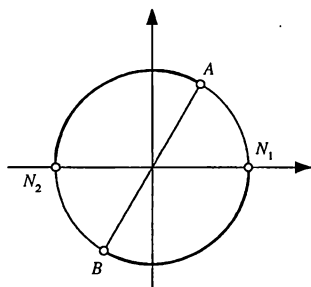


Рис. 4.26

$\operatorname{ctg} x$ не определен при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Этим числам соответствуют точки N_1, N_2 единичной окружности (рис. 4.26). Отметим на полуокружности $N_1 N_2$ точку

$A = A(x)$ такую, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, для этого отложим дугу $N_1 A$, длина которой равна $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$. Так как на дуге $N_1 N_2$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает, то

неравенство $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ будет выполняться для всех точек дуги $N_1 N_2$, лежащих от точки A в положительном направлении, т. е. на открытой дуге AN_2 . Учитывая, что основной период котангенса равен π , отметим еще дугу BN_1 , на которой выполняется исходное неравенство.

Итак, геометрическим решением исходного неравенства является объединение двух открытых дуг AN_2 и BN_1 . Аналитическая запись дуги AN_2 :

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ аналитическая запись дуги } BN_1:$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Короче решение исходного неравенства можно записать следующим образом: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pi + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}$.

4.235. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} \geq 0$.

Решение.

При $\cos x \neq -1$, т. е. при $x \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, из условия получаем $\sin x \geq 0$ (так как $1 + \cos x > 0$), откуда $2\pi n \leq x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

4.236. $\cos 2x \cos \frac{\pi}{8} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{8} \geq \frac{1}{2}$.

Решение.

Свернув левую часть неравенства по формуле $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$, перепишем его в виде

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{8} \right) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 2x + \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{11\pi}{48} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{48} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{11\pi}{48} + \pi n; \frac{5\pi}{48} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}$.

4.237. $\sin x \cos x > \frac{1}{4}$.

Решение.

Из условия имеем:

$$\sin x \cos x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

4.238. $\sin x > \cos^2 x.$

Решение.

Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sin^2 x + \sin x - 1 > 0. \quad (1)$$

Разложив квадратный трехчлен относительно $\sin x$ на множители, получим

$$\left(\sin x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(\sin x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) > 0. \quad (2)$$

Но $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$, и поэтому $\sin x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$. Следовательно, неравенство (2) равносильно неравенству $\sin x > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ и

имеет решение $2\pi n + \varphi < x < \pi - \varphi + 2\pi n$, где $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left(2\pi n + \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

4.239. $3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x < \frac{1}{2}.$

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$\begin{aligned} 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{18} (12n - 7); \frac{\pi}{18} (12n + 1) \right), n \in \mathbb{Z}.$

4.240. $2 \sin^2 \left(y + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \cos 2y > 0.$

Решение.

Применив формулу $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$, преобразуем исходное неравенство к виду:

$$\begin{aligned} 1 - \cos \left(2y + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \cos 2y > 0 &\Leftrightarrow -\cos \left(2y + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \cos 2y > -1 \Leftrightarrow \sin 2y + \sqrt{3} \cos 2y > -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2y + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2y > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} \sin 2y + \cos \frac{\pi}{6} \cos 2y > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left(2y - \frac{\pi}{6} \right) > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 2y - \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $y \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

4.241. Найти такие два числа A и B , чтобы неравенство $A \leq \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \leq B$ было верным при любых α и чтобы разность между B и A была наименьшей.

Решение.

Последовательно получаем $\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Далее так как $-1 \leq \sin 4\alpha \leq 1$ при любых α , то $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \sin 4\alpha \leq \frac{1}{4}$, т. е. $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$.

Ответ: $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$.

4.242. При каких x выполняется неравенство $4\sin^2 x + 3\lg x - \frac{2}{\cos^2 x} > 0$?

Решение.

Исходное неравенство не имеет смысла при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При прочих значениях x преобразуем данное неравенство, умножив обе части на $\cos^2 x$:

$$4\sin^2 x \cos^2 x + 3\lg x \cos^2 x - \frac{2}{\cos^2 x} \cos^2 x > 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x + \frac{3}{2} \sin 2x - 2 > 0.$$

Решив полученное квадратное неравенство относительно $\sin 2x$, находим: либо $\sin 2x < \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$, либо $\sin 2x > \frac{\sqrt{41} - 3}{4}$. Первое из этих неравенств не может выполняться. Следовательно, из второго неравенства получаем

$$\pi n + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{41} - 3}{4} < x < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{41} - 3}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(\pi n + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{41} - 3}{4}; \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{41} - 3}{4} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

Решить неравенства (4.243—4.246).

4.243. $2 + \lg x + \operatorname{ctgx} < 0$.

Решение.

Из условия получаем

$$2 + \lg x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(\operatorname{tg} x + 1)^2}{\operatorname{tg} x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1 \neq 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \neq -1, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n \right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

4.244. $\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x - 2} \geq 0.$

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства: $\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - 2 \cos x + \sin^2 x}{\cos x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2 \cos x}{\cos x - 2} \geq 0.$

Так как $\cos x - 2 < 0$ при любых x , то $1 - 2 \cos x \leq 0$, т. е. $\cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$

4.245. $2 \cos x (\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) < 5.$

Решение.

Область допустимых значений исходного неравенства $\cos x \neq 0$. Из условия задачи имеем:

$$\begin{aligned} 2 \cos x \left(\cos x - \sqrt{8} \frac{\sin x}{\cos x} \right) - 5 < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2 x - 2\sqrt{8} \sin x - 5 < 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x + 2\sqrt{8} \sin x + 3 > 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x < -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \emptyset, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(2\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left(2\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

4.246. $\sin x \sin 2x < \sin 3x \sin 4x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}.$

Решение.

Преобразуем произведение синусов в сумму, заменим данное неравенство следующим равносильным неравенством $\cos 3x >$

$> \cos 7x \Leftrightarrow \sin 5x \sin 2x > 0$. Но при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем $\sin 2x > 0$, и, следовательно, исходное неравенство равносильно следующему:

$$\sin 5x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{\pi}{5} \right) \cup \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{2} \right).$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{\pi}{5} \right) \cup \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{2} \right).$

4.247. Для каких углов первой четверти выполняется неравенство $\sin x \geq \sin 2x$?

Решение.

Первая четверть характеризуется неравенствами $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Преобразуем исходное неравенство к виду

$$\sin x \geq 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 2 \cos x - 1 \leq 0, \\ \sin x \leq 0, \\ 2 \cos x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x = 0, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{0\} \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решить неравенства (4.248—4.261).

4.248. $\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$.

Решение.

Выражение, стоящее в знаменателе исходного неравенства, положительное, так как $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}$.

Поэтому неравенство равносильно следующему: $\sin^2 x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow |\sin x| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k \right), n \in \mathbb{Z}$.

4.249. $8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + \sin x - 1 < 0$.

Решение.

Из условия имеем $8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + \sin x - 1 < 0 \Leftrightarrow (8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x) + (\sin x - 1) < 0 \Leftrightarrow 8 \sin^2 x (\sin^2 x - 1) + (\sin x - 1) < 0 \Leftrightarrow 8 \sin^2 x (\sin x - 1)(\sin x + 1) + (\sin x - 1) < 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(8 \sin^2 x + 8 \sin^2 x + 1) < 0$. Далее так как $\sin x - 1 < 0$ при

$\sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n \in \mathbb{Z}$, а множитель $8 \sin^2 x + 8 \sin^2 x + 1 > 0$ для любых x , то решением исходного неравенства являются любые значения x , кроме $x = \frac{\pi}{2} (4n + 1), n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} (4n + 1), n \in \mathbb{Z}$.

4.250. $3 \sin 2x \leq 1 + 4 \sin^2 x$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство: $3 \sin 2x \leq 1 + 4 \sin^2 x \Leftrightarrow 6 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x + 4 \sin^2 x \Leftrightarrow 5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x + \cos^2 x \geq 0$.

При $\cos x = 0$, т. е. при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, n \in \mathbb{Z}$, неравенство верно. Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, n \in \mathbb{Z}$, — его решение. При

$\cos x \neq 0$ преобразуем последнее неравенство к виду $\frac{5 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{6 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \geq 0 \Leftrightarrow 5 \tan^2 x - 6 \tan x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \leq \frac{1}{5}, \\ \tan x \geq 1. \end{cases}$

Для решения совокупности этих неравенств построим на одном рисунке график функции $y = \operatorname{tg} x$ и прямые $y = \frac{1}{5}$ и $y = 1$ на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, равном по длине π — периоду тангенса (рис. 4.27). Из рисунка видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ расположен не выше прямой $y = \frac{1}{5}$ при $-\frac{\pi}{2} < x \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$, следовательно, эти значения x являются решением неравенства $\operatorname{tg} x \leq \frac{1}{5}$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Учитывая период тангенса, записываем полное решение этого неравенства:

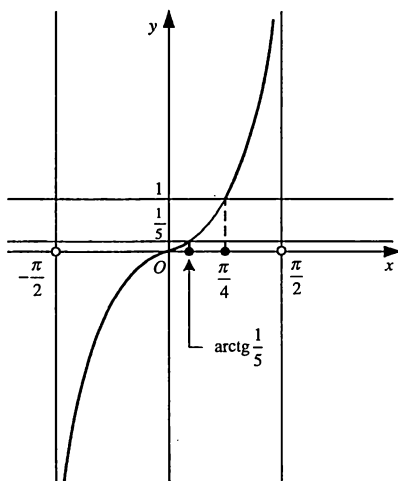


Рис. 4.27

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично получаем полное решение неравенства $\operatorname{tg} x \geq 1$:

$$\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Для записи решения исходного неравенства следует учесть, что

значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, являются его решением.

Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$

4.251. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3 \operatorname{tg} x.$

Решение.

Область допустимых значений исходного неравенства $\cos x \neq 0$.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3 \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \frac{2 \cos^2 2x}{1 + \cos 2x} \geq \frac{3 \sin 2x}{1 + \cos 2x} \Leftrightarrow \frac{2 \cos^2 2x - 3 \sin 2x}{1 + \cos 2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \sin^2 2x + 3 \sin 2x - 2}{1 + \cos 2x} \geq 0. \quad (1)$$

Далее $1 + \cos 2x > 0$ при $\cos 2x \neq -1$, поэтому неравенство (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 2x + 3 \sin 2x - 2 \leq 0 &\Leftrightarrow \left(2 \sin 2x - \frac{1}{2}\right) \left(\sin 2x + 4\right) \leq 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Так как $\cos 2x \neq -1$, то $2x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, окончательно имеем

$$-\frac{7\pi}{12} + \pi n \leq x < -\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{7\pi}{12} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$

4.252. $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x > 2$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство: $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x > 2 \Leftrightarrow 6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x > 2\sin^2 x + 2\cos^2 x \Leftrightarrow 4\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x > 0$. Так как $\cos^2 x \geq 0$, то последнее неравенство равносильно следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} \cos^2 x = 0, \\ 4\sin^2 x > 0, \\ \cos^2 x > 0, \\ 4\lg^2 x - \lg x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ (\lg x - 1)(\lg x + \frac{3}{4}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \begin{cases} \lg x < -\frac{3}{4}, \\ \lg x > 1. \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

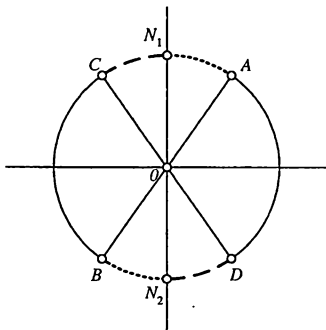


Рис. 4.28

Найдем решение совокупности (1). Геометрическим решением неравенства $\lg x > 1$ является объединение открытых дуг AN_1 и BN_2 (на рис. 4.28 отмечено мелкими

штрихами); геометрическим решением неравенства $\lg x < -\frac{3}{4}$ является объединение открытых дуг N_1C и N_2D (отмечено на рисунке крупными штрихами). Геометрическое решение совокупности (1) представляет собой объединение четырех дуг: AN_1, BN_2, N_1C, N_2D . Далее, так как геометрическое

решение первой системы совокупности $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то геометрическое решение совокупности представляет собой объединение двух дуг: AC и BD .

Составим аналитическую запись дуги AC : $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \pi - \arctg \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Учитывая, что дуга BD получается из дуги AC поворотом вокруг точки O на 180° , мы можем сразу записать решение

исходного неравенства $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \pi - \arctg \frac{3}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi - \arctg \frac{3}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

4.253. $\ctg x - \lg x - 2 \lg 2x - 4 \lg 4x > 8\sqrt{3}$.

Решение.

Область допустимых значений исходного неравенства $\begin{cases} \sin 2x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$

Преобразуем исходное неравенство:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} - 2 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \operatorname{tg} 2x - 2 \operatorname{tg} 4x > 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \operatorname{tg} 4x > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \frac{\sin 4x}{\cos 4x} > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos 8x}{\sin 8x} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 8x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pi n < 8x < \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\pi n}{8} < x < \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi n}{8}; \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8} \right), n \in \mathbb{Z}$.

4.254. $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

Решение.

Построим графики функций $y = |\sin x|$ и $y = \frac{1}{2}$ (рис. 4.29). Из уравнения $\sin x = \pm \frac{1}{2}$ находим абсциссы точек пересечения графиков: $x = (-1)^n \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Решением заданного неравенства будут те значения x , при которых график функции

$y = |\sin x|$ лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$.

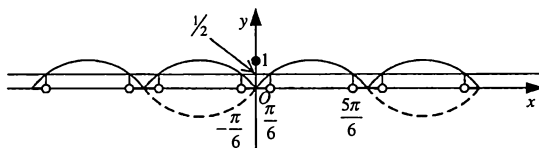


Рис. 4.29

Ответ: $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

4.255. $2\sin^3 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде

$$\begin{aligned} 1 - 2\sin^2 x - (\sin 3x - \sin x) > 0 &\Leftrightarrow \cos 2x - 2\sin x \cos 2x > 0 \Leftrightarrow \cos 2x(1 - 2\sin x) > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x)(1 - 2\sin x) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

4.256. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$.

Решение.

Пусть $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда неравенство примет вид

$$t > \frac{2t-2+2t^2}{2t+2-2t^2} \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t^2+t-1)}{t^2-t-1} > 0. \quad (1)$$

Так как $t^2 + t + 1 > 0$ при всех действительных значениях t , то неравенство (1) равносильно неравенству

$$\frac{t-1}{t^2-t-1} > 0. \quad (2)$$

Трехчлен $t^2 - t - 1$ имеет корни $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Решив (2), находим: либо $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, либо $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2} < 1$.

Ответ: $x \in \left(2\pi k + 2\arctg \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \pi + 2\pi k \right) \cup \left(2\pi k - 2\arctg \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$.

4.257. $\sin^3 x \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) > \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Решение.

Имеем

$$\begin{aligned} \sin^3 x \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) &> \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \sin^3 x (4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos^3 x (3\sin x - 4\sin^3 x) > \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\sin^3 x \cos^3 x - 3\sin^3 x \cos x + 3\cos^3 x \sin x - 4\sin^3 x \cos^3 x > \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow 3\cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) > \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 4x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2\pi k < 4x < \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \right), k \in \mathbb{Z}$.

4.258. $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$.

Решение.

Из формул для $\sin 3x$ и $\cos 3x$ находим: $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$, $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$. Пользуясь этими формулами, запишем данное неравенство в виде

$$\begin{aligned} (\cos 3x + 3\cos x) \cos 3x - (3\sin x - \sin 3x) \sin 3x &> \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sin^2 3x + \cos^2 3x + 3(\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos 4x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z}$.

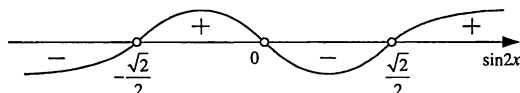
4.259. $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.

Решение.

Имеем:

$$4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x \Leftrightarrow 4\sin x \sin 2x \sin 3x - 2\sin 2x \cos 2x > 0 \Leftrightarrow \sin 2x(2\sin x \sin 3x - \cos 2x) > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 2x(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) > 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cos 4x < 0 \Leftrightarrow \sin 2x(1 - 2\sin^2 2x) < 0 \Leftrightarrow \left(\sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin 2x > 0.$$

Методом интервалов для $\sin 2x$ получаем:



Таким образом, получили совокупность неравенств:

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 2x < 0, \\ \sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x < 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \pi + 2\pi n < 2x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{5\pi}{8} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{8} + \pi n; \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{3\pi}{8} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{5\pi}{8} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

4.260. $\sin x + \cos x < \frac{1}{\sin x}$.

Решение.

Имеем последовательно:

$$\sin x + \cos x - \frac{1}{\sin x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x - 1}{\sin x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x \cos x - \cos^2 x}{\sin x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x(\sin x - \cos x)}{\sin x} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x(\operatorname{tg} x - 1)}{\sin x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ \sin x < 0, \\ \operatorname{tg} x < 1, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

4.261. $\sin(2x + 10^\circ) + \sin(x + 10^\circ) - \sin x < 0$.

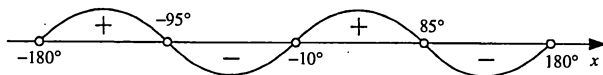
Решение.

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} \sin(2x+10^\circ) + \sin(x+10^\circ) - \sin x < 0 &\Leftrightarrow \sin(2x+10^\circ) + 2\sin 5^\circ \cos(x+5^\circ) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sin(x+5^\circ)\cos(x+5^\circ) + 2\sin 5^\circ \cos(x+5^\circ) < 0 \Leftrightarrow \cos(x+5^\circ)(\sin(x+5^\circ) + \sin 5^\circ) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(x+5^\circ) \cdot 2\sin \frac{x+10^\circ}{2} \cos \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow \cos(x+5^\circ) \sin \frac{x+10^\circ}{2} \cos \frac{x}{2} < 0. \end{aligned}$$

Далее

$$\cos(x+5^\circ) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 85^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}; \sin \frac{x+10^\circ}{2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = -10^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}; \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x_3 = 180^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}.$$



На промежутке от -180° до 180° получим четыре интервала. На каждом из них определим знак неравенства и получим $-95^\circ + 360^\circ n < x < -10^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$, и $85^\circ + 360^\circ n < x < 180^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in (-95^\circ + 360^\circ n; -10^\circ + 360^\circ n) \cup (-85^\circ + 360^\circ n; 180^\circ + 360^\circ n), n \in \mathbb{Z}$.

4.262. Найти значения x , удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} |\sin x| > 0, \\ |\sin x| < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Решение.

Первое неравенство выполняется при всех x , не равных $\pi l, l \in \mathbb{Z}$, так как $|\sin \pi l| = 0$. Второе неравенство выполняется при

$$-\frac{\pi}{6} + \pi l < x < \frac{\pi}{6} + \pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi l; \pi l\right) \cup \left(\pi l; \frac{\pi}{6} + \pi l\right), l \in \mathbb{Z}.$$

Решить системы неравенств (4.263—4.264).

$$4.263. \begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

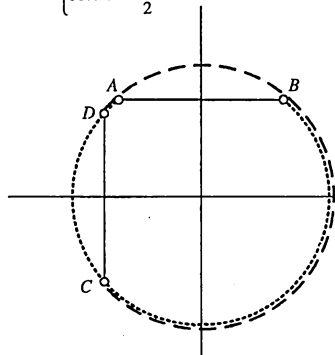


Рис. 4.30

Решение.

Найдем геометрическое решение неравенства $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ — дуга AB единичной окружности (отмечена на рис. 4.30 мелкими штрихами). На этой же окружности найдем геометрическое решение неравенства

$\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ — дуга CD (отмечена на рисунке крупными штрихами).

Тогда геометрическое решение исходной системы — это пересечение дуг AB и CD , т. е. объединение дуг AD и CB . Осталось лишь составить аналитическую запись каждой из этих дуг. Для дуги AD имеем

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi l < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; \text{ для дуги } CB \text{ имеем}$$

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi l < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

4.264.
$$\begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \cos x} > 1, \\ \frac{\sin x}{1 - \cos x} < \sqrt{3}. \end{cases}$$

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \cos x} > 1, \\ \frac{\sin x}{1 - \cos x} < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \cos x} - 1 > 0, \\ \frac{\sin x}{1 - \cos x} - \sqrt{3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x - 1 + \cos x}{1 - \cos x} > 0, \\ \frac{\sin x - \sqrt{3} + \sqrt{3} \cos x}{1 - \cos x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} > 0, \\ \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 \sin \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} > 0, \\ \frac{2 \sin \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{x}{2})}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1 > 0, \\ \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \sqrt{3} < 0, \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} > 1, \\ \operatorname{ctg} \frac{x}{2} < \sqrt{3}, \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \operatorname{ctg} \frac{x}{2} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

4.265. При каких значениях параметра a неравенство $\left| \sin x - \frac{1}{3} \right| - \frac{1}{3} \leq a$ справедливо для всех x таких, что $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$?

Решение.

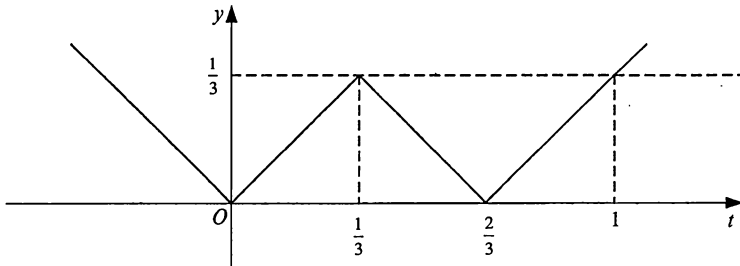


Рис. 4.31

При $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ значения функции синус изменяются в пределах от 0 до 1. Полагая $t = \sin x$, построим в плоскости tOy график функции $y = \left| t - \frac{1}{3} \right| - \frac{1}{3}$ (рис. 4.31). Из рисунка видно, что при всех $t \in [0; 1]$ и $a \geq \frac{1}{3}$ график функции $y = \left| t - \frac{1}{3} \right| - \frac{1}{3}$ лежит не выше прямой $y = a - \frac{1}{3}$, и, следовательно, при значениях $a \geq \frac{1}{3}$ требование задачи выполняется.

Ответ: при $a \geq \frac{1}{3}$.

4.266. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$(a^2 - 4)\cos x + 4a\sin x \leq 8a. \quad (1)$$

Решение.

Неравенство (1) равносильно неравенству $(a^2 + 4)\left(\frac{a^2 - 4}{a^2 + 4}\cos x + \frac{4a}{a^2 + 4}\sin x\right) \leq 8a$. А тогда, если ввести вспомогательный угол φ такой, что $\cos \varphi = \frac{a^2 - 4}{a^2 + 4}$, $\sin \varphi = \frac{4a}{a^2 + 4}$, то последнее неравенство можно переписать в виде $\cos(x - \varphi) \leq \frac{8a}{a^2 + 4}$.

Если теперь $\frac{8a}{a^2 + 4} > 1$, т. е. если $4 - 2\sqrt{3} < a < 4 + 2\sqrt{3}$, то исходное неравенство справедливо при всех x .

Если $\frac{8a}{a^2 + 4} < -1$, т. е. если $-4 - 2\sqrt{3} < a < -4 + 2\sqrt{3}$, то очевидно неравенство (1) решений не имеет.

Рассмотрим случай, когда $-1 \leq \frac{8a}{a^2 + 4} \leq 1$, т. е. когда $a \leq -4 - 2\sqrt{3}$, $-4 + 2\sqrt{3} \leq a \leq 4 - 2\sqrt{3}$, $a \geq 4 + 2\sqrt{3}$. При таких значениях параметра a решениями исходного неравенства будут все x такие, что $\varphi + \psi + 2\pi k \leq x \leq 2\pi(k + 1) - \psi + \varphi$, где

$$k \in \mathbb{Z}, \psi = \arccos \frac{8a}{a^2 + 4}.$$

Ответ: 1) если $-4 - 2\sqrt{3} < a < -4 + 2\sqrt{3}$, то решений нет;

2) если $4 - 2\sqrt{3} < a < 4 + 2\sqrt{3}$, то x — любое;

3) если $a \leq -4 - 2\sqrt{3}$, $-4 + 2\sqrt{3} \leq a \leq 4 - 2\sqrt{3}$, $a \geq 4 + 2\sqrt{3}$, то $\varphi + \psi + 2\pi k \leq x \leq 2\pi(k + 1) - \psi + \varphi$, $k \in \mathbb{Z}$, где φ —

$$\text{такой угол, что } \cos \varphi = \frac{a^2 - 4}{a^2 + 4} \text{ и } \sin \varphi = \frac{4a}{a^2 + 4}, \psi = \arccos \frac{8a}{a^2 + 4}.$$

4.267. В зависимости от значений параметра a решить неравенство $(a - 2)\sin x > 3a + 4$.

Решение.

Очевидно, что при $a = 2$ исходное неравенство решений не имеет. Поэтому считаем, что $a - 2 \neq 0$. В этом случае рассмотрим

сначала $a - 2 < 0$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству $\sin x < \frac{3a + 4}{a - 2}$. А тогда при выполнении условий

$$\begin{cases} a - 2 < 0, \\ \frac{3a + 4}{a - 2} \leq -1, \end{cases} \text{ т. е. при } -\frac{1}{2} \leq a < 2 \text{ исходное неравенство решений не имеет.}$$

Если $\begin{cases} a - 2 < 0, \\ \frac{3a + 4}{a - 2} > -1, \end{cases}$ т. е. если $a < -3$, то решением исходного неравенства является любое x .

В случае $-1 < \frac{3a+4}{a-2} \leq 1$, т. е. когда $-3 \leq a < \frac{1}{2}$, исходное неравенство имеет решения, и они задаются неравенствами $-\arcsin \frac{3a+4}{a-2} + \pi(2k-1) < x < \arcsin \frac{3a+4}{a-2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Предположим теперь, что $a-2 > 0$. В этом случае $\frac{3a+4}{a-2} > 1$, и поэтому неравенство в условии задачи решений не имеет.

Ответ: 1) если $a < -3$, то x — любое;

2) если $-3 \leq a < \frac{1}{2}$, то $-\arcsin \frac{3a+4}{a-2} + \pi(2k-1) < x < \arcsin \frac{3a+4}{a-2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) если $a \geq \frac{1}{2}$, то решений нет.

4.268. Решить неравенство

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \leq a. \quad (1)$$

Решение.

Преобразуем неравенство (1) к виду

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \leq a \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} \leq a \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} \leq a. \quad (2)$$

Пусть $y = \sin 2x$. Тогда неравенство (2) примет вид $\frac{2}{y} \leq a$, и задача сводится к решению следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{2}{y} \leq a, \\ y \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ay-2}{y} \geq 0, \\ y \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что $a = 0$ — контрольное значение параметра a . Значит, нам необходимо рассмотреть три случая.

1) если $a = 0$, то система (3) принимает вид $\begin{cases} -\frac{2}{y} \geq 0, \\ -1 \leq y \leq 1, \end{cases}$ откуда находим $-1 \leq y < 0$;

2) если $a > 0$, то система (3) преобразуется к виду $\begin{cases} \frac{y-2}{y} \geq 0, \\ -1 \leq y \leq 1, \end{cases}$ откуда находим

$$\begin{cases} y < 0, y \geq \frac{2}{a}, \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь контрольным значением параметра является значение $a = 2$, поэтому необходимо рассмотреть три случая:

а) если $0 < a < 2$, то $\frac{2}{a} > 1$, и система (4) имеет решение $-1 \leq y < 0$;

б) если $a = 2$, то система (4) имеет решение $-1 \leq y < 0$, $y = 1$;

в) если $a > 2$, то система (4) имеет решение $\frac{2}{a} \leq y \leq 1$;

3) если $a < 0$, то система (3) преобразуется к виду

$$\begin{cases} y - \frac{2}{a} \leq 0, \\ \frac{y}{-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} \leq y < 0, \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь контрольным значением параметра является $a = -2$. Поэтому рассмотрим три случая:

- а) в случае $a < -2$ имеем $\frac{2}{a} > -1$ и из системы (5) находим $\frac{2}{a} \leq y < 0$;
- б) в случае $a = -2$ из системы (5) находим $-1 \leq y < 0$;
- в) в случае $-2 < a < 0$ получаем $\frac{2}{a} < -1$ и система (5) имеет решение: $-1 \leq y < 0$.

Таким образом, получаем следующее решение системы (3):

- 1) если $a < -2$, то $\frac{2}{a} \leq y < 0$;
- 2) если $-2 \leq a < 2$, то $-1 \leq y < 0$;
- 3) если $a = 2$, то $-1 \leq y < 0$, $y = 1$;
- 4) если $a > 2$, то $-1 \leq y < 0$, $\frac{2}{a} \leq y \leq 1$.

Далее, так как $y = \sin 2x$, то получаем:

- 1) если $a < -2$, то

$$\frac{2}{a} \leq \sin 2x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k + \pi < 2x \leq \pi + \arcsin\left(-\frac{2}{a}\right) + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ 2\pi k + \arcsin\frac{2}{a} \leq 2x < 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi k + \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{a} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ \pi k + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{a} \leq x < \pi k, & k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$
- 2) если $-2 \leq a < 2$, то $-1 \leq \sin 2x < 0 \Leftrightarrow 2\pi k - \pi < 2x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- 3) если $a = 2$, то из системы неравенств $-1 \leq \sin 2x < 0$ получаем: $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k, k \in \mathbb{Z}$, а из уравнения $\sin 2x = 1$ находим $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- 4) если $a > 2$, то из системы неравенств $-1 \leq \sin 2x < 0$ находим $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k, k \in \mathbb{Z}$, а из системы $\frac{2}{a} \leq \sin 2x \leq 1$ имеем

$$2\pi k + \arcsin\frac{2}{a} \leq 2x \leq \pi - \arcsin\frac{2}{a} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi k + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{a} \leq x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{a} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: 1) если $a < -2$, то $\pi k + \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} - \alpha + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, и $\pi k + \alpha \leq x < \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

2) если $-2 \leq a < 2$, то $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

3) если $a = 2$, то $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

4) если $a > 2$, то $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k$ и $\pi k + \alpha \leq x \leq \frac{\pi}{2} - \alpha + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, где $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{a}$.

4.269. При каких значениях параметра a неравенство $\sin^5 x + \cos^5 x - a(\sin x + \cos x) \geq \frac{a^2 - 11}{2} (\sin x + \cos x) \sin x \cos x$

выполняется для всех x таких, что $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$?

Решение.

Если воспользоваться формулой $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ и учесть тот факт, что $\sin x + \cos x > 0$ на отрезке

$[0; \frac{\pi}{4}]$, то, разделив обе части неравенства на $\sin x + \cos x$, получим неравенство: $\sin^4 x - \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos^3 x + \cos^4 x - a \geq \frac{a^2 - 11}{2} \sin x \cos x$, которое можно переписать в виде $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{1}{4} \sin^2 2x \geq \frac{a^2 - 11}{4} \sin 2x + a$. Обозначив $y = \sin 2x$, приходим к неравенству $y^2 + (a^2 - 9)y + 4a - 4 \leq 0$.

При $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ видим, что $0 \leq y \leq 1$. Найдем a , при которых для любых y таких, что $0 \leq y \leq 1$, будет выполняться неравенство

$f(y) = y^2 + (a^2 - 9)y + 4a - 4 \leq 0$. Требуемые условия выполняются, если $\begin{cases} f(0) \leq 0, \\ f(1) \leq 0. \end{cases}$ Решив последнюю систему, находим, что $-6 \leq a \leq 1$.

Ответ: $-6 \leq a \leq 1$.

4.270. При каких значениях параметра a неравенство $a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$ справедливо при любых значениях x ?

Решение.

Так как исходное неравенство должно выполняться при всех значениях переменной x , то оно должно выполняться и при

$x = \frac{\pi}{2}$. При таком значении x из неравенства получаем, что $82a - 3 > 0$. Итак, все значения параметра a , удовлетворяющие требованию задачи, таковы, что $a > \frac{3}{82}$.

Замечая теперь, что при любом значении переменной x справедливы неравенства: $\cos^2 x \geq 0$, $4 - \sin x \geq 3$, $(4 - \sin x)^4 \geq 81$ и при этом $a > 0$, приходим к выводу, что $a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a \geq 81a - 3 + a = 82a - 3 > 0$.

Таким образом, все значения a из области $a > \frac{3}{82}$ удовлетворяют требованию задачи.

Ответ: $a > \frac{3}{82}$.

Упростить выражения (4.271—4.273).

4.271. $\cos(\arcsin x)$, где $-1 \leq x \leq 1$.

Решение.

Пусть $y = \arcsin x$, тогда $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin y = x$. Чтобы найти $\cos y$, воспользуемся соотношением $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$.

Получаем $\cos^2 y = 1 - x^2$. Но $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. На этом отрезке косинус принимает только положительные значения.

Таким образом, $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, т. е. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, где $|x| \leq 1$.

Ответ: $\sqrt{1-x^2}$.

4.272. $\cos(2\arcsin x)$.

Решение.

Так как $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, то $\cos(2\arcsin x) = \cos^2(\arcsin x) - \sin^2(\arcsin x) = (1-x^2) - x^2 = 1-2x^2$.

Ответ: $1-2x^2$.

4.273. $\sin(\operatorname{arctg} x)$.

Решение.

Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Тогда $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} y = x$. Далее так как $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$, то $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$. Из-за того, что $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ и на этом промежутке косинус принимает только положительные значения, то $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y}}$.

Следовательно, $\sin y = \operatorname{tg} y \cos y = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y}}$. Это значит, что $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Ответ: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Вычислить (4.274—4.281).

4.274. $\sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

Решение.

Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. Тогда $0 < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$. Более того, так как $-\frac{3}{4} < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Для вычисления $\sin \frac{\alpha}{2}$ воспользуемся формулой $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$. Следовательно, необходимо сначала найти $\cos \alpha$. Так как $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ и $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$, то $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$. Далее так как на интервале $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\cos \alpha < 0$, то $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

Итак, $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{2} = \frac{4}{5}$. Так как $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, а на этом интервале синус положителен, то $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Таким

образом, $\sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$4.275. \arccos\left(\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)\right).$$

Решение.

Пусть $y = \arccos\left(\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)\right)$. Тогда $0 \leq y \leq \pi$ и $\cos y = \cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$. Но $\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right) = \cos\left(-4\pi + \frac{3}{5}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$.

Следовательно, $\cos y = \cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$, и так как $0 < \frac{3}{5}\pi < \pi$, то получаем $y = \frac{3}{5}\pi$. Итак, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)\right) = \frac{3}{5}\pi$.

Ответ: $\frac{3}{5}\pi$.

$$4.276. \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$$

Решение.

Пусть $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$. Из равенства $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$ получаем $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, где $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \leq \frac{\pi}{2}$. На этом промежутке синус принимает отрицательные значения лишь при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Следовательно, задача свелась к вычислению

$$\operatorname{tg} \alpha \text{ при условии, что } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \text{ и } \sin \alpha = -\frac{1}{3}. \text{ Из формулы } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ получаем } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$4.277. \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} - 2 \sin^2 \left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right).$$

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} - 2 \sin^2 \left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right) &= \operatorname{ctg} \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \sin^2 \left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 1 + \cos \left(5\pi + \arcsin \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right) = \\ &= 1 - 1 + \cos \left(5\pi + \arcsin \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right) = \cos \left(5\pi + \arcsin \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right) = -\cos \left(\arcsin \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right) = -\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

(см. решение задачи 4.271).

Ответ: $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$4.278. \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right).$$

Решение.

Из определения главных значений обратных тригонометрических функций следует, что $\arccos(\cos x) = x$, если $0 \leq x \leq \pi$.

Чтобы использовать эту формулу, заметим, что $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{9\pi}{14}$.

Таким образом, $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{9\pi}{14}\right) = \frac{9\pi}{14}$.

Ответ: $\frac{9\pi}{14}$.

4.279. $\arcsin(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)))$.

Решение.

$$\begin{aligned} \arcsin(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1))) &= \arcsin(2\cos^2(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)) - 1) = \arcsin(2(\cos(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1))^2 - 1)) = \\ &= \left[\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right] = \arcsin\left(2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}}\right)^2 - 1\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$.

4.280. $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$.

Решение.

По аналогии с решением задачи 4.278 имеем $\cos\frac{33\pi}{5} = \cos\left(6\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$. Следовательно,

$$\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = -\frac{\pi}{10}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{10}$.

4.281. $A = \cos^6\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right) + \cos^6\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} A &= \left(\cos^2\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)\right)^3 + \left(\cos^2\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)^3 = \left(\frac{1 + \cos(5\pi + \arcsin\frac{3}{5})}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 + \cos(7\pi - \arcsin\frac{4}{5})}{2}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{1 - \cos(\arcsin\frac{3}{5})}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 - \cos(\arcsin\frac{4}{5})}{2}\right)^3 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{9}{1000}. \end{aligned}$$

Ответ: 0,009.

4.282. Доказать, что $\cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{7}\right) = \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)$.

Решение.

Пусть $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \alpha$. Из этого равенства получаем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$, где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Вычислим $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{49}}{1 + \frac{1}{49}} = \frac{24}{25}$.

Обозначим $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \beta$. Отсюда находим $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$, где $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тогда $\sin 4\beta = 2 \sin 2\beta \cos 2\beta = 2 \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = 2 \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{24}{25}$.

QED.

4.283. Доказать тождество $\sin^2\left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2}\right)\right) &= \left(\sin\left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right)^2 = \\ &= \left(\sin(\operatorname{arctg} 3) \cos\left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \cos(\operatorname{arctg} 3) \sin\left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right)^2 = \left[\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\right. \\ \cos(\operatorname{arctg} x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}] = \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{1+9}} \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{1+9}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\right)^2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{50}} - \frac{2}{\sqrt{50}}\right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

QED.

4.284. Доказать, что $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

Пусть $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \alpha_1$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \alpha_2$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \alpha_3$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \alpha_4$. Очевидно, что $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Поэтому $0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < \pi$. Для доказательства тождества достаточно установить, что $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 1$.

Так как $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{4}{7}$, $\operatorname{tg}(\alpha_3 + \alpha_4) = \frac{3}{11}$, то $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{tg}(\alpha_3 + \alpha_4)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{tg}(\alpha_3 + \alpha_4)} = 1$.

QED.

4.285. Найти область определения функции $y = \frac{\lg x}{\arcsin(x-3)}$.

Решение.

Область определения этой функции задается системой неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ |x-3| \leq 1, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 3, \\ -1 \leq x-3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 3, \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4, x \neq 3.$$

Ответ: [2; 3) ∪ (3; 4].

4.286. Доказать формулу $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Пусть $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$, получим: $x = \sin \alpha$ и $x = \cos \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. По определению, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \beta \leq \pi$. Из последнего неравенства следует, что $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Значит, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, так как углы α и $\frac{\pi}{2} - \beta$ заключены между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ и синусы этих углов равны. QED.

4.287. Доказать тождество $\sin\left(2\arctg \frac{1}{2}\right) + \tg\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17}\right) = \frac{7}{5}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin\left(2\arctg \frac{1}{2}\right) + \tg\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17}\right) &= 2\sin\left(\arctg \frac{1}{2}\right) \cos\left(\arctg \frac{1}{2}\right) + \frac{1 - \cos\left(\arcsin \frac{15}{17}\right)}{\sin\left(\arcsin \frac{15}{17}\right)} = \\ &= \left[\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}; \sin(\arcsin x) = x \right] = \\ &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} + \frac{1 - \sqrt{1-\frac{225}{289}}}{\frac{15}{17}} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

QED.

4.288. Доказать формулу $\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$

Решение.

Пусть $\arccos x = \alpha$, $\arcsin \sqrt{1-x^2} = \beta$. Далее рассмотрим два случая:

- а) если $0 \leq x \leq 1$, то $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ (так как $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$). Остается убедиться в том, что $\sin \alpha = \sin \beta$. Но в силу неравенства $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ имеем $\sin \alpha = \pm \sqrt{1-x^2}$. С другой стороны, при всех y ($|y| \leq 1$) имеем $\sin(\arcsin y) = y$; в частности, $\sin \beta = \sin(\arcsin \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$. Следовательно, при $0 \leq x \leq 1$ имеет место формула $\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$;
- б) если $-1 \leq x \leq 0$, то $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq \pi - \beta \leq \pi$. Так как, кроме того, $\sin \alpha = \sqrt{1-x^2}$ и $\sin(\pi - \beta) = \sin \beta = \sqrt{1-x^2}$, то $\alpha = \pi - \beta$, т. е. при $-1 \leq x \leq 0$ имеет место формула $\arccos x = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}$. QED.

4.289. Доказать тождество $\cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = \frac{9}{25}$.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} \cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3) &= 2 \cos^2(\operatorname{arctg} 2) - 1 - 2 \sin(2 \operatorname{arctg} 3) \cos(2 \operatorname{arctg} 3) = \\ &= 2(\cos(\operatorname{arctg} 2))^2 - 1 - 4 \sin(\operatorname{arctg} 3) \cos(\operatorname{arctg} 3) (2(\cos(\operatorname{arctg} 3))^2 - 1) = \left[\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right] = \\ &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+4}} \right)^2 - 1 - 4 \frac{3}{\sqrt{1+9}} \frac{1}{\sqrt{1+9}} \left(2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+9}} \right)^2 - 1 \right) = \frac{9}{25}. \end{aligned}$$

QED.

4.290. Доказать формулы $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ и $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Решение.

Докажем, что $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Пусть $\arcsin(-x) = \alpha$, тогда $-x = \sin \alpha$ и по определению,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Так как $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = x$ и из неравенства (1) следует неравенство $-\frac{\pi}{2} \leq -\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $-\alpha = \arcsin x$, откуда $\alpha = -\arcsin x$, т. е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Аналогично доказывается формула $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

QED.

4.291. Доказать тождество $\cos(2 \operatorname{arctg} 7) = \sin(4 \operatorname{arctg} 3)$.

Решение.

Пусть $\alpha = \cos(2 \operatorname{arctg} 7)$, $\beta = \sin(4 \operatorname{arctg} 3)$, тогда $\alpha = 2 \cos^2(\operatorname{arctg} 7) - 1 = 2(\cos(\operatorname{arctg} 7))^2 - 1 = 2 \left(\frac{7}{\sqrt{1+7^2}} \right)^2 - 1 = \frac{24}{25}$ и

$$\beta = 2 \sin(2 \operatorname{arctg} 3) \cos(2 \operatorname{arctg} 3) = 4 \sin(\operatorname{arctg} 3) \cos(\operatorname{arctg} 3) (2(\cos(\operatorname{arctg} 3))^2 - 1) = 4 \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} \left(2 \left(\frac{3}{\sqrt{1+3^2}} \right)^2 - 1 \right) = \frac{24}{25}.$$

Таким образом, получили $\frac{24}{25} = \frac{24}{25}$.

QED.

4.292. Доказать, что если $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение.

Из определения главных значений обратных тригонометрических функций следует, что $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$, если $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Если $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $-\frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Но тогда $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2\pi n)) = x - 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

QED.

4.293. Доказать, что если $\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta + \operatorname{arctg} \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$.

Решение.

Из условия получаем $\arctg \alpha + \arctg \beta = \frac{\pi}{2} - \arctg \gamma$ и $\tg(\arctg \alpha + \arctg \beta) = \tg\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \gamma\right) \Leftrightarrow \frac{\tg(\arctg \alpha) + \tg(\arctg \beta)}{1 - \tg(\arctg \alpha)\tg(\arctg \beta)} =$
 $= \ctg(\arctg \gamma)$. По формулам $\tg(\arctg x) = x$ и $\ctg(\arctg x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) имеем

$$\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha\gamma + \beta\gamma = 1 - \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1.$$

QED.

4.294. Доказать, что если $0 < x < 1$ и $\alpha = 2\arctg \frac{1+x}{1-x}$, $\beta = 2\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$, то $\alpha + \beta = \pi$.

Решение.

Из условия задачи получаем

$$\tg \frac{\alpha}{2} = \frac{1+x}{1-x}. \quad (1)$$

Воспользовавшись формулой $\sin \alpha = \frac{2\tg \frac{\alpha}{2}}{1 + \tg^2 \frac{\alpha}{2}}$, получим (см. (1))

$$\sin \alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow y = \arcsin(\sin \alpha) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = \beta. \quad (2)$$

Так как $0 < x < 1$, то $\frac{\pi}{4} < \arctg \frac{1+x}{1-x} < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Тогда $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi \leq 0$ и $\arcsin(\sin(\alpha - \pi)) = \arcsin(-\sin \alpha) =$
 $= -\arcsin(\sin \alpha) = -y$. Но угол $\alpha - \pi$ лежит в пределах главного значения функции $\arcsin x$. Следовательно,
 $y = \arcsin(\sin \alpha) = \pi - \alpha.$ (3)

Из (2) и (3) получаем, что $\alpha + \beta = \pi$.

QED.

4.295. Найти значения функции $f(x) = \arcsin(\sin x)$ при $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Решение.

Так как $\arcsin(\sin x) = x$ при $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin 1) = 1$, так как $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$. Далее $f(2) = \arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) =$
 $= \pi - 2$, так как $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, и тогда $0 < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично рассуждая, получаем, что $\arcsin(\sin 3) = \pi - 3$; $\arcsin(\sin 4) = \pi - 4$; $\arcsin(\sin 5) = 5 - 2\pi$; $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$; $\arcsin(\sin 7) = 7 - 2\pi$.

Ответ: 1; $\pi - 2$; $\pi - 3$; $\pi - 4$; $5 - 2\pi$; $6 - 2\pi$; $7 - 2\pi$.

4.296. Найти соотношение между $\arcsin(\cos(\arcsin x))$ и $\arccos(\sin(\arccos x))$.

Решение.

В формулах из условия задачи берутся главные значения обратных тригонометрических функций. Рассмотрим $\cos(\arcsin x)$.

Это косинус дуги, синус которой равен x . Значит, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, где $|x| \leq 1$. Здесь существенно то, что

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$. Аналогично $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, где $|x| \leq 1$. Обозначим $y = \sqrt{1-x^2}$; тогда $0 \leq y \leq 1$.

Таким образом, надо найти соотношение между $\arcsin y$ и $\arccos y$ при $0 \leq y \leq 1$. Эти два угла дополняют друг друга до $\frac{\pi}{2}$ (так как $\arcsin \alpha + \arccos \alpha = \frac{\pi}{2}$). Таким образом, $\arcsin(\cos(\arcsin x)) + \arccos(\sin(\arccos x)) = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\arcsin(\cos(\arcsin x)) + \arccos(\sin(\arccos x)) = \frac{\pi}{2}$.

4.297. Решить уравнение $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

Имеем

$$\begin{aligned} \arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6} &\Leftrightarrow \sin(\arccos x - \arcsin x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(\arccos x) \cos(\arcsin x) - \\ &- \cos(\arccos x) \sin(\arcsin x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2} - x \cdot x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-2x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Проверкой убеждаемся, что $x_2 = -\frac{1}{2}$ — посторонний корень.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

4.298. Показать, что при $a < \frac{1}{32}$ уравнение $(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = \alpha\pi^3$ не имеет корней.

Решение.

Так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то преобразуем исходное уравнение к виду

$$12\pi^2 - 6\pi^2 t + (1-8\alpha)\pi^3 = 0, \quad (1)$$

где $t = \arcsin x$. При $\alpha < \frac{1}{32}$ дискриминант квадратного уравнения $D = 36\pi^4 - 48\pi^3(1-8\alpha) < 0$. Следовательно, корни уравнения (1)

невещественные, и поэтому исходное уравнение при $\alpha < \frac{1}{32}$ не имеет решения.

QED.

4.299. Решить уравнение $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

Имеем

$$\begin{aligned} \arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3} &\Leftrightarrow \cos(\arcsin 2x + \arcsin x) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2} \sqrt{1-x^2} - 2x \cdot x = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 7x^2 = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}, x_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}. \end{aligned}$$

Проверкой убеждаемся, что $x_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$ — посторонний корень.

Ответ: $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$.

4.300. Решить неравенство $1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + \arccos(x + |\sin y|) \leq 0$. (1)

Решение.

Так как функция $\alpha = \arccos t$ определена лишь для $t \in [-1; 1]$, то $-1 \leq x + |\sin y| \leq 1$, т. е.

$$-1 - |\sin y| \leq x \leq 1 - |\sin y|. \quad (2)$$

Далее так как $0 \leq |\sin y| \leq 1$, то из (2) следует, что

$$-2 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

На промежутке $(-2; 1]$ функция $u = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$ возрастает, значит, $u_{\text{наиб}} = u(1) = \frac{\pi}{4} = 1$, т. е. на этом отрезке $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \leq 1$, а значит, $1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \geq 0$. В то же время функция $\alpha = \arccos t$ по определению принимает значения из отрезка $[0; \pi]$, т. е. $\arccos(x + |\sin y|) \geq 0$.

Итак, в левой части неравенства (1) содержится сумма двух неотрицательных выражений: $1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$ и $\arccos(x + |\sin y|)$. Значит, неравенство (1) выполняется лишь в случае, когда из указанных ниже выражений обращается в нуль:

$$\begin{cases} 1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = 0, \\ \arccos(x + |\sin y|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x + |\sin y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4n + 1, \\ |\sin y| = -4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0, \\ x = 1, \\ |\sin y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1, y = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

5. ПЛАНИМЕТРИЯ

5.1. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ (по ГИЛЬБЕРТУ)

Построение геометрии как науки состоит в следующем: некоторые *основные понятия* считаются известными и не определяются; кроме этого, высказываются некоторые основные предложения — *аксиомы*, которые считаются справедливыми. Из них логическим путем строится вся геометрия.

Основными понятиями геометрии являются три вида объектов, имеющих названия и обозначения:

- 1) *точки*, которые обычно обозначаются A, B, C, \dots ;
- 2) *прямые*, которые обозначаются a, b, c, \dots ;
- 3) *плоскости*, которые обозначаются $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

5.1.1. АКСИОМЫ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

1. Любым двум различным точкам A и B всегда соответствует некоторая прямая a , проходящая через эти точки.
2. Любым двум различным точкам A и B соответствует не более одной прямой, проходящей через эти точки.
3. Всякой прямой принадлежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.
4. Любым трем точкам A, B, C , не лежащим на одной прямой, соответствует по крайней мере одна плоскость α , проходящая через эти точки. Всякой плоскости принадлежит по крайней мере одна точка.
5. Любым трем точкам A, B, C , не лежащим на одной прямой, соответствует не более одной плоскости, проходящей через эти точки.
6. Если две различные точки A и B прямой a принадлежат некоторой плоскости α , то этой плоскости принадлежат все точки прямой a .
7. Если две плоскости α и β имеют общую точку A , то они имеют еще по крайней мере одну общую точку B , отличную от A .
8. Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

5.1.2. АКСИОМЫ ПОРЯДКА

Аксиомы этой группы определяют понятие «между», служащее для описания отношения порядка.

1. Если точка B лежит между точками A и C , то A, B, C являются различными точками некоторой прямой, причем точка B лежит между C и A .
2. Для различных точек A и C , лежащих на прямой AC , найдется по крайней мере одна точка B , такая, что точка C лежит между A и B .
3. Из любых трех точек одной прямой одна и только одна, лежит между двумя другими.
4. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — некоторая прямая на плоскости ABC , не проходящая ни через одну из этих точек. Тогда, если прямая a пересекает отрезок AB , то она пересекает также или отрезок BC , или AC .

(Множество всех точек прямой AB , лежащих между точками A и B , включая A и B , называется отрезком.)

5.1.3. АКСИОМЫ РАВЕНСТВА

Пусть на прямой a заданы четыре различные точки A, B, A' и O так, что точка O лежит между A и B , но не лежит между A и A' (рис. 5.1). В этом случае говорят, что точки A и A'

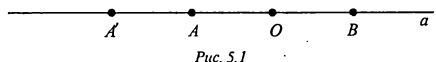


Рис. 5.1

прямой a лежат по одну и ту же сторону от точки O , а точки A, B лежат на прямой по разные стороны от точки O . Множество всех точек прямой a , лежащих по одну сторону от точки O , включая точку O , называется *лучом*, выходящим из точки O .

1. Пусть A и B — две различные точки прямой a , A' — точка прямой a' (a' может совпадать с a). Тогда на одном из лучей, определенных заданием точки A' на прямой a' , всегда найдется такая точка B' , что отрезок AB при наложении совпадает с отрезком $A'B'$, т. е. эти отрезки равны между собой. Это обозначается так: $AB = A'B'$.
2. Если каждый из отрезков $A'B'$ и $A''B''$ равен отрезку AB , то отрезок $A'B'$ равен отрезку $A''B''$.
3. Пусть на прямой a заданы два отрезка, AB и BC , не

имеющие общих точек, и пусть на той же прямой или на некоторой другой прямой a' заданы отрезки $A'B'$ и $B'C'$, также не имеющие общих точек. Тогда если $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$, то $AC = A'C'$.

4. Пусть на плоскости заданы $\angle(h, k)$ (угол между лучами h и k), прямая a' и одна из соответствующих ей полуплоскостей. Если h' — один из лучей на прямой a' , то существует один и только один луч k' , такой, что $\angle(h, k)$ при наложении совпадает с $\angle(h', k')$, т. е. равен ему: $\angle(h, k) = \angle(h', k')$, причем все внутренние точки угла $\angle(h', k')$ лежат в заданной полуплоскости. Всякий угол равен самому себе, т. е. $\angle(h, k) = \angle(h, k)$.
5. Если для треугольников ABC и $A'B'C'$ выполняются равенства $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$, то справедливо и равенство $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

5.1.4. АКСИОМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ

1. Пусть AB и CD — два произвольных отрезка. Тогда на прямой AB найдется n различных точек $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ таких, что каждый из отрезков $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ равен отрезку CD , причем точка B лежит между точками A и A_n .
2. Существует прямая a , обладающая следующим свойством: если $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ — такая последовательность отрезков на прямой a , что каждый последующий отрезок, начиная со второго, содержится в предыдущем, то на прямой a найдется точка, общая для всех отрезков.

5.1.5. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Пусть a — произвольная прямая, A — точка, не принадлежащая прямой a . Тогда в плоскости, определяемой прямой a и точкой A , существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a .

Геометрическая система, построенная на перечисленных аксиомах, называется *евклидовой геометрией*, так как она

совпадает с геометрией, изложенной Евклидом в его «Началах». Ту же самую геометрическую систему можно построить и на основе многих других систем аксиом, чему имеется немало примеров. Можно также строить геометрические системы, основанные на таких наборах аксиом, что в результате получаются геометрии, отличные от евклидовой. Такие геометрии называются *неевклидовыми*.

5.2. Углы и многоугольники

5.2.1. Углы

Всякая прямая делится любой своей точкой на два луча, при этом точка деления называется *началом луча*.

Часть прямой, лежащая между двумя ее точками, называется *отрезком*, а указанные две точки — *концами отрезка*. Длина отрезка AB обозначается $|AB|$. Отрезки считаются равными, если их длины равны. Длина отрезка зависит от выбора единичного отрезка (единицы измерения).

Два луча, выходящие из некоторой точки плоскости, делят эту плоскость на две части, которые называются *углами*. Лучи, образующие угол, называются его *сторонами*, а часть плоскости, соответствующая углу, — *внутренней областью* угла.

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию. Угол, равный смежному с ним углу, называется *прямым*.

Развернутым называется угол, стороны которого составляют прямую линию. Развернутый угол равен сумме двух прямых углов и при градусном измерении считается равным 180° . Угол, равный

одному градусу, — это угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла;

60-я часть градуса называется минутой ($1'$), а 60-я доля минуты — секундой ($1''$). При радианном измерении угла развернутый угол считается равным числу $\pi \approx 3,1415926 \dots$. Градусную (или радианную) меру угла называют *ветвями угла*. Связь между радианной и градусной мерами определяется по формуле

$$\alpha = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \text{ рад.}$$

Прямой угол равен $90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \right)$. Угол, меньший 90° , называется

острым, угол, больший 90° , но меньший 180° , называется *тупым*. *Полным* называется угол, стороны которого совпадают; он равен 360° .

Биссектрисой угла называется луч с началом в вершине угла, делящий угол на два равных угла. Каждая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла.

Две пересекающиеся прямые образуют две пары равных (*вертикальных*) углов. Если прямые не являются взаимно перпендикулярными, то за угол между прямыми принимается меньший из этих углов (прямые называются *перпендикулярными*, если они имеют пару вертикальных углов, равных 90°).

5.2.2. Многоугольники

Совокупность последовательно соединенных отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ (отрезки, имеющие общий конец, не лежащие на одной прямой) на плоскости называется *замкнутой простой ломаной*, если, кроме точек соединения, эти отрезки не имеют других общих точек.

Часть плоскости, ограниченная замкнутой простой ломаной, называется *многоугольником*, а сама ломаная — *границей* многоугольника. Отрезки ломаной называются *сторонами* многоугольника, а точки A_1, A_2, \dots, A_n — его *вершинами*. Число вершин многоугольника равно числу его сторон.

Отметим, что под частью плоскости, ограниченной простой замкнутой ломаной, понимается та часть плоскости, которая содержится в круге достаточно большого радиуса.

Геометрическая фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок прямой.

Фигуры, не являющиеся выпуклыми, называются *вогнутыми*.

Многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда при продолжении любой из его сторон весь многоугольник лежит по одну сторону от этой прямой.

Всякий треугольник является выпуклым, а среди четырехугольников уже существуют вогнутые.

Если из вершины многоугольника провести два луча, содержащих две смежные стороны выпуклого многоугольника, то выпуклый многоугольник будет целиком лежать в одном из углов, образованных этими лучами. Такой угол называется *внутренним углом* (углом) многоугольника (рис. 5.2). *Внешним углом* выпуклого многоугольника называется угол, смежный с его внутренним углом (рис. 5.3).



Рис. 5.2



Рис. 5.3

Многоугольник именуется по числу своих углов. Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Сумма всех сторон многоугольника называется *периметром* многоугольника. Отрезок, соединяющий две не соседние вершины многоугольника, называется *диагональю* многоугольника.

Выпуклый многоугольник имеет $\frac{1}{2}n(n-3)$ диагоналей.

Многоугольник с равными сторонами и углами называется *правильным*. Внутренний угол правильного n -угольника

равен $\frac{1}{n}(n-2)180^\circ$.

5.3. ТРЕУГОЛЬНИКИ

5.3.1. Основные понятия

Треугольником называется многоугольник с тремя углами (и сторонами) (рис. 5.4).

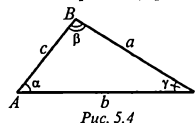


Рис. 5.4

Отрезок прямой, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его *средней линией*; он параллелен его третьей стороне и равен ее половине.

Отрезок прямой, соединяющий середину стороны треугольника с противоположной ей вершиной, называется *медианой*. Медианы пересекаются в одной точке, которая лежит внутри треугольника и называется *центром тяжести* треугольника. Медианы треугольника делятся центром тяжести в отношении 2:1, считая от вершины. Каждая из медиан треугольника делит его на два треугольника равной площади. Длина медианы m_a , проведенной к стороне a , находится по формуле

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника от его вершины до точки пересечения с противоположной стороной называется *биссектрисой* треугольника. Все три биссектрисы треугольника пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник. Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам. Длина l_c биссектрисы треугольника, проведенной к стороне c , выражается через длины сторон a , b и отрезки третьей стороны a_1 , b_1 по формуле

$$l_c = \sqrt{ab - a_1b_1},$$

а через длины сторон a , b , c — по формуле

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Отрезок перпендикуляра, проведенного через вершину A треугольника к прямой, содержащей сторону BC , до пересечения с этой прямой, называется *высотой* треугольника, опущенной из вершины A на *основание* BC . Длину этой высоты обозначают h_a и находят по формуле

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — *полупериметр*.

Три прямые, содержащие различные высоты треугольника, всегда пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* треугольника. В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника; в остроугольном — внутри; в прямоугольном — совпадает с вершиной прямого угла.

Треугольник называется *тупоугольным*, *остроугольным*, *прямоугольным*, если его наибольший внутренний угол соответственно больше, меньше, равен 90° .

В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол; против большего угла лежит большая сторона; против равных сторон лежат равные углы и против равных углов лежат равные стороны.

Стороны и углы треугольника связаны между собой *теоремой синусов* и *теоремой косинусов*.

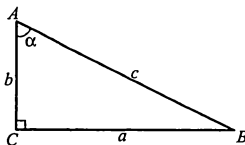


Рис. 5.5

Для существования треугольника, имеющего данные стороны, необходимо и достаточно, чтобы сумма длин двух любых его сторон была больше длины оставшейся стороны.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 5.5).

Имеют место следующие соотношения:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (теорема Пифагора); } a = c \sin \alpha; b = c \cos \alpha; a = b \operatorname{tg} \alpha; b = a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Рассмотрим *основные признаки равенства* двух произвольных треугольников.

Два треугольника *равны* (имеют соответственно равные стороны и соответственно равные углы), если:

- 1) три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого;
- 2) две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника;
- 3) сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника;
- 4) две стороны и наибольший из противоположных им углов одного треугольника соответственно равны двум сторонам и наибольшему из противоположных им углов другого треугольника.

5.3.2. Свойства равнобедренного треугольника

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона — *основанием*.

Теорема 5.1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC , где $AB = AC$ (рис. 5.6), и проведем в нем биссектрису $AD \perp \angle BAC$.

$\triangle ADB = \triangle ADC$ по второму признаку равенства треугольников ($AB = AC$, AD — общая сторона, $\angle BAD = \angle CAD$, так как AD — биссектриса); следовательно, $\angle B = \angle C$. QED.

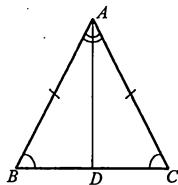


Рис. 5.6

5.3.3. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка

Прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему, называется *серединным перпендикуляром* к отрезку.

Теорема 5.3. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Доказательство. Пусть прямая l — серединный перпендикуляр к отрезку AB , точка O — середина отрезка AB , точка M — произвольная точка прямой l (рис. 5.7).

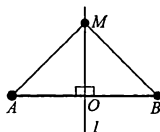


Рис. 5.7

Если $M = O$, то $AM = BM$, так как O — середина отрезка.

Теорема 5.2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

Доказательство. Пусть AD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC , где $AB = AC$ (см. рис. 5.6). Тогда $\triangle ADB = \triangle ADC$ ($AB = AC$, AD — общая сторона, $\angle BAD = \angle CAD$); следовательно, $BD = DC$ и AD — медиана, $\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$ (углы смежные) и AD — высота. QED.

Аналогично доказывается, что в равнобедренном треугольнике:

- 1) высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой;
- 2) медиана, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.

Если $M \neq O$, то $\triangle AOM = \triangle BOM$, так как $AO = OB$, OM — общая сторона, $\angle AOM = \angle BOM = 90^\circ$ (OM — перпендикуляр), следовательно, $AM = BM$. QED.

Теорема 5.4. Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку M , равноудаленную от концов отрезка AB . Если точка M лежит на прямой AB , то она совпадает с точкой $O \in l$. Если точка M не лежит на прямой AB , то в $\triangle AMB$ (см. рис. 5.7) $AM = BM$ и отрезок MO — медиана, а значит, и высота, т.е. $MO \perp AB$, и прямая OM совпадает с l , следовательно, $M \in l$. QED.

5.3.4. Признаки параллельности прямых

Две различные прямые a и b , лежащие в одной плоскости, называются *параллельными*, если они не имеют ни одной общей точки (см. аксиому параллельности); записывается это так: $a \parallel b$. В множестве всех прямых плоскости отношение параллельности обладает следующими свойствами:

- 1) любая прямая параллельна самой себе ($a \parallel a$) (свойство рефлексивности);
- 2) если прямая a параллельна прямой b , то и прямая b параллельна прямой a ($a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$) (свойство симметричности);
- 3) если прямая a параллельна прямой b , а прямая b параллельна прямой c , то и прямая a параллельна прямой c ($a \parallel b, b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$) (свойство транзитивности).

Теорема 5.5. Если при пересечении двух прямых a и b секущей l внутренние накрест лежащие углы равны ($\angle 1 = \angle 2$), то прямые a и b параллельны (рис. 5.8).

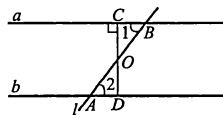


Рис. 5.8

Доказательство. Если $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$, то $a \perp AB$, $b \perp AB$, следовательно, $a \parallel b$. Если $\angle 1 = \angle 2 \neq 90^\circ$, то через середину O отрезка AB проведем прямую CD перпендикулярно к a . Пусть D — точка пересечения этого перпендикуляра с прямой b (она существует по аксиоме параллельности). $\triangle AOD = \triangle BOC$. Так как $AO = OB$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle AOD = \angle BOC$

(как вертикальные), следовательно, $\angle ADO = \angle OCB = 90^\circ$. Тогда $CD \perp a$, $CD \perp b$; следовательно, $a \parallel b$. QED.

Теорема 5.6. Если при пересечении двух прямых a и b секущей l соответственные углы равны ($\angle 1 = \angle 2$), то прямые a и b параллельны (рис. 5.9).

Доказательство. Так как $\angle 2 = \angle 3$ (как вертикальные), то, следовательно, $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \angle 1 = \angle 3$ и прямые параллельны по предыдущему признаку. QED.

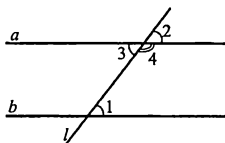


Рис. 5.9

Теорема 5.7. Если при пересечении двух прямых a и b секущей l сумма внутренних односторонних углов равна 180° ($\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$), то прямые параллельны (см. рис. 5.9).

Доказательство. Так как $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ (как смежные) и $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$, то $\angle 1 = \angle 3$ и прямые параллельны по первому признаку. QED.

Углы, образованные при пересечении двух прямых a и b секущей l (рис. 5.10):

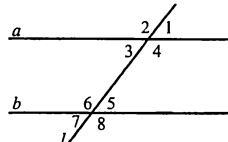


Рис. 5.10

$\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$ — пары соответственных углов;
 $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$ — пары внешних односторонних углов;
 $\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$ — пары внутренних односторонних углов;
 $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$ — пары внутренних накрест лежащих углов;
 $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$ — пары внешних накрест лежащих углов.

5.3.5. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника

Теорема 5.8. Сумма углов любого треугольника равна 180° .

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 5.11).

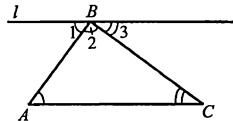


Рис. 5.11

Проведем через вершину B прямую $l \parallel AC$ (см. рис. 5.11). Тогда $\angle A = \angle 1$, $\angle C = \angle 3$ (как внутренние накрест лежащие при прямых $l \parallel AC$), $\angle 2 = \angle B$. Отсюда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. QED.

Теорема 5.9. Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.

Доказательство. Рассмотрим выпуклый n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ (рис. 5.12) и соединим вершину A_1 с оставшимися вершинами диагоналями.

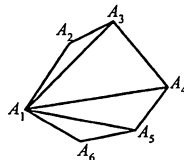


Рис. 5.12

Многоугольник разбивается на $(n - 2)$ треугольников, сумма углов которых равна сумме углов n -угольника, т.е. искомая сумма равна $180^\circ(n - 2)$. QED.

5.3.6. Площадь треугольника

Достроим произвольный треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (рис. 5.13).

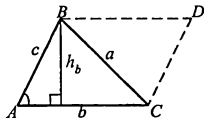


Рис. 5.13

Получим $\triangle ABC = \triangle BDC$, так как $AB = CD$, $AC = BD$, BC — общая. Площади равных фигур равны, следовательно, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDC}$. Площадь параллелограмма

$$S_{ABDC} = h_b \cdot b = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BDC} = 2S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot h_b.$$

Так как $h_b = Ab \sin A$, то получаем формулу

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A.$$

Площадь треугольника ABC также может быть вычислена по формулам:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{формула Герона}),$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr,$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр, a, b, c — стороны треугольника; R — радиус окружности, описанной около треугольника; r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

5.3.7. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Теорема 5.10 (теорема синусов).

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (рис. 5.14): $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

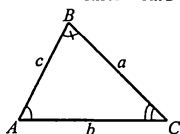


Рис. 5.14

Доказательство. Площадь $\triangle ABC$ может быть вычислена по формулам:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2} ac \sin B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab \sin C = bc \sin A, \quad bc \sin A = ac \sin B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

QED.

$$\text{Можно показать, что } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

5.3.8. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Теорема 5.11 (теорема косинусов).

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

Доказательство. Для $\triangle ABC$ введем систему координат xOy , как показано на рис. 5.15.

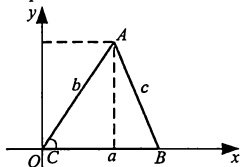


Рис. 5.15

Тогда точка A имеет координаты $A(b \cos C, b \sin C)$, а точка $B(a; 0)$. По формуле расстояния между двумя точками получаем

$$AB^2 = c^2 = (b \cos C - a)^2 + b^2 \sin^2 C = b^2 \cos^2 C - 2ab \cos C + a^2 + b^2 \sin^2 C = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad \text{QED.}$$

Теоремы синусов и косинусов позволяют находить неизвестные стороны и углы треугольника по известным сторонам и углам:

1) если даны сторона и прилежащие к ней углы, то сначала находят третий угол, а потом по теореме синусов — неизвестные стороны;

2) если даны две стороны и угол между ними, то сначала по теореме косинусов находят третью сторону, а затем по теореме синусов или косинусов — неизвестные углы.

5.3.9. ПОДОБИЕ

Преобразование подобия называется такое преобразование плоскости, при котором отношение образа любого отрезка к самому этому отрезку постоянно и равно k ; k назы-

вается **коэффициентом подобия**. Если $k > 1$, то говорят о подобном расширении, если $k < 1$, то говорят о сжатии. Всякая гомотетия является преобразованием подобия.

Каждая изометрия является преобразованием подобия с коэффициентом подобия $k = 1$.

Всякое преобразование подобия можно получить последовательным применением гомотетии и изометрии, всякое подобие *сохраняет углы*.

Две фигуры Φ_1 и Φ_2 называются подобными, если найдется преобразование подобия, переводящее одну из них в другую. Подобие обозначают знаком \sim .

Свойства подобных фигур:

1) любая фигура Φ подобна самой себе с $k = 1$ (рефлексивность);

2) если $\Phi_1 \sim \Phi_2$ с коэффициентом подобия k , то $\Phi_2 \sim \Phi_1$ с коэффициентом подобия $k' = \frac{1}{k}$ (симметричность);

3) если $\Phi_1 \sim \Phi_2$ с коэффициентом подобия k_1 , а $\Phi_2 \sim \Phi_3$ с коэффициентом подобия k_2 , то $\Phi_1 \sim \Phi_3$ с коэффициентом подобия $k = k_1 \cdot k_2$ (транзитивность).

Если стороны одного многоугольника пропорциональны сторонам другого многоугольника и соответственные углы (углы, лежащие между пропорциональными сторонами) этих многоугольников равны, то такие многоугольники *подобны*. Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

5.3.10. ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 5.12. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, где $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 5.16). Тогда $\angle C = \angle C_1$ (сумма углов треугольника 180°).

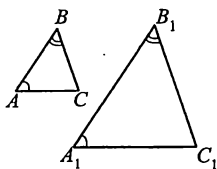


Рис. 5.16

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A, \quad S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \sin A_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}. \text{ Используя } \angle C = \angle C_1, \text{ имеем}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot BC}{A_1C_1 \cdot B_1C_1}.$$

$$\frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{BC \cdot AC}{B_1C_1 \cdot A_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и формулы площади, находим, что $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Получили, что стороны первого треугольника пропорциональны сторонам второго треугольника и соответственные углы равны, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. QED.

Теорема 5.13. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, где $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$, а также $\triangle ABC_2$, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис. 5.17).

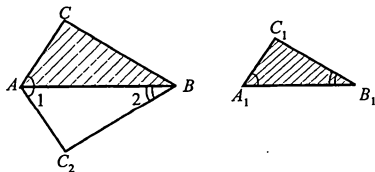


Рис. 5.17

$\triangle ABC_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку подобия треугольников, следовательно,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}. \text{ По условию } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow AC = AC_2.$$

$\triangle ABC = \triangle ABC_2$ (AB — общая сторона, $AC = AC_2$, $\angle A = \angle 1$), поэтому $\angle B = \angle 2 = \angle B_1$, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку подобия треугольников. QED.

Теорема 5.14. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, где $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, а также $\triangle ABC_2$, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по первому признаку подобия треугольников), следовательно,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1} \Rightarrow BC = BC_2, CA = C_2A.$$

$\triangle ABC = \triangle ABC_2$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle A = \angle 1 = \angle A_1$, $\angle B = \angle 2 = \angle B_1$ и $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку подобия треугольников. **QED.**

5.3.11. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Теорема 5.15 (теорема Пифагора).

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , проведем $CD \perp AB$ и обозначим $AD = b_c$, $BD = a_c$ (рис. 5.18).

$\triangle ADC \sim \triangle ACB$ ($\angle A$ — общий, $\angle ADC = \angle ACB = 90^\circ$), следовательно, $\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = b_c \cdot c$.
 $\triangle BDC \sim \triangle BCA$ ($\angle B$ — общий, $\angle BDC = \angle BCA = 90^\circ$), поэтому $\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = a_c \cdot c$.

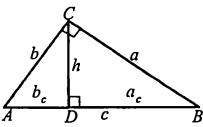


Рис. 5.18

Таким образом, $a^2 + b^2 = a_c \cdot c + b_c \cdot c = (a_c + b_c) \cdot c = c^2$. **QED.**

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы Пифагора:

1) проекции катетов на гипотенузу находятся по формулам:

$b_c = \frac{b^2}{c}$, $a_c = \frac{a^2}{c}$, т.е. большему катету соответствует большая проекция, и наоборот;

2) высота h прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, определяется по формуле $h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$.

Действительно, $\triangle ADC \sim \triangle BDC$ (по первому признаку) $\Rightarrow \frac{b_c}{h} = \frac{h}{a_c} \Rightarrow h^2 = a_c \cdot b_c$, $h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$.

Площадь прямоугольного $\triangle ABC$ находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin C = \frac{1}{2} ab, \text{ так как } \sin C = \sin 90^\circ = 1.$$

5.3.12. РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Треугольник, все стороны которого равны, называется *равносторонним (правильным)*. В равностороннем треугольнике все углы равны 60° . Каждая высота равностороннего треугольника является одновременно биссектрисой и медианой. Точка пересечения высот лежит внутри треугольника и называется его *центром*.

Если стороны правильного треугольника равны a , то его

$$\text{площадь } S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Все правильные треугольники подобны между собой.

5.4. ОКРУЖНОСТИ

5.4.1. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки C плоскости, называемой *центром окружности* (рис. 5.19).

Окружность разбивает плоскость на две области: внутреннюю, содержащую точку C , и внешнюю. Область, содержащая центр C , вместе со своей границей (окружностью) называется *кругом*.

Радиусом окружности (круга) называется отрезок CA , соединяющий центр C окружности с любой точкой A окружности, а также его длина R или r .

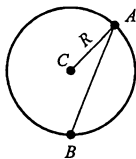


Рис. 5.19

Отрезок AB , соединяющий две любые точки A, B окружности, называется *хордой*.

Хорда (а также ее длина), проходящая через центр окружности, называется *диаметром*. Диаметр (обозначается d или D) равен удвоенному радиусу окружности.

Свойства хорд окружности:

1) диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен к этой хорде;

2) равные хорды равноудалены от центра окружности; равноудаленные от центра окружности хорды равны;

3) большая хорда расположена ближе к центру окружности, и, наоборот, из двух хорд большей будет та, которая ближе к центру;

4) пусть даны две хорды AB и KL , пересекающиеся в точке M (рис. 5.20). Тогда имеет место равенство $|AM| \cdot |MB| = |KM| \cdot |ML|$.

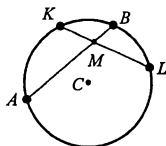


Рис. 5.20

5.4.2. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Прямая, лежащая в плоскости окружности и имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к этой окружности.

Прямая является касательной к окружности тогда и только тогда, когда эта прямая перпендикулярна к диаметру окружности и проходит через его конец.

Через каждую точку плоскости окружности, лежащую вне круга, ограниченного этой окружностью, можно провести

ти в точности две касательные к данной окружности (рис. 5.21).

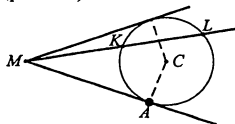


Рис. 5.21

Пусть MA — отрезок касательной до точки касания A , ML — любая прямая, имеющая с окружностью две общие точки (*секущая* окружности). Тогда $|MA|^2 = |ML| \cdot |MK|$.

5.4.3. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛА, ВПИСАННОГО В ОКРУЖНОСТЬ

Угол с вершиной в центре окружности называется *центральный* углом окружности.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным* углом (рис. 5.22, $\angle KLM$).

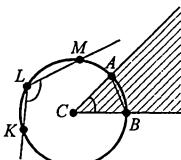


Рис. 5.22

Центральный угол определяет часть окружности, лежащей между его сторонами, которая называется *дугой* окружности и обозначается $\cup AB$ (см. рис. 5.22).

Дуга в градусах (минутах, секундах) измеряется величиной соответствующего центрального угла.

Дуга, соответствующая центральному углу, равному 180° , называется *полуокружностью*. Две дуги окружности равны тогда и только тогда, когда соответствующие им центральные углы равны, большему центральному углу соответствует большая дуга, а большей дуге — больший центральный угол.

Говорят, что вписанный угол KLM опирается на дугу KBM .

Теорема 5.16. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. Центр окружности C лежит на стороне LM вписанного угла (рис. 5.23). Тогда $\angle K = \angle L$, так как $|KC| = |LC|$ — радиусы, $\angle KCM = \angle K + \angle L = 2 \angle L$, $\angle L = \frac{1}{2} \angle KCM = \frac{1}{2} \cup KM$.

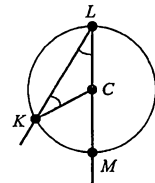


Рис. 5.23

2. Диаметр LD окружности делит $\angle KLM$ на два угла (рис. 5.24).

По доказанному в первом случае

$$\angle KLD = \frac{1}{2} \cup KD, \quad \angle DLM = \frac{1}{2} \cup DM,$$

$$\angle KLM = \angle KLD + \angle DLM =$$

$$= \frac{1}{2} \cup KD + \frac{1}{2} \cup DM = \frac{1}{2} \cup KM.$$

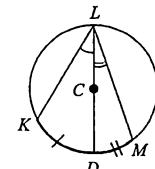


Рис. 5.24

3. Стороны LM, LK угла KLM лежат по одну сторону от диаметра окружности LD (рис. 5.25).

По доказанному в первом случае

$$\begin{aligned}\angle KLD &= \frac{1}{2} \cup KD, \quad \angle MLD = \frac{1}{2} \cup MD, \\ \angle KLM &= \angle KLD - \angle MLD = \frac{1}{2} \cup KD - \frac{1}{2} \cup MD = \frac{1}{2} \cup KM.\end{aligned}$$

QED.

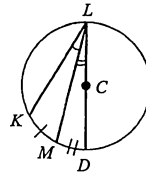


Рис. 5.25

5.4.4. Дуги, хорды и углы в окружности

Рассмотрим хорду AB , которая не совпадает с диаметром окружности (рис. 5.26). Говорят, что хорда AB стягивает дугу AB ($\cup AB < 180^\circ$). Существуют следующие соотношения между хордами и стягиваемыми ими дугами:

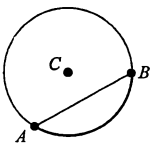


Рис. 5.26

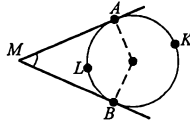


Рис. 5.27

1) равные дуги стягиваются равными хордами и равные хорды стягивают равные дуги;

2) длина хорды всегда меньше длины стягиваемой ею дуги;

3) диаметр, перпендикулярный к хорде, делит стягиваемую хордой дугу пополам.

Угол, образованный двумя касательными к окружности, проведенными из некоторой точки M , называется *описанным* (рис. 5.27).

Величина этого угла находится по формуле

$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup AKB - \cup ALB).$$

Величину угла, образованного двумя секущими MB и MA_1 , проведенными из некоторой точки M (рис. 5.28), получают по формуле

$$\angle BMA_1 = \frac{1}{2} (\cup BKB_1 - \cup ALA_1).$$

Величина угла φ , образованного двумя хордами AB и A_1B_1 окружности (рис. 5.29), определяется по формуле

$$\varphi = \frac{1}{2} (\cup BKB_1 + \cup ALA_1).$$

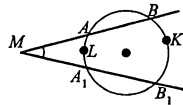


Рис. 5.28

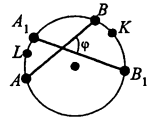


Рис. 5.29

5.4.5. Окружность, описанная около треугольника

Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется *описанной* около треугольника.

Теорема 5.17. Около любого треугольника можно описать единственную окружность. Центр описанной около треугольника окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника; центр лежит внутри треугольника, если треугольник остроугольный, вне треугольника — если треугольник тупоугольный, на середине гипотенузы — если треугольник прямоугольный.

Доказательство. Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$ (рис. 5.30).

Проведем серединные перпендикуляры MO и KO до их пересечения в точке O , которая всегда существует, так как $AC \parallel AB$, а затем — перпендикуляр OL к стороне BC . Точка O

равноудалена от A и C , A и B , т. е. $AO = OC$, $AO = OB \Rightarrow OB = OC$. В равнобедренном $\triangle OBC$ высота OL является медианой, следовательно, OL — серединный перпендикуляр. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника всегда пересекаются в одной точке.

Окружность с центром O и радиусом OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около $\triangle ABC$.

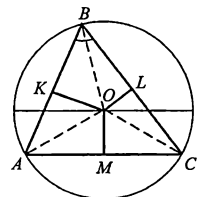


Рис. 5.30

Если допустить, что около треугольника можно описать другую окружность, то ее центр O' должен быть равно-

удален от его вершин A, B, C , т.е. должен совпадать с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а ее радиус должен быть равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Таким образом, окружности совпадают, и единственность описанной окружности доказана.

Наибольший угол B треугольника измеряется (в градусах)

$\frac{1}{2} \cup AC$, которая стягивается хордой AC . Используя соотношения между дугами и хордами, получаем последнее утверждение теоремы. QED.

Радиус R окружности, описанной около $\triangle ABC$, вычисляется по формулам:

$$R = \frac{1}{2} \frac{BC}{\sin A} = \frac{1}{2} \frac{AC}{\sin B} = \frac{1}{2} \frac{AB}{\sin C},$$

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S},$$

где S — площадь треугольника.

Для правильного треугольника $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

где a — сторона этого треугольника.

5.4.6. Окружность, вписанная в треугольник

Если все стороны треугольника касаются окружности, то окружность называется *вписанной в треугольник*.

Теорема 5.18. В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника.

Доказательство. Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$ (рис. 5.31).

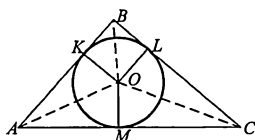


Рис. 5.31

Проведем биссектрисы AO и BO углов A и B треугольника до их пересечения в точке O , которая равноудалена от сторон треугольника по свойству биссектрисы угла, следовательно, $OM = OK = OL$. $\triangle MOC = \triangle LOC$ ($\angle OMC = \angle OLC = 90^\circ$, OC — общая сторона, $OM = OL$), отсюда $\angle MCO = \angle LCO$ и OC — биссектриса угла C . Биссектрисы внутренних углов треугольника всегда пересекаются в одной точке.

Проведем окружность радиусом OM с центром в точке O . Стороны $\triangle ABC$ касаются этой окружности в точках

K, L, M , так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL, OM .

Таким образом, построенная окружность является вписанной в $\triangle ABC$.

Если допустить, что в треугольник можно вписать другую окружность, то ее центр O' должен быть равноудален от сторон треугольника, т.е. должен совпадать с точкой O пересечения биссектрис треугольника, а ее радиус должен равняться расстоянию от точки O до сторон треугольника, следовательно, окружности совпадают, и единственность вписанной окружности доказана. QED.

Центр вписанной в треугольник окружности всегда лежит внутри треугольника.

Радиус r окружности, вписанной в $\triangle ABC$, находится по

формуле $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника;

$$p = \frac{1}{2} (AB + AC + BC) \text{ — полупериметр.}$$

Для правильного треугольника $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, где a — сторона треугольника.

5.4.7. Окружность и многоугольники

Многоугольник, все вершины которого находятся на окружности, называется *вписанным* в эту окружность, а окружность — *описанной* около многоугольника.

Многоугольник, все стороны которого касаются окружности, называется *описанным* около этой окружности, а окружность — *вписанной* в этот многоугольник.

Не во всякий многоугольник можно вписать окружность и не около всякого многоугольника можно описать окружность, однако около любого правильного многоугольника можно описать окружность и в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, причем центры этих окружностей совпадают. Полученная точка называется *центром* правильного многоугольника (рис. 5.32, точка O).

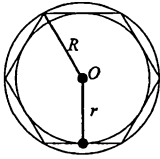


Рис. 5.32

Отрезок перпендикуляра, проведенного из центра правильного многоугольника к стороне, называется *апофемой* этого правильного многоугольника (см. рис. 5.32, отрезок r).

$$\text{Сторона правильного } n\text{-угольника } a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

где R — радиус описанной около этого многоугольника окружности.

Площадь правильного n -угольника

$$S = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360^\circ}{n} \quad \text{или} \quad S = \frac{1}{2} P_n r,$$

где P_n — периметр многоугольника; r — радиус вписанной окружности.

5.4.8. Длина окружности и дуги окружности. Площадь круга, сектора, сегмента

Длиной окружности называется предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в эту окружность (описанных около нее), если число сторон многоугольника $n \rightarrow \infty$. Длина окружности l находится по формуле

$$l = 2\pi R,$$

где R — радиус окружности.

Длина дуги окружности величины α определяется по формуле

$$l = \frac{\pi R \alpha}{360}.$$

Площадью круга называется предел последовательности площадей правильных многоугольников, вписанных в эту окружность (описанных около нее), если число сторон многоугольника $n \rightarrow \infty$. Площадь круга S вычисляют по формуле

$$S = \pi R^2,$$

где R — радиус круга.

Сектором называется часть круга, ограниченная двумя его радиусами (рис. 5.33).

Площадь сектора S , ограниченного дугой величины α° , находится по формуле

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}.$$

Сегментом называется часть круга, ограниченная хордой и стягиваемой ею дугой (рис. 5.34).

Площадь сегмента находится как разность площади сектора AOB и площади треугольника AOB (см. рис. 5.34).

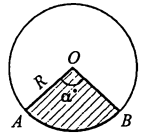


Рис. 5.33

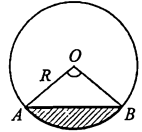


Рис. 5.34

5.5. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

5.5.1. Свойства и признаки ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны ($AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$) (рис. 5.35).

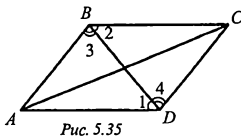


Рис. 5.35

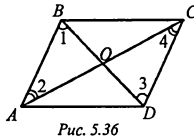


Рис. 5.36

Свойства параллелограмма:

1) В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Доказательство. $\triangle ABD = \triangle BDC$ ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых, BD — общая сторона (см. рис. 5.35), следовательно, $AB = CD$, $AD = BC$, $\angle A = \angle C$).

Так как $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle B = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 = \angle D$.

QED.

2) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. $\triangle AOB = \triangle COD$ ($AB = CD$ как противоположные, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых (рис. 5.36), следовательно, $AO = OC$, $OB = OD$. **QED.**

Отметим также, что в параллелограмме $ABCD$ (см. рис. 5.36)

$$AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2).$$

Признаки параллелограмма:

1) Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство. Пусть $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 5.37), тогда $\triangle ABO = \triangle CDO$ (по двум сторонам и углом между ними), следовательно, $\angle ABO = \angle ODC$ и $AB \parallel CD$. Аналогично,

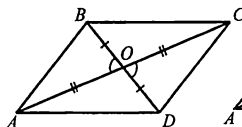


Рис. 5.37

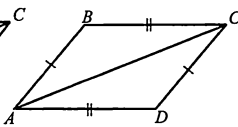


Рис. 5.38

но, используя равенство $\triangle BOC = \triangle DOA$, получаем, что $BC \parallel AD$. **QED.**

2) Если у четырехугольника противоположные стороны парно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (рис. 5.38) (по трем сторонам), следовательно, $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$ как соответственные углы и $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$. **QED.**

3) Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство. Пусть $AD = BC$, $AD \parallel BC$ (см. рис. 5.38), тогда $\angle BCA = \angle DAC$ и $\triangle ABC = \triangle CDA$ (по двум сторонам и углу между ними), т.е. $AB = CD$ и $ABCD$ — параллелограмм по признаку 2. **QED.**

4) Если у четырехугольника противоположные углы равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство. Пусть $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (см. рис. 5.38). $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \Rightarrow 2\angle A + 2\angle B = 360^\circ$, $\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow AD \parallel BC$. Аналогично, так как $\angle A + \angle D = 180^\circ$, то $AB \parallel CD$ и $ABCD$ — параллелограмм. **QED.**

Отметим, что каждый из признаков параллелограмма может быть взят в качестве определения параллелограмма.

5.5.2. Прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 5.39).

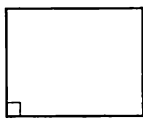


Рис. 5.39

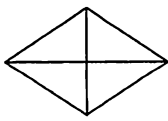


Рис. 5.40

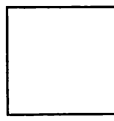


Рис. 5.41

Так как прямоугольник есть параллелограмм, то он обладает всеми его свойствами.

Свойства прямоугольника:

- 1) перпендикуляр, проведенный через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии;
- 2) прямоугольник имеет две оси симметрии;
- 3) диагонали прямоугольника равны.

Ромб — это параллелограмм, все стороны которого равны (рис. 5.40).

Так как ромб есть частный случай параллелограмма, то он обладает всеми его свойствами.

Свойства ромба:

- 1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его внутренних углов;
- 2) прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью симметрии.

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 5.41).

В силу того что квадрат является параллелограммом, прямоугольником, ромбом, то он обладает всеми их свойствами.

Трапеция — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны ($AD \parallel BC$) (рис. 5.42), а две другие — AB и CD — нет.

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны — *боковыми сторонами*.

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны.

Трапеция, один из углов которой равен 90° , называется *прямоугольной*.

Отрезок перпендикуляра к основаниям трапеции, заключенный между ее основаниями, называется *высотой* трапеции (см. рис. 5.42, отрезок BM).

Отрезок KL (см. рис. 5.42), соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией* трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме оснований:

$$KL = \frac{AD + BC}{2}.$$

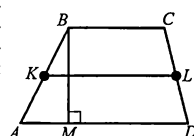


Рис. 5.42

Средняя линия делит высоту трапеции на два равных отрезка.

5.5.3. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТЬ

Четырехугольник, все вершины которого принадлежат окружности, называется *вписанным* в эту окружность, а окружность — *описанной* около этого четырехугольника (рис. 5.43).

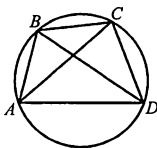


Рис. 5.43

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов этого четырехугольника равна 180° .

Из всех параллелограммов только около прямоугольника (квадрата) можно описать окружность.

Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

Если четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность (см. рис. 5.43), то имеет место следующая формула:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

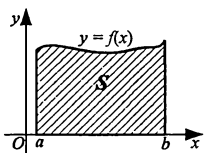
Четырехугольник, все стороны которого касаются окружности, называется *описанным* около окружности, а окружность — *вписанной* в этот четырехугольник.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.

Из всех параллелограммов лишь в ромб (квадрат) можно вписать окружность, центр которой лежит на пересечении его диагоналей.

5.5.4. ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ КВАДРАТА, ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, РОМБА, ТРАПЕЦИИ

Площадь фигуры вводится аксиоматически как некоторое положительное число. Обычно при этом площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной непрерывной функции $y = f(x)$, а также прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 5.44), вычисляется по



$$\text{формуле } S = \int_a^b f(x) dx.$$

Площадь прямоугольника со сторонами a и b находится по формуле $S = ab$.

Действительно, если выбрать систему координат так, как показано на рис. 5.45, то

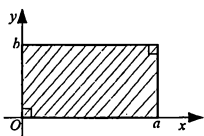


Рис. 5.45

$$S = \int_0^a b dx = bx \Big|_0^a = ab.$$

В частности, площадь квадрата со стороной a равна $S = a^2$.

Теорема 5.19. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту: $S = AD \cdot BM$ (рис. 5.46).

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Проведем BM и CN перпендикулярно к прямой AD (см. рис. 5.46). $\triangle ABM = \triangle CDN$ ($\angle A = \angle D$, $\angle AMB = \angle DNC = 90^\circ$, $AB = CD$). Так как равные треугольники имеют равные площади, то

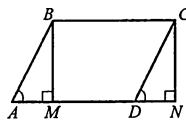


Рис. 5.46

$$S = S_{ABCD} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CDN} = S_{BMCN} = BC \cdot BM = AD \cdot BM$$

(как площадь прямоугольника). QED.

Отметим также, что $BM = Ab \sin A$, поэтому $S = AB \cdot AD \cdot \sin A$.

Теорема 5.20. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (рис. 5.47):

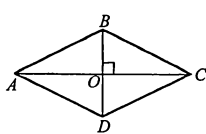


Рис. 5.47

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Доказательство. У ромба все стороны равны между собой, а диагонали взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его внутренних углов, следовательно, $\angle AOB = \angle COB = \angle COD = \angle AOD$ (по гипотенузе и острому углу прямоугольного треугольника):

$$S = 4S_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OB = \frac{1}{2} (2AO)(2OB) = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

QED.

Площадь ромба можно также находить как площадь параллелограмма.

Теорема 5.21. Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту (рис. 5.48): $S = KL \cdot BM$.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC , средней линией $KL = \frac{AD+BC}{2}$, высотой BM .

Диагональ BD разбивает трапецию на два треугольника $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, следовательно,

$$S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} AD \cdot BM + \frac{1}{2} BC \cdot ND = \frac{1}{2} (AD + BC) \times$$

$\times BM = KL \cdot BM,$

где ND — высота, опущенная на продолжение стороны BC ; очевидно, $ND = BM$. QED.

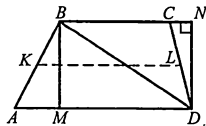


Рис. 5.48

5.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

5.6.1. ОТОБРАЖЕНИЯ

Предположим, что X и Y — произвольные непустые множества. Говорят, что задано *отображение* f множества X в множество Y , если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, который называется *образом* элемента x при отображении f . При этом используется запись

$$f: X \rightarrow Y: x \mapsto y = f(x).$$

Числовые функции дают примеры отображений.

Множество $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ образов всех элементов из X называется *образом множества* X при отображении f .

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *сюръективным*, если $f(X) = Y$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *инъективным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$; если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Одновременно инъективное и сюръективное отображение называется *биективным* или *взаимно однозначным*.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — биективное отображение, тогда для любого элемента $y \in Y$ существует единственный элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$, которое ставит в соответствие каждому $y \in Y$ его *прообраз* $x \in X$ при отображении f , называется *обратным* к f .

Пусть даны два отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, тогда для любого элемента $x \in X$ можно найти $y = f(x) \in Y$ и для полученного y можно найти $z = g(y)$. Таким образом, каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $z = g(f(x)) \in Z$, т. е. получается отображение множества X в множество Z , которое называется *композицией* отображений g и f и записывается следующим образом:

$$g \circ f: X \rightarrow Z: x \mapsto z = g(f(x)).$$

5.6.2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Предположим, что в пространстве даны плоскость α и прямая a , пересекающая плоскость α (рис. 5.49). Через произвольную точку M пространства проведем прямую $b \parallel a$, пересекающую плоскость α в некоторой точке M' , которая называется *параллельной проекцией* точки M на плоскость α . Полученное отображение Π_a^α пространства в плоскость α называется *проектированием* на плоскость α параллельно прямой a .

Параллельной проекцией пространственной фигуры Φ называется ее образ $\Phi_1 = \Pi_a^\alpha(\Phi)$ на плоскости α .

Свойства параллельной проекции:

1) параллельная проекция прямой есть прямая;

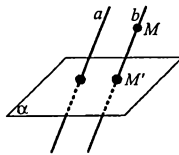


Рис. 5.49

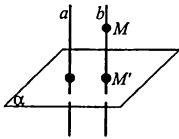


Рис. 5.50

2) проекции параллельных прямых параллельны;

3) отношение проекций двух параллельных отрезков равно отношению проектируемых отрезков.

Если прямая a перпендикулярна к плоскости α , то получаем частный случай параллельного проектирования — *ортогональное проектирование* (рис. 5.50).

Ортогональное проектирование обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость α равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью α .

Очевидно, что проектирование Π_α^a является сюръективным отображением пространства на плоскость α , но не инъективным.

5.6.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

Биективное (взаимно однозначное) отображение плоскости (пространства) на себя называется *преобразованием* плоскости (пространства).

К основным преобразованиям плоскости (пространства) можно отнести следующие:

1) преобразование плоскости (пространства), при котором каждая точка отображается в саму себя, называется *тождественным* преобразованием плоскости (пространства) и обозначается id (от identical). Таким образом, по определению, $id(M) = M, \forall M$;

2) преобразование плоскости (пространства), сохраняющее расстояние, называется *изометрией* или *движением*;

3) преобразование плоскости (пространства), при котором расстояния между любыми двумя точками изменяются в одном и том же отношении $k > 0$, называется преобразованием *подобия*.

Отметим, что при $k = 1$ преобразование подобия является изометрией.

5.6.4. Движения плоскости. Центральная и осевая симметрии, параллельный перенос, поворот

Как было отмечено, движение (изометрия) f сохраняет расстояние между точками, т.е. для любых M и N , если $M_1 = f(M)$, $N_1 = f(N)$, то $|M_1 N_1| = |MN|$.

Отметим, что тождественное преобразование есть движение; преобразование, обратное к движению, является движением; композиция двух движений есть движение.

По определению, две геометрические фигуры называются *равными*, если найдется движение, отображающее одну из фигур на другую.

Каждое движение плоскости может быть представлено в виде композиции трех изометрий: *параллельного переноса*, *поворота вокруг точки*, *осевой симметрии*.

Поворотом плоскости вокруг центра O называется такое движение плоскости, при котором точка O переходит сама в себя; для любой точки M и ее образа M_1 угол между лучами OM и OM_1 имеет постоянную величину α , не зависящую от выбора точки M ; $|OM_1| = |OM|$.

Если поворот от луча OM к лучу OM_1 совершается против (по) часовой стрелки, то направление поворота считается *положительным* (отрицательным).

Если $\alpha \in (-\pi; \pi]$, $\beta = \alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то поворот на угол β считается равным повороту на угол α .

Отметим, что тождественное преобразование есть поворот на угол $\alpha = 0$; отображение, обратное повороту на угол α , является поворотом на угол $-\alpha$ (с тем же центром); композиция двух поворотов на углы α и β с одинаковыми центрами будет поворотом на угол $\alpha + \beta$ с тем же центром.

Поворот плоскости вокруг центра O на угол $\alpha = \pi$ называется *центральной симметрией* с центром O .

Геометрическая фигура, которая при центральной симметрии с центром O отображается сама на себя, называется *центрально-симметричной*, при этом точка O называется *центром симметрии* этой фигуры.

Осевой симметрией плоскости называется такое движение этой плоскости на себя, при котором любая точка M переходит в точку M_1 таким образом, что отрезок MM_1 делится фиксированной прямой l пополам и перпендикулярен ей; каждая точка прямой l переходит сама в себя.

Прямая l называется *осью симметрии*, симметрия относительно прямой l обозначается S_l .

Прямая l называется *осью симметрии* фигуры Φ , если $S_l(\Phi) = \Phi$; фигура Φ называется *симметричной* относительно оси l .

Отметим, что отображение, обратное осевой симметрии S_l , совпадает с S_l .

5.6.5. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА. СИММЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ

Осевой симметрией пространства называется такое движение пространства, при котором каждая точка M переходит в точку M_1 таким образом, что отрезок MM_1 делится некоторой прямой l пополам и перпендикулярен к ней; любая точка прямой l переходит сама в себя.

Симметрией пространства относительно плоскости α называется такое движение пространства, при котором каждая точка M переходит в точку M_1 таким образом, что отрезок MM_1 делится плоскостью α пополам и перпендикулярен к α ; любая точка плоскости α отображается сама на себя.

Прямая l называется *осью симметрии*, осевая симметрия относительно прямой l обозначается S_l .

Симметрия относительно плоскости α обозначается S_α .

Если фигура Φ при движении S_l отображается сама на себя, то говорят, что фигура Φ *симметрична* относительно оси l , а l называется *осью симметрии* Φ .

Плоскость α называется *плоскостью симметрии* фигуры Φ , если $S_\alpha(\Phi) = \Phi$; фигура Φ называется *симметричной относительно плоскости α* .

Отметим, что $S_\alpha \circ S_\alpha = id$.

5.6.6. ГОМОТЕТИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

Гомотетией плоскости (пространства) с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости (пространства), при котором образом произвольной точки M является такая точка M_1 , что $OM_1 = kOM$.

6) при гомотетии с положительным коэффициентом каждый луч отображается на сонаправленный с ним луч, а при гомотетии с отрицательным коэффициентом — на противоположно направленный с ним луч. Любая прямая, проходящая через центр гомотетии, переходит сама в себя, а не проходящая через центр гомотетии преобразуется в параллельную прямую. Каждый угол отображается на равный угол;

Гомотетию с центром O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k . Таким образом, $H_O^k(M) = M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$.

7) при гомотетии пространства плоскость отображается на параллельную плоскость или переходит сама в себя;

Свойства гомотетии:

1) центр гомотетии отображается на себя, т.е. $H_O^k(O) = O$;

8) любая сфера с центром, совпадающим с центром гомотетии пространства, переходит в сферу.

2) для любой точки O , $H_O^1 = id$ — тождественное преобразование;

3) для гомотетии H_O^{-1} получаем $\overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OM}$, т.е. точка M симметрична точке M_1 относительно центра O , и эта гомотетия есть центральная симметрия;

Гомотетия полностью определяется либо своим центром O и коэффициентом k ; либо центром O и парой точек M , $M_1 = H_O^k(M)$; либо двумя парами точек $(M, M_1 = H(M))$, $(N, N_1 = H(N))$.

4) обратное отображение для H_O^k есть гомотетия с тем же центром O и коэффициентом $k_1 = 1/k$;

Две фигуры Φ и Φ_1 называются *гомотетичными*, если найдется такая гомотетия H_O^k , что $\Phi_1 = H_O^k(\Phi)$; гомотетичные фигуры подобны, т.е. каждая гомотетия есть *преобразование подобия* (см. 5.3.9).

5) если $M_1 = H_O^k(M)$, $N_1 = H_O^k(N)$, то $\overrightarrow{M_1N_1} = k\overrightarrow{MN}$, следовательно, $M_1N_1 = |k|MN$ (расстояние между точками изменяется в $|k|$ раз);

5.7. ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

5.7.1. Циркуль и линейка

Геометрические построения на плоскости выполняются с помощью двух идеальных инструментов — «односторонней» линейки и циркуля.

Под «односторонней» линейкой понимается абстрактный инструмент, который позволяет выполнить следующие простейшие построения:

- 1) построить лучи $[AB]$ и $[BA]$, если точки A и B построены;
- 2) построить отрезок $[AB]$, если точки A и B построены;
- 3) построить прямую (AB) , если точки A и B построены.

Под циркулем понимается абстрактный инструмент, который позволяет выполнить следующие простейшие построения:

- 1) построить окружность, если построены ее центр и отрезок, равный ее радиусу;
- 2) построить на любой прямой отрезок, равный данному отрезку.

Также предполагается возможным строить точки, как принадлежащие построенным фигурам, так и не принадлежащие, а также точки пересечения прямых, окружностей, прямой и окружности, если такие точки существуют.

Под построением геометрической фигуры Φ на плоскости понимается выполнение конечного числа простейших построений.

Широко известны три классические задачи на построение, которые, как было доказано, не могут быть решены с помощью циркуля и линейки:

- 1) удвоение куба. Построить ребро куба, объем которого в два раза больше объема куба, имеющего ребро, равное данному отрезку;
- 2) квадратура круга. Построить сторону квадрата с площадью, равной площади круга, радиус которого равен данному отрезку;
- 3) трисекция угла. Построить угол, равный третьей части данного угла.

5.7.2. Основные построения

Обычно при решении задач на построение само построение искомой фигуры сводят не к простейшим, а к некоторым типичным задачам, которые называются основными построениями.

Рассмотрим следующие 11 основных построений.

1. Построение треугольника по трем сторонам.

Пусть даны отрезки длиной a, b, c . Строим окружности радиусом b и a соответственно с центрами в концах A и B отрезка $AB = c$.

Пусть C и C' — точки их пересечения (рис. 5.51). $\triangle ABC$ — искомый ($\triangle ABC' = \triangle ABC$). Задача имеет единственное решение, если $a + b > c$.

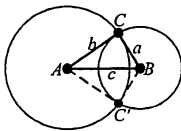


Рис. 5.51

2. Построение угла, равного данному.

Пусть дан угол $\alpha = \angle ABC$, тогда из его вершины — точки B как из центра проводим дугу окружности ED произвольного радиуса. Получаем треугольник BED . Если на плоскости

задан луч $[OM]$, то строим $\triangle OD'E' = \triangle BDE$, используя построение 1 (OD' лежит на $[OM]$). Угол NOM равен данному углу α (рис. 5.52).

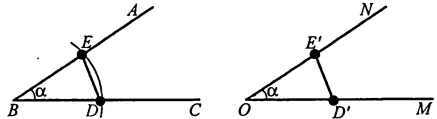


Рис. 5.52

3. Деление угла пополам (построение биссектрисы угла).

Пусть дан угол $\alpha = \angle MON$, тогда из его вершины — точки O как из центра проводим дугу окружности BA произвольного радиуса. Из точек A и B пересечения этой дуги со сторонами угла как из центров проводим дуги окружностей любых одинаковых радиусов до пересечения в точке C . Проводим луч OC , который и является биссектрисой $\angle MON$, т.е. делит этот угол пополам (рис. 5.53).

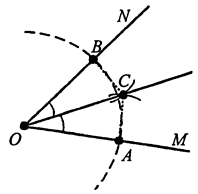


Рис. 5.53

4. Деление отрезка пополам (построение середины отрезка).

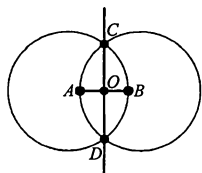


Рис. 5.54

Из концов данного отрезка AB как из центров проводим дуги окружностей радиусом AB до пересечения в точках C и D . Прямая CD — серединный перпендикуляр к отрезку AB , точка O пересечения прямых AB и CD — середина отрезка AB (рис. 5.54).

5. Построение перпендикуляра к данной прямой, проходящего через данную точку.

Рассмотрим два случая:

а) данная точка C лежит на данной прямой l . Тогда из любой точки O , не лежащей на прямой l , как из центра, проводим окружность радиусом OC . Пусть B — вторая точка пересечения этой окружности с прямой l . Проводим диаметр BA этой окружности через точку O . Прямая AC — искомая (рис. 5.55).

б) данная точка C не лежит на данной прямой l . Из точки C как из центра проводим окружность достаточно большого радиуса, чтобы она пересекалась с прямой l в точках A и B . Находим середину D отрезка AB (построение 4). Прямая CD — искомая (рис. 5.56).

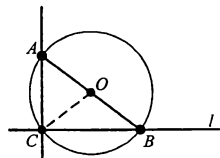


Рис. 5.55

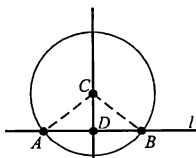


Рис. 5.56

6. Построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

Через данную точку C проводим прямую m перпендикулярно к данной прямой l (построение, случай «б»), а затем через эту же точку C проводим прямую n перпендикулярно к прямой m (построение, случай «а»). Получаем прямую n , которая параллельна прямой l (рис. 5.57).

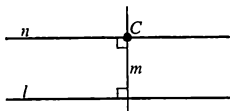


Рис. 5.57

7. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам.

Пусть даны отрезок AB и углы α и β ($\alpha + \beta < 180^\circ$). Откладываем угол α с вершиной A и угол β с вершиной B так, чтобы одна из их сторон совпадала с лучом $[AB]$, $[BA]$ соответственно. Оставшиеся стороны углов пересекаются в точке C . $\triangle ABC$ — искомый (рис. 5.58).

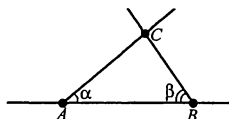


Рис. 5.58

8. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Строим данный угол α с вершиной в точке A , затем на сторонах этого угла откладываем данные отрезки $AB = c$ и $AC = b$, т. е. $\triangle ABC$ — искомый (рис. 5.59).

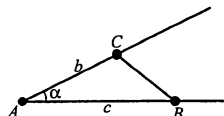


Рис. 5.59

9. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу.

Пусть даны отрезок c и угол α . Строим окружность с центром в середине O отрезка $AB = c$ радиусом $\frac{c}{2}$. Откладываем угол α с вершиной в точке A так, чтобы одна из его сторон совпадала с лучом $[AB]$. Тогда другая сторона угла пересечет окружность в точке C , т. е. $\triangle ABC$ — искомый (рис. 5.60).

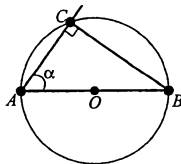


Рис. 5.60

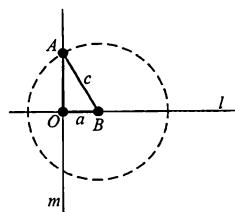


Рис. 5.61

10. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

Строим две перпендикулярные прямые l и m , пересекающиеся в точке O . На прямой l откладываем отрезок OB , равный данному катету a . Проводим окружность с центром в точке B радиусом, равным данной гипотенузе c , до пересечения с прямой m в точке A . Итак, $\triangle OAB$ — искомый (рис. 5.61).

11. Построение касательной к данной окружности, проходящей через данную точку.

Если данная точка C принадлежит данной окружности, то искомой касательной будет прямая l , проходящая через конец C радиуса OC перпендикулярно к нему (рис. 5.62).

Если же точка C лежит вне окружности, то через середину D отрезка OC как из центра проводится окружность радиусом DO до пересечения с данной окружностью в точках A и B . Прямые AC и BC будут искомыми касательными (рис. 5.63).

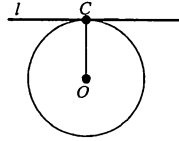


Рис. 5.62

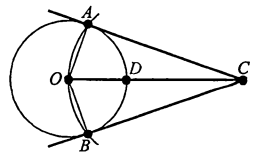


Рис. 5.63

5.7.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД

Теорема 5.22. Отрезок AB можно построить по данным отрезкам с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда длина отрезка AB выражается через длины известных отрезков и рациональные числа при помощи конечного множества рациональных операций (сложение, вычитание, умножение, деление) и извлечения квадратного корня.

Алгебраический метод решения задач на построение состоит в следующем. Построение искомой фигуры Φ сводится к построению некоторого отрезка AB . Используя различные геометрические теоремы, находят длину y отрезка AB через длины a_1, a_2, \dots, a_n данных отрезков: $y = f(a_1; a_2; \dots; a_n)$. Используя полученную формулу, строят отрезок AB , а затем и фигуру Φ .

Таким образом, если известны отрезки a и b , а также числа $p, q \in \mathbb{N}$, то можно осуществлять построение отрезка x , заданного следующими формулами:

Построение 1. $x = a + b$; $x = a - b$ ($a > b$). Эти построения очевидны.

Построение 2. $x = pa$; $x = \frac{1}{q}a$. Построения очевидны.

Построение 3. $x = \frac{ab}{c} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

На перпендикулярных прямых l и m , пересекающихся в точке O , откладываем отрезки $OC = c$, $OA = a$ на l и $OB = b$ на m . Проводим прямую BC , а затем через точку A прямую $n \parallel BC$, которая пересекается с прямой m в точке M . Тогда $x = OM$ (рис. 5.64).

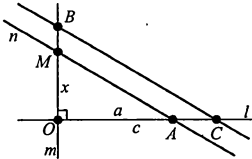


Рис. 5.64

Построение 4. $x = \sqrt{ab}$. На некоторой прямой отложим данные отрезки так, чтобы конец первого совпадал с началом второго. Полученный отрезок AC делится пополам точкой O . Проводим окружность с центром в точке O радиусом $1/2(a + b)$. Из точки B первого отрезка восстанавливаем перпендикуляр к AC до пересечения с окружностью в точке D . Тогда $x = BD$ (рис. 5.65).

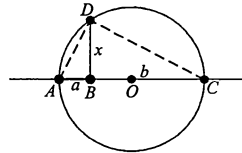


Рис. 5.65

Построение 5. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. На перпендикулярных прямых l и m , пересекающихся в точке O , откладываем отрезки $OA = a$ на l и $OB = b$ на m . По теореме Пифагора $x = AB$ (рис. 5.66, а).

Построение 6. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$). Строим перпендикулярные прямые l и m , пересекающиеся в точке O , откладываем отрезок $OB = b$ на прямой l . Проводим окружность с центром в точке B радиусом a до пересечения с прямой m в точке A . По теореме Пифагора $x = OA$ (рис. 5.66, б).

В заключение отметим, что при решении задач на построение часто используются *метод пересечений* (см. задачу выше), а также различные геометрические преобразования (см. 5.6).

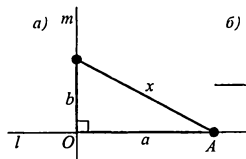
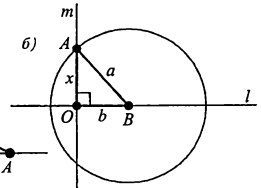


Рис. 5.66



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ТЕМА: ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

5.001. Соединили середины сторон выпуклого четырехугольника. Доказать, что полученная фигура — параллелограмм.

Решение.

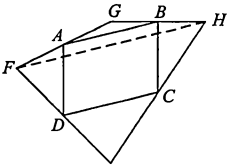


Рис. 5.67

Соединим точки F и H (рис. 5.67). Из подобия треугольников GFH и GAB следует, что $AB = \frac{1}{2} FN$. Из подобия треугольников EFH и EDC следует, что $DC = \frac{1}{2} FN$. Значит, $AB = DC$. Аналогично, соединив точки G и E , можно показать, что $BC = AD$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. **QED.**

5.002. Через концы дуги окружности, содержащей 120° , проведены касательные. В фигуру, ограниченную данной дугой и этими касательными, вписана окружность. Доказать, что ее длина равна длине исходной дуги.

Решение.

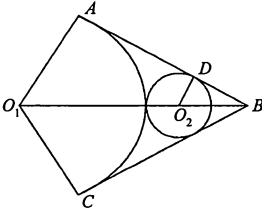


Рис. 5.68

Пусть R — радиус дуги, r — радиус вписанной окружности. Рассмотрим треугольник BAO_1 (рис. 5.68). В нем $\angle AO_1B = 60^\circ$, $\angle BAO_1 = 90^\circ$; значит, $\angle ABO_1 = 30^\circ$.

Поэтому $BO_1 = \frac{R}{\sin 30^\circ} = 2R$. В треугольнике BDO_2 $\angle BDO_2$ прямой; значит, $BO_2 = 2r$.

$O_1O_2 = 2(R-r)$. По условию $O_1O_2 = R + r$, поэтому $2(R-r) = R + r \Leftrightarrow R = 3r \Leftrightarrow r = \frac{R}{3}$. Таким образом, длина вписанной окружности $l = 2\pi \cdot r = \frac{2\pi R}{3}$, а дли-

на данной дуги $L = R \cdot \frac{2\pi}{3}$. Следовательно, $l = L$.

QED.

5.003. Доказать, что прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки.

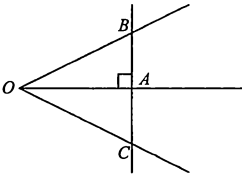


Рис. 5.69

Решение.

Так как прямая BC перпендикулярна к биссектрисе OA угла O , то треугольники OAB и OAC прямоугольные, у них $\angle BOA = \angle COA$ и OA — общий катет (рис. 5.69). Из равенства этих треугольников следует равенство отрезков OB и OC . **QED.**

5.004. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна c , основания — a и b , диагональ — d . Доказать, что $d^2 = ab + c^2$.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 5.70), у которой $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = c$, $AC = d$. В треугольнике CED $\angle CED$ прямой, и по теореме Пифагора получаем $CE^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. В треугольнике AEC $\angle AEC$ прямой, поэтому

$$AC^2 = CE^2 + AE^2 \Leftrightarrow d^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = ab + c^2. \quad \text{QED.}$$

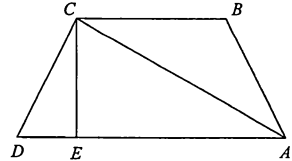


Рис. 5.70

5.005. Доказать, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

Решение.

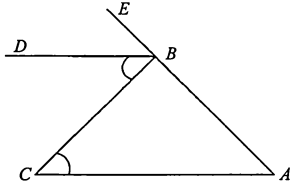


Рис. 5.71

В равнобедренном треугольнике ABC углы при основании равны: $\angle A = \angle C$ (рис. 5.71). Внешний угол $CBE = 2\angle C$. Так как BD — биссектриса $\angle CBE$, то $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle CBE = \angle C$. Углы CBD и BCA — внутренние накрест лежащие при пересечении прямых BD и AC секущей BC . По признаку параллельности прямых прямые BD и AC параллельны. QED.

5.006. Дан правильный треугольник ABC . Точка K делит сторону AC в отношении 1:2, а точка M — сторону AB в отношении 2:1 (считая в обоих случаях от вершины A). Доказать, что длина отрезка KM равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение.

По условию $\frac{MB}{AM} = \frac{1}{2}$, $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}$ (рис. 5.72). Пусть $AM = x$, тогда

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2 \cdot AM \cdot AK \cdot \cos \angle BAC \Leftrightarrow KM^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} - x^2 \cos 60^\circ \Leftrightarrow KM^2 = \frac{3}{4}x^2 \Leftrightarrow KM = \frac{x}{2}\sqrt{3}.$$

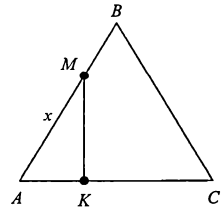


Рис. 5.72

Далее, $R = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$, $R = \frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow R = \frac{x}{2}\sqrt{3}$. Значит, $R = KM$. QED.

5.007. В треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена. Доказать, что этот треугольник прямоугольный.

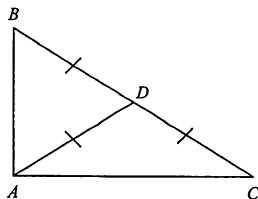


Рис. 5.73

Решение.

В треугольнике ABC $AD = BD = DC$ (рис. 5.73). Треугольник ABD равнобедренный, $\angle ABD = \angle BAD$, но треугольник ADC также равнобедренный, $\angle DAC = \angle DCA$.

Следовательно, $\angle BAC = \angle B + \angle C$ и $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Значит, треугольник ABC прямоугольный. QED.

5.008. Через вершины четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям. Доказать, что площадь параллелограмма, определяемого этими прямыми, в два раза больше площади данного четырехугольника.

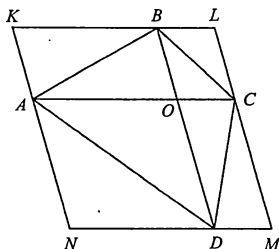


Рис. 5.74

Решение.

По условию $KL \parallel AC \parallel NM$, $KM \parallel BD \parallel LN$ (рис. 5.74). Площадь параллелограмма $KLMN$ равна $S_{KLMN} = S_{ABCD} + S_{AKB} + S_{BLC} + S_{CDM} + S_{AND}$. Так как $KB \parallel AO$ и $KA \parallel BO$, то $KBOA$ — параллелограмм и AB — его диагональ. Значит, $S_{AKB} = S_{ABO}$. Аналогично, $S_{BLC} = S_{BOC}$, $S_{CMD} = S_{COD}$, $S_{DNA} = S_{DOA}$. Тогда $S_{KLMN} = S_{ABCD} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} + S_{ABO} = 2S_{ABCD}$. QED.

5.009. Доказать, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30° , в 2 раза меньше гипотенузы.

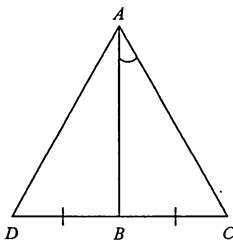


Рис. 5.75

Решение.

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle BAC = 30^\circ$ (рис. 5.75). На продолжении стороны BC от точки B отложим отрезок $DB = BC$. Точку D соединим с вершиной A . Треугольники ABD и ABC равны как прямоугольные треугольники, имеющие равные катеты, следовательно, $\angle D = \angle C$. Треугольник DAC равнобедренный, так как $\angle DAC = 60^\circ$

и $\angle D = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$. Отсюда следует, что $BC = \frac{1}{2}AC$. QED.

5.010. Диаметр полукруга разделен на две произвольные части и на каждой из них как на диаметре построены полуокружности (внутри данного полукруга). Доказать, что площадь, заключенная между тремя полуокружностями, равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра к диаметру полукруга, проведенного в точке деления.

Решение.

Пусть R , r — радиус данного полукруга и радиус одного из построенных полукругов соответственно (рис. 5.76). Тогда площадь заданной фигуры равна

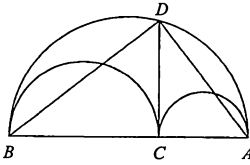


Рис. 5.76

$$\frac{1}{2}(\pi R^2 - \pi r^2 - \pi(R-r)^2) = \pi(R-r).$$

Так как $\angle ADB = 90^\circ$, то $CD^2 = AC \cdot BC = 2r \cdot 2(R-r) = 4r(R-r)$; значит,

$$\frac{\pi CD^2}{4} = \pi r(R-r).$$

QED.

5.011. Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Решение.

Пусть BK — биссектриса угла B треугольника ABC (рис. 5.77). Докажем, что $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$.

Проведем прямую $CD \parallel BK$ до пересечения с продолжением стороны AB в точке D . Тогда $\angle ABK = \angle ADC$ как соответственные углы, $\angle KBC = \angle BCD$ как внутренние накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BK и DC секущими AD и BC соответственно. Но так как $\angle ABK = \angle KBC$ по условию, то $\angle BCD = \angle ADC$. Следовательно, треугольник BCD равнобедренный, поэтому $BD = BC$. По теореме

о пропорциональных отрезках запишем: $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BD}$. Учитывая, что $BD = BC$, полу-

чаем равенство $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$.

QED.

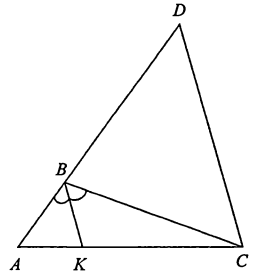


Рис. 5.77

5.012. Доказать, что в параллелограмме $ABCD$ расстояние от любой точки диагонали AC до прямых BC и CD обратно пропорционально длинам этих сторон.

Решение.

Пусть N — произвольная точка диагонали AC (рис. 5.78). Опустим перпендикуляры NP_1 и NP_2 на BC и CD . Из треугольника P_1CN $NC = \frac{P_1N}{\sin \alpha}$,

из треугольника P_2CN $NC = \frac{P_2N}{\sin \beta}$. Следовательно, $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{NP_2}{NP_1}$. Из тре-

угольника ACD по теореме синусов находим: $\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta}$, и так как $AD =$

$= BC$, то получаем $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{BC}{CD}$. Это значит, что $\frac{NP_2}{NP_1} = \frac{BC}{CD} = k$ или

$NP_2 \cdot CD = k$ и $NP_1 \cdot BC = k$; отсюда $NP_2 = \frac{k}{CD}$ и $NP_1 = \frac{k}{BC}$. QED.

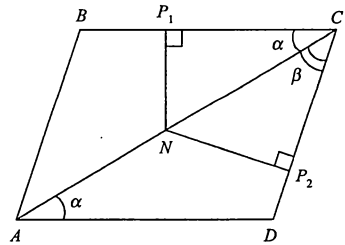


Рис. 5.78

5.013. Доказать, что если из одной точки, лежащей вне окружности, провести две касательные к этой окружности, то:
1) отрезки касательных, заключенные между данной точкой и точками касания, равны; 2) прямая, соединяющая данную точку с центром окружности, является биссектрисой угла, образованного касательными.

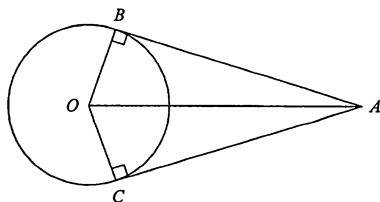


Рис. 5.79

Решение.

Пусть AB и AC — отрезки касательных, проведенных через точку A к окружности, OB и OC — радиусы, проведенные в точки касания (рис. 5.79). По свойству касательной к окружности $OB \perp AB$ и $OC \perp AC$. Прямоугольные треугольники OBA и OCA равны по катету и гипотенузе. Из равенства этих треугольников следует: $AB = AC$ и $\angle OAB = \angle OAC$, т.е. OA — биссектриса угла A . **QED.**

5.014. Круг вписан в равнобедренную трапецию. Доказать, что отношение площади круга к площади трапеции равно отношению длины окружности к периметру трапеции.

Решение.

Пусть a и b — основания данной трапеции, c — боковая сторона. Тогда $a + b = 2c$, так как круг вписан в трапецию. Значит, $c = \frac{a+b}{2}$. Следовательно, площадь трапеции $S_T = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где h — ее высота; периметр $p_T = a + b + 2 \cdot \frac{a+b}{2} = 2(a+b)$. Пло-

щадь круга $S_K = \pi r^2 = \frac{\pi h^2}{4}$; длина окружности $l = 2\pi r = \pi h$. Поэтому $\frac{S_K}{S_T} = \frac{\frac{\pi h^2}{4} \cdot 2}{4(a+b) \cdot h} = \frac{\pi h}{2(a+b)} = \frac{l}{p_T}$. **QED.**

5.015. Доказать, что параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, есть ромб.

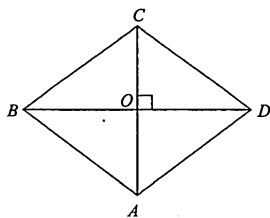


Рис. 5.80

Решение.

В параллелограмме диагонали точкой их пересечения делятся на равные отрезки, т.е. $OA = OC$ и $OB = OD$ (рис. 5.80). Значит, прямоугольные треугольники AOB , BOC , COD , AOD равны по двум катетам. Из равенства этих треугольников следует, что $AB = BC = CD = DA$, т.е. параллелограмм $ABCD$ есть ромб. **QED.**

5.016. Доказать, что если в треугольнике отношение тангенсов двух углов равно отношению квадратов синусов этих же углов, то треугольник прямоугольный или равнобедренный.

Решение.

Пусть дан треугольник ABC , в котором $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$; требуется доказать, что он либо прямоугольный, либо равнобедренный. Преобразовав данное отношение, получим $\sin A \sin^2 B \cos B - \cos A \sin B \sin^2 A = 0 \Leftrightarrow \sin A \sin B (\sin B \cos B - \cos A \sin A) = 0$. Так как A и B — углы треугольника, то $\sin A \neq 0$, $\sin B \neq 0$; поэтому последнее равенство принимает вид $\sin^2 B - \sin^2 A = 0$ или $2\cos(A+B)\sin(B-A) = 0$, откуда $\cos(A+B) = 0$ или $\sin(B-A) = 0$, т.е. $A+B = \frac{\pi}{2}$ или $B-A = 0$. Итак, либо $C = \frac{\pi}{2}$, т.е. треугольник прямоугольный, либо $A = B$, и треугольник равнобедренный. **QED.**

5.017. В окружность вписаны правильные шестиугольник и треугольник. Доказать, что площадь шестиугольника вдвое больше площади треугольника.

Решение.

Пусть R — радиус данной окружности, тогда сторона шестиугольника $a_6 = R$, а треугольника — $a_3 = R\sqrt{3}$. Вычислим площади правильных шестиугольника и треугольника по формуле $S_n = \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, где n — число сторон правильного многоугольника:

$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 R^2 \sin \frac{360^\circ}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2, \quad S_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 R^2 \sin \frac{360^\circ}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2. \text{ Следовательно, } \frac{S_6}{S_3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 : \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \right) = 2, \\ \text{откуда } S_6 = 2S_3. \quad \text{QED.}$$

5.018. Дан равнобедренный треугольник с основанием и боковой стороной, равными a и b соответственно. Доказать, что центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании, считая от вершины угла, в отношении $\frac{a+b}{b}$.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 5.81), в котором $AC = a$, $AB = BC = b$; O — центр вписанной окружности; A_1 — биссектриса угла BAC ; BO — биссектриса угла ABC . Тогда

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BA_1} = \frac{BA_1 + A_1C}{BA_1} = 1 + \frac{A_1C}{BA_1} = 1 + \frac{AC}{AB} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}. \quad \text{QED.}$$

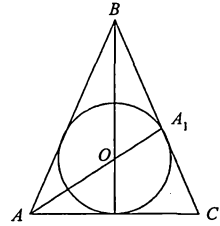


Рис. 5.81

5.019. По известной теореме сумма боковых сторон треугольника больше основания. Доказать, что она превышает основание менее чем на удвоенный отрезок, соединяющий вершину с какой угодно точкой основания.

Решение.

Требуется доказать (рис. 5.82): $AB + BC - AC < 2BD$. Имеем: $AB < AD + BD$, $BC < DC + BD$. Складывая почленно, находим: $AB + BC < AC + 2BD$. Вычитая по AC , получаем: $AB + BC - AC < 2BD$. QED.

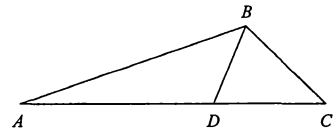


Рис. 5.82

5.020. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой на стороне правильного треугольника, до двух других его сторон есть величина постоянная.

Решение.

Пусть N — произвольная точка стороны AB равностороннего треугольника ABC (рис. 5.83). Опустим из точки N перпендикуляры NN_1 и NN_2 на стороны AC и BC . Тогда $S_{\triangle ANC} = \frac{1}{2} AC \cdot NN_1$, $S_{\triangle BNC} = \frac{1}{2} BC \cdot NN_2$.

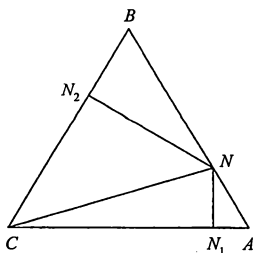


Рис. 5.83

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC^2 \sqrt{3}}{4}; S_{\triangle ANC} + S_{\triangle BNC} = S_{\triangle ABC}, \text{ поэтому}$$

$$\frac{1}{2} AC \cdot NN_1 + \frac{1}{2} BC \cdot NN_2 = \frac{AC^2 \sqrt{3}}{4}. \text{ Так как } BC = AC, \text{ то}$$

$$\frac{1}{2} AC(NN_1 + NN_2) = \frac{AC^2 \sqrt{3}}{4} \text{ и } NN_1 + NN_2 = \frac{AC \sqrt{3}}{4} = \text{const.}$$

QED.

5.021. Если выпуклый многоугольник заключен внутри какого-нибудь другого многоугольника, то по известной теореме периметр наружного многоугольника больше периметра внутреннего. Доказать, что наружный периметр превышает внутренний менее чем на удвоенную сумму отрезков, соединяющих вершины наружного многоугольника с какими-нибудь последовательно расположенными точками контура внутреннего.

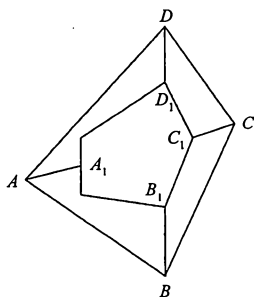


Рис. 5.84

Решение.

Вершины A, B, C, D наружного многоугольника (в нашем случае четырехугольника) соединены с точками A_1, B_1, C_1, D_1 контура внутреннего так, что этот контур разбит ими на ломаные части $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ (рис. 5.84). Если обозначим периметры наружного и внутреннего многоугольника соответственно через p, p_1 , то требуется доказать: $p - p_1 < 2(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1)$. Имеем: $AB < A_1B_1 + B_1B, BC < B_1C_1 + C_1C, CD < C_1D_1 + D_1D, DA < D_1A_1 + A_1A$. Складывая почленно, получаем следующее неравенство: $AB + BC + CD + DA < 2A_1 + 2B_1 + 2C_1 + 2D_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1$ или $p < 2(A_1 + B_1 + C_1 + D_1) + p_1$. Вычитая p_1 , получаем $p - p_1 < 2(A_1 + B_1 + C_1 + D_1)$. QED.

5.022. Доказать, что в любом прямоугольном треугольнике сумма полупериметра и радиуса вписанной окружности равна сумме катетов.

Решение.

Пусть a, b, c, p, r — соответственно катеты, гипотенуза, периметр треугольника и радиус вписанной окружности. Тогда $p + r = \frac{a+b+c}{2} + r = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} + r$. Так как площадь прямоугольного треугольника то $r = \frac{ab}{c}$. Значит,

$$\begin{aligned} p + r &= \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{ab}{c} = \frac{a+b}{2} + \frac{pc+ab}{2p} = \frac{a+b}{2} + \frac{ac+bc+c^2+2ab}{4p} = \\ &= \frac{a+b}{2} + \frac{c(a+b)+(a+b)^2}{4p} = \frac{a+b}{2} + \frac{(a+b)(a+b+c)}{4p} = \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2p} = a+b. \end{aligned}$$

 Следовательно, $p + r = a + b$.

QED.

5.023. Доказать, что сумма расстояний всякой точки от вершины многоугольника больше его полупериметра.

Решение.

Пусть $ABC\dots KL$ — данный многоугольник и M — данная точка. Имеем вообще: $MA + MB > AB$, $MB + MC > BC$, ..., $MK + ML > KL$, $ML + MA > LA$. Если точка M лежит на одной из сторон, то одно из этих неравенств обращается в равенство. Если точка M совпадает с одной из вершин, т.е. принадлежит двум сторонам, то два неравенства обращаются в равенство. Но так как число всех неравенств равно числу сторон многоугольника и, следовательно, не менее трех, то при всяком положении точки M некоторые из них останутся неравенствами. Поэтому, сложив их почленно, мы всегда получим неравенство, а именно: $2MA + 2MB + 2MC + \dots + 2MK + 2ML > AB + BC + \dots + KL + LA$. Деля почленно пополам, получим:

$$MA + MB + \dots + MK + ML > \frac{1}{2} (AB + BC + \dots + KL + LA). \quad \text{QED.}$$

5.024. Пусть m_1, m_2, m_3 — длины медиан некоторого треугольника. Доказать, что треугольник является прямоугольным, если выполняется равенство $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$.

Решение.

Обозначим стороны треугольника через a, b, c . Тогда $m_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, $m_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$, откуда

$4m_1^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ и $4m_2^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2$. Сложив эти равенства, получим $4(m_1^2 + m_2^2) = 4c^2 + a^2 + b^2$. По условию

$$m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2, \text{ но } 4m_3^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2; \text{ значит } \frac{4c^2 + a^2 + b^2}{4} = 5 \cdot \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \Leftrightarrow 4c^2 + a^2 + b^2 = 10(a^2 + b^2) - 5c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2, \text{ т.е. треугольник прямоугольный с катетами } a, b \text{ и гипотенузой } c. \quad \text{QED.}$$

5.025. Доказать, что отрезок, заключенный между вершиной и противолежащей стороной треугольника, меньше наибольшей из остальных сторон.

Решение.

Примем сторону треугольника, ограничивающую наш отрезок, за основание и проведем соответствующую высоту. Если углы при основании оба острые, то высота лежит внутри треугольника; наш отрезок или совпадает с высотой и тогда меньше обеих боковых сторон, или лежит между высотой и одной из боковых сторон и тогда меньше этой стороны; во всяком случае, он меньше наибольшей из боковых сторон. Если один из углов при основании тупой, то наибольшая из боковых сторон лежит в этом угле, а высота — в смежном угле; наш отрезок лежит между ними и, следовательно, меньше, чем наибольшая из боковых сторон. Случай прямого угла при основании предоставляем рассмотреть самостоятельно. QED.

5.026. Пусть h_1, h_2, h_3 — длины высот некоторого треугольника. Доказать, что треугольник является прямоугольным,

$$\text{если выполняется равенство } \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 = 1.$$

Решение.

Пусть a, b, c — стороны треугольника, которым соответствуют высоты h_1, h_2, h_3 ; тогда площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}ch_3, \text{ откуда } \frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{a} \text{ и } \frac{h_1}{h_3} = \frac{c}{a}. \text{ Подставив эти отношения в данное по условию равенство, получаем}$$

$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$, следовательно, данный треугольник является прямоугольным с катетами b , c и гипотенузой a .

QED.

5.027. Доказать, что отрезок, заключенный между двумя сторонами треугольника, меньше наибольшей из его сторон.

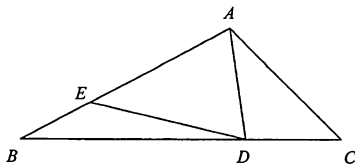


Рис. 5.85

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 5.85) и DE — данный отрезок. Проведем отрезок AD и применим к треугольнику ABD решение задачи 5.025. Найдем, что отрезок DE меньше наибольшего из отрезков AD , BD . Но по тому же решению отрезок AD меньше наибольшей из сторон AB , AC , а отрезок BD меньше стороны BC как ее части. Следовательно, отрезок DE меньше наибольшей из сторон AB , AC , BC .

QED.

5.028. На отрезке AB взята точка C и на частях AC и CB отрезка AB как на диаметрах построены полуокружности. Доказать, что от положения точки C на отрезке AB не зависит сумма длин этих полуокружностей.

Решение.

Пусть длина отрезка AB равна $2l$, x — радиус одной из окружностей, тогда радиус второй окружности равен $\frac{1}{2}(2l - 2x) = l - x$. Сумма длин полуокружностей составляет $\pi x + \pi(l - x) = \pi l$, т.е. не зависит от x , а следовательно, не зависит от положения точки C .

QED.

5.029. Доказать, что отрезок, заключенный весь внутри треугольника, меньше наибольшей из его сторон.

Решение.

Продолжив отрезок, заключенный весь внутри треугольника, в обе стороны до пересечения с контуром треугольника, получим отрезок, заключенный между вершиной и противоположной стороной или между сторонами треугольника. Из решения задач 5.025 и 5.027 такой отрезок меньше наибольшей из сторон треугольника, тем более это справедливо относительно части такого отрезка.

QED.

5.030. В треугольнике ABC (рис. 5.86) проведены медианы BM_1 и CM_2 ; M — точка их пересечения. Доказать, что треугольник BCM равновелик четырехугольнику AM_2MM_1 .

Решение.

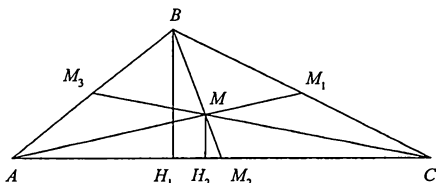


Рис. 5.86

Проведем третью медиану AM_3 треугольника ABC , опустим перпендикуляры BH_1 и MH_2 на сторону AC . Так как

$$MM_2 = \frac{1}{3} BM_2, \text{ то } MH_2 = \frac{1}{3} BH_1.$$

$$\text{Далее, } S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot MH_2 = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{3} BH_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}.$$

Так как MM_2 — медиана треугольника AMC , то

$$S_{\triangle AMM_2} = S_{\triangle CMM_2} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}.$$

Аналогично, $S_{\Delta AMM_1} = S_{\Delta BMM_1} = S_{\Delta CMM_1} = S_{\Delta CMM_1} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}$. Это означает, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников. Так как треугольник BMC и четырехугольник AM_1MM_2 состоят из двух таких треугольников, то они равновеликие. **QED.**

5.031. Через точку пересечения биссектрис внутренних углов при основании треугольника проведена прямая параллельно основанию. Доказать, что часть этой прямой, заключенная между боковыми сторонами, равна сумме отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием.

Решение.

$\angle EBD$ равен $\angle DBC$, так как BD есть биссектриса угла B треугольника ABC (рис. 5.87). Углы DBC , EDB равны как внутренние накрест лежащие при параллельных BC , EF и секущей BD . Следовательно, углы EBD , EDB равны и треугольник BDE равнобедренный с основанием BD . Так же найдем, что треугольник CDF равнобедренный с основанием CD . Таким образом, $ED = BE$ и $DF = CF$. Складывая почленно, получим $EF = BE + CF$. **QED.**

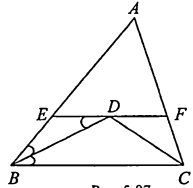


Рис. 5.87

5.032. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решение.

Пусть a — сторона прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 5.88).

Тогда его площадь равна $a\sqrt{4R^2 - a^2}$. Площадь вписанного квадрата равна $2R^2$. Покажем, что $2R^2 \geq a\sqrt{4R^2 - a^2}$. Действительно, из очевидного неравенства $(2R^2 - a^2)^2 \geq 0$ следует, что $4R^4 \geq a^2(4R^2 - a^2) \Leftrightarrow 2R^2 \geq a\sqrt{4R^2 - a^2}$ (знак неравенства сохраняется, так как $2R^2 > 0$ и $a\sqrt{4R^2 - a^2} > 0$). **QED.**

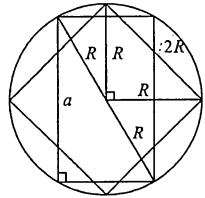


Рис. 5.88

5.033. Доказать, что в шестиугольнике, противоположные стороны которого равны и параллельны, три диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

Решение.

Отрезки AB , DE (рис. 5.89) можно рассматривать как противоположные стороны параллелограмма. Так как диагонали всякого параллелограмма взаимно делятся пополам, то BE проходит через середину AD . Точно так же убеждаемся, что и CF проходит через середину AD . Таким образом, AD , BE , CF проходят через одну и ту же точку. **QED.**

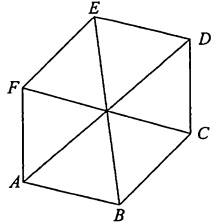


Рис. 5.89

5.034. Доказать, что треугольник является прямоугольным, если в нем отношение суммы синусов двух углов к сумме их косинусов равно синусу третьего угла.

Решение.

Пусть α, β, γ — углы данного треугольника, тогда по условию $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \sin \gamma$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} &= \sin \gamma \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \gamma \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \sin \gamma \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} - 2 \sin \frac{\gamma}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \left(\cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cos \gamma = 0. \end{aligned}$$

Так как $0^\circ < \gamma < 180^\circ$, то $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \neq 0$, поэтому $\cos \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 90^\circ$.

QED.

5.035. Доказать, что в четырехугольнике с непараллельными противоположными сторонами середины диагоналей и середины двух противоположных сторон есть вершины некоторого параллелограмма.

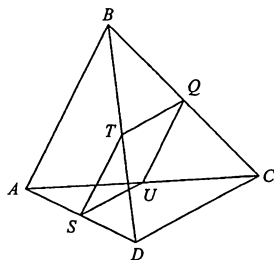


Рис. 5.90

Решение.

Пусть U, T — середины диагоналей AC, BD и S, Q — середины сторон AD, BC четырехугольника $ABCD$ (рис. 5.90). Отрезки UQ, ST равны и параллельны как средние линии треугольников ABC, ABD с общим основанием AB . Следовательно, точки S, T, Q, U есть вершины параллелограмма, если только они не лежат все на одной прямой. Но отрезки ST, SU как средние линии треугольников ABD, ADC параллельны их основаниям AB, DC , которые по условию непараллельны между собой. Следовательно, прямые ST, SU не совпадают и точки S, T, Q, U есть действительно вершины параллелограмма.

QED.

5.036. Доказать, что если биссектриса одного из углов треугольника равна произведению заключающих его сторон, деленному на их сумму, то этот угол равен $\frac{2\pi}{3}$.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 5.91) и $BD = \beta$ — биссектриса угла ABC ; $BC = a, AB = c$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} ac \sin \angle ABC = \frac{a\beta}{2} \sin \frac{\angle ABC}{2} + \frac{c\beta}{2} \sin \frac{\angle ABC}{2} \Leftrightarrow 2ac \sin \frac{\angle ABC}{2} \cdot \cos \frac{\angle ABC}{2} = \\ &= \beta(a+c) \sin \frac{\angle ABC}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\beta(a+c)}{2ac}. \end{aligned}$$

По условию $\beta = \frac{ac}{a+c}$ и $0^\circ < \frac{\angle ABC}{2} < 90^\circ$, следовательно,

$$\cos \frac{\angle ABC}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\angle ABC}{2} = 60^\circ \Leftrightarrow \angle ABC = 120^\circ. \quad \text{QED.}$$

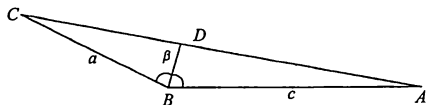


Рис. 5.91

5.037. Доказать, что в четырехугольнике с непараллельными противоположными сторонами три прямые, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей, пересекаются в одной точке.

Решение.

Из решения задачи 5.035 вытекает, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, в котором противоположные стороны непараллельны, делят пополам отрезок, соединяющий середины диагоналей. Таким образом, все три отрезка пересекаются в середине последнего. **QED.**

5.038. Через точку F , принадлежащую стороне AB треугольника ABC , проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону BC в точке G . Доказать, что AG , CF и медиана, проведенная из вершины B , пересекаются в одной точке.

Решение.

Пусть O — точка пересечения AG и CF (рис. 5.92). Проведем через точку O отрезок BM и докажем, что BM — медиана. Для этого проведем через точку O отрезок KL параллельно AC . Тогда треугольник FOK подобен треугольнику FCA ; следовательно, $\frac{KO}{AC} = \frac{FK}{FA}$. Аналогично, $\frac{OL}{AC} = \frac{GL}{GC}$. Так как

$$\frac{FK}{FA} = \frac{GL}{GC}, \text{ то } \frac{KO}{AC} = \frac{OL}{AC} \Leftrightarrow KO = OL \Leftrightarrow AM = MC, \text{ т.е. } BM \text{ — медиана.}$$

QED.

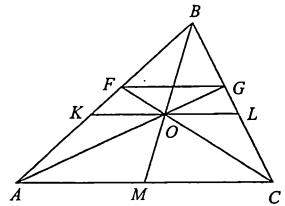


Рис. 5.92

5.039. Доказать, что в трапеции середины диагоналей и середины боковых сторон лежат на одной прямой.

Решение.

Как известно, прямая, проведенная через середину боковой стороны треугольника параллельно основанию, проходит через середину другой боковой стороны. Пусть E, H — середины боковых сторон и F, G — середины диагоналей трапеции $ABCD$ (рис. 5.93). Проведем через точку E прямую параллельно основаниям AB, CD трапеции. Из треугольника ACD видим, что она пройдет через F , затем из треугольника ABC видим, что она пройдет через H , а после этого из треугольника BCD видим, что она пройдет через G . Таким образом, точки E, F, G, H лежат на этой прямой. Мы имеем здесь случай, исключенный в задаче 5.035.

QED.

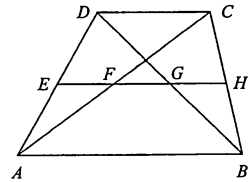


Рис. 5.93

5.040. Даны две концентрические окружности. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки одной окружности до концов диаметра другой не зависит ни от выбранной точки, ни от выбранного диаметра.

Решение.

Пусть точка O — центр данных окружностей (рис. 5.94); R и r — радиусы большей и меньшей окружности соответственно. Тогда $AB = 2r$, $CO = R$. Далее, по теореме косинусов из треугольника AOC получаем $AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2 \cdot AO \cdot CO \cdot \cos \angle AOC$, а из треугольника BOC получаем $BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2 \cdot BO \cdot CO \cdot \cos(180^\circ - \angle AOC)$. Сложив эти равенства, имеем: $AC^2 + BC^2 = AO^2 + BO^2 + 2 \cdot CO^2 = 2r^2 + 2R^2 = \text{const.}$

QED.

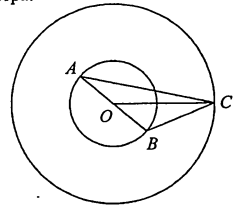


Рис. 5.94

5.041. Доказать, что сумма расстояний всякой точки основания равнобедренного треугольника от его боковых сторон равна высоте, проведенной из концов основания. Какой вид принимает это утверждение для точек, расположенных на продолжениях основания?

Решение.

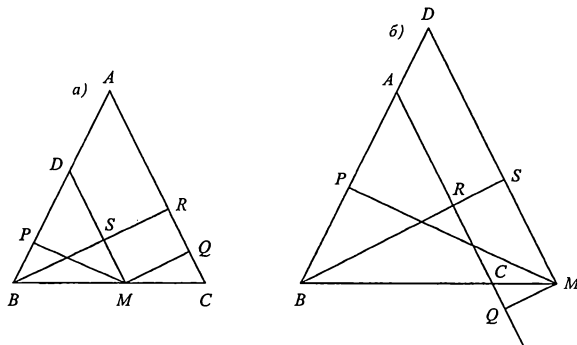


Рис. 5.95

Из точки M на основании BC равнобедренного треугольника ABC опущены перпендикуляры MP , MQ на боковые стороны, и из вершины B проведена высота BR (рис. 5.95, а). Требуется доказать: $MP + MQ = BR$. Проведя через точку M параллельную MSD к стороне AC , отсечем от BR часть SR , равную MQ . Остается доказать, что оставшая часть BS равна MP . Но это ясно из того, что BS и MP есть высоты равнобедренного треугольника DBM , проведенные из концов основания.

Если сделаем то же построение для точки M на продолжении основания, то получим (рис. 5.95, б): $MP = BS$, $MQ = SR$ и, вычитая почленно, найдем: $MP - MQ = BR$. **QED.**

5.042. В треугольнике ABC биссектрисы AB_1 и CB_2 пересекаются в точке M . Точки B , B_1 , B_2 , M лежат на одной окружности. Доказать, что угол ABC равен 60° .

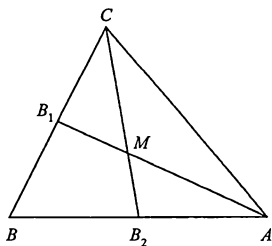


Рис. 5.96

Решение.

Из условия получаем (рис. 5.96):

$$\angle B_2MB_1 = 180^\circ - (\angle MAC + \angle MCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB).$$

Следовательно,

$$2\angle ABC = \angle BAC + \angle ACB \text{ или } 3\angle ABC = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ABC = 60^\circ.$$

QED.

5.043. Доказать, что сумма расстояний любой точки внутри равностороннего треугольника от его стороны равна его высоте. Как изменится это утверждение для точки вне треугольника?

Решение.

Из точки M внутри равностороннего треугольника ABC опущены перпендикуляры MP , MQ , MR на стороны и проведена высота AS (рис. 5.97). Требуется доказать: $MP + MQ + MR = AS$. Проведем через точку M прямую DTE , параллельную стороне BC . В равностороннем треугольнике ADE сумма $MP + MQ$ равна высоте, проведенной из конца стороны DE (см. задачу 5.041). Но в равностороннем треугольнике все стороны равны, поэтому сумма $MP + MQ$ равна также высоте AT . С другой стороны, $MR = TS$ как отрезки параллельных между параллельными. Итак, $MP + MQ = AT$, $MR = TS$. Складывая почленно, получаем: $MP + MQ + MR = AS$.

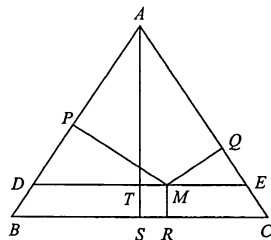


Рис. 5.97

Если точка M лежит вне треугольника, то в первой части доказанного равенства нужно заменить знак «+» на «-» перед расстояниями точки M от тех сторон, относительно которых точка M и треугольник расположены по разные стороны. Доказательство предоставляем читателю. **QED.**

5.044. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка, и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, из которых три части являются треугольниками. Доказать, что если площади этих треугольников равны S_1, S_2 и S_3 , то площадь треугольника ABC равна $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник и O — данная точка, через которую проведены прямые $MN \parallel AB$, $EF \parallel BC$, $KL \parallel AC$ (рис. 5.98). Тогда $S_1 = S_{\triangle OKF}$, $S_2 = S_{\triangle OML}$, $S_3 = S_{\triangle OFN}$. Так как

$$\left(\frac{KO}{AC}\right)^2 = \frac{S_1}{S_{\triangle ABC}}, \quad \left(\frac{OL}{AC}\right)^2 = \frac{S_2}{S_{\triangle ABC}}, \quad \left(\frac{NF}{AC}\right)^2 = \frac{S_3}{S_{\triangle ABC}}, \quad \text{то}$$

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S_{\triangle ABC}}} = \frac{KO + OL + NF}{AC} = \frac{AN + FC + NF}{AC} = 1 \quad (KO = AN, OL = FC).$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle ABC} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

QED.

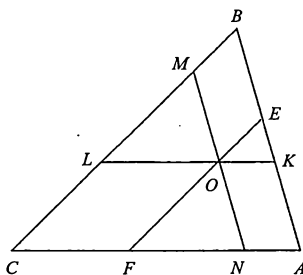


Рис. 5.98

5.045. Доказать, что хорды двух касательных кругов, соединяющие концы двух секущих, проходящих через точку касания, параллельны между собой. Как изменится это утверждение, когда секущие совпадают?

Решение.

Рассмотрим случай, когда круги O , O' внешне касательны (рис. 5.99). Углы AMN , CAN измеряются половиной одной и той же дуги AN и, следовательно, равны. Точно также углы $AM'N'$, BAN' измеряются половиной одной и той же дуги AN' и поэтому равны. Но углы CAN , BAN' равны как вертикальные. Следовательно, и углы AMN , $AM'N'$ равны, откуда вытекает параллельность хорд MN , $M'N'$. Случай внутреннего касания кругов предлагаем разобрать читателю. Когда секущие совпадают, обе хорды обращаются в касательные, которые остаются параллельными.

QED.

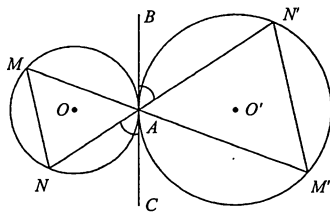


Рис. 5.99

5.046. Площадь треугольника ABC равна S_1 ; площадь треугольника AHB , где H — точка пересечения высот, равна S_2 . На прямой CH взята такая точка N , что треугольник ABN — прямоугольный. Доказать, что площадь треугольника ABN есть среднее геометрическое между S_1 и S_2 (рис. 5.100).

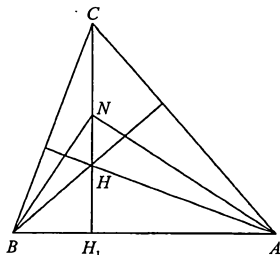


Рис. 5.100

Решение.

Пусть CH_1 — высота данного треугольника ABC . Так как треугольники BCH_1 и AH_1H подобны, то $\angle BCH_1 = \angle BAH = 90^\circ - \angle ABC$. Отсюда следует, что

$$\frac{AH_1}{CH_1} = \frac{HH_1}{BH_1} \Leftrightarrow CH_1 \cdot HH_1 = AH_1 \cdot BH_1 = NH_1^2.$$

$$\text{Поэтому } \frac{CH_1 \cdot AB}{2} \cdot \frac{HH_1 \cdot AB}{2} = \left(\frac{NH_1 \cdot AB}{2} \right)^2 \Leftrightarrow S_1 \cdot S_2 = S_{\triangle ABN}^2.$$

QED.

5.047. Доказать, что хорды двух пересекающихся кругов, соединяющие концы двух секущих, проходящих через точки пересечения, параллельны между собой. Как изменится это утверждение, когда концы секущих на одном из кругов совпадают?

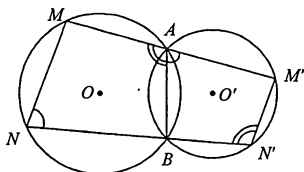


Рис. 5.101

Решение.

Рассмотрим случай, когда секущие MAM' , NBN' не пересекаются внутри кругов O , O' (рис. 5.101). По свойству вписанных четырехугольников имеем: $\angle MNB = 180^\circ - \angle MAB = \angle M'AB$, $\angle M'N'B = 180^\circ - \angle M'AB = \angle MAB$. Складывая почленно, получаем: $\angle MNB + \angle M'N'B = \angle M'AB + \angle MAB = 180^\circ$, откуда следует, что хорды NM , $N'M'$ параллельны. Рассмотрение случая, когда секущие пересекаются внутри одного из кругов, предоставляем читателю. В случае, когда концы секущих на одном из кругов совпадают, соответствующая хорда обращается в касательную, которая остается параллельной другой хорде.

QED.

5.048. В четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная другой диагонали AC . Эта прямая пересекает сторону AD в точке K . Доказать, что отрезок CK делит четырехугольник $ABCD$ на равновеликие части.

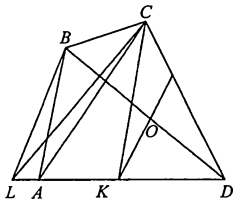


Рис. 5.102

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, O — середины диагонали BD , $KO \parallel AC$ (рис. 5.102). Продолжим AD до точки L так, что $LK = KD$. Тогда $S_{\triangle CKD} = S_{\triangle CKL}$ и OK — средняя линия треугольника LBD . Следовательно, $OK \parallel BL \parallel AC \Leftrightarrow S_{\triangle LKC} = S_{\triangle LBC}$ (треугольники с общим основанием AC и равными высотами). Таким образом, получаем: $S_{\triangle CKL} = S_{\triangle ACK} + S_{\triangle LKC} = S_{\triangle ACK} + S_{\triangle LBC} = S_{\triangle ACK} + S_{\triangle BCK}$, т.е. $S_{\triangle ACK} = S_{\triangle BCK}$.

QED.

5.049. Доказать, что отрезки общей секущей двух внутренних касательных кругов, заключенные между обеими окружностями и не налегающие друг на друга или, наоборот, налегающие друг на друга, видны из точки касания под равными углами. Как изменится это утверждение, когда секущая обратится в хорду наружного круга, касательную к внутреннему?

Решение.

Пусть будет $PMNQ$ общая секущая кругов O, O' , внутренне касательных в точке A (рис. 5.103). Требуется доказать равенства $\angle MAP = \angle NAQ$, $\angle NAP = \angle MAQ$. Второе равенство получается из первого прибавлением к обеим частям по $\angle MAN$. Чтобы доказать первое, продолжим AM, AN до пересечения с окружностью O' в точках M', N' . Из решения задачи 5.045 хорды $MN, M'N'$ параллельны. Следовательно, заключенные между ними дуги PM', QN' круга O' равны, а потому равны и опирающиеся на эти дуги вписанные углы $M'AP, N'AQ$ того же круга, что и требовалось. Если бы хорда PQ круга O' была касательной к кругу O , то точки M, N совпали бы с точкой касания и мы получили бы следующее утверждение: если два круга внутренне касательны и хорда паружного круга касательная к внутреннему, то прямая, соединяющая точку касания кругов с точкой касания хорды к внутреннему кругу, делит пополам угол между прямыми, соединяющими точку касания кругов с концами хорды. Предлагаем читателю доказать это утверждение самостоятельно. **QED.**

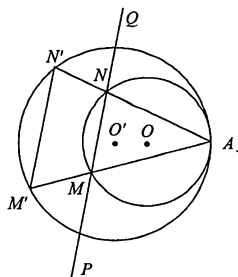


Рис. 5.103

5.050. Доказать, что отношение площади любого треугольника к площади описанного около него круга меньше $\frac{2}{3}$.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник. Обозначим через a, b, c и α, β, γ стороны и углы этого треугольника соответственно;

R — радиус описанного круга. Тогда $S_{\Delta} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ (по теореме синусов). Отсюда получаем:

$$\frac{S_{\Delta}}{\pi R^2} = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\pi} < \frac{2}{3}.$$

QED.

5.051. Доказать, что отрезки общей секущей двух внешне касательных кругов, заключенные между обеими окружностями, один из которых составляет часть другого, видны из точки касания под углами, в сумме составляющими два прямых. Как изменится это утверждение, когда секущая обратится в общую касательную обоих кругов?

Решение.

Требуется доказать (рис. 5.104): $\angle MAQ + \angle NAP = \pi$. Продолжим MA, NA до пересечения с окружностью O' в точках M', N' . Из решения задачи 5.045 прямые $MN, M'N'$ параллельны и, следовательно, дуги PAN', QBM' равны. Угол QAM' измеряется половиной дуги QBM' , а угол PAN' измеряется половиной дуги PBN' , которая вместе с дугой PAN' , равной дуге QBM' , составляет полную окружность. Отсюда видно, что углы QAM, PAN' в сумме измеряются половиной окружности и, следовательно, составляют π . Поэтому и смежные с ним углы MAQ, NAP должны в сумме составлять π , что и требовалось доказать. Если бы общая секущая $MNPQ$ обратилась в общую касательную к кругам O, O' , то точки M, N слились бы с точкой касания к кругу O , а точки P, Q — с точкой касания к кругу O' и мы получили бы утверждение: общая касательная двух внешне касательных кругов видна из точки касания их под прямым углом. Предлагаем читателю доказать это утверждение самостоятельно. **QED.**

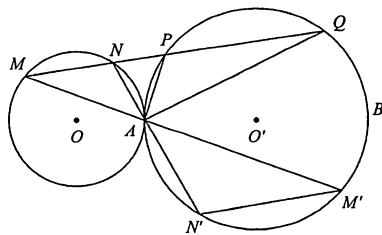


Рис. 5.104

5.052. Доказать, что сумма квадратов сторон любого треугольника составляет $\frac{4}{3}$ от суммы квадратов его медиан.

Решение.

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Тогда по формуле имеем:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \Leftrightarrow m_a^2 = \frac{1}{4} (2b^2 + 2c^2 - a^2). \text{ Аналогично, } m_b^2 = \frac{1}{4} (2a^2 + 2c^2 - b^2) \text{ и } m_c^2 = \frac{1}{4} (2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Далее, $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{4} (2b^2 + 2c^2 - a^2) + \frac{1}{4} (2a^2 + 2c^2 - b^2) + \frac{1}{4} (2a^2 + 2b^2 - c^2) = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$, откуда получаем:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

QED.

5.053. Доказать, что прямая, параллельная касательной в вершине вписанного треугольника и пересекающая боковые стороны, отсекает от него четырехугольник, который может быть вписан в круг.

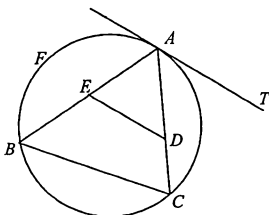


Рис. 5.105

Решение.

Угол BED равен углу BAT как соответственный, а угол BAT измеряется половиной дуги ACB (рис. 5.105). Угол DCB измеряется половиной дуги AFB . Так как дуги ACB , AFB вместе составляют полную окружность, то измеряемые половинами этих дуг углы BED , DCB в сумме равны 180° и, следовательно, около четырехугольника $BCDE$ можно описать круг.

QED.

5.054. Доказать, что сумма площадей полукругов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади полукруга, построенного на его гипотенузе.

Решение.

Пусть дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$). Тогда сумма площадей полукругов, построенных на катетах AB и BC , равна $\frac{\pi}{4} AB^2 + \frac{\pi}{4} BC^2 = \frac{\pi}{4} (AB^2 + BC^2) = \frac{\pi}{4} AC^2$, т.е. равна площади полукруга, построенного на гипотенузе AC .

QED.

5.055. Противоположные стороны четырехугольника продолжены до пересечения, и около четырех образовавшихся треугольников описаны круги. Доказать, что все они пересекаются в одной точке.

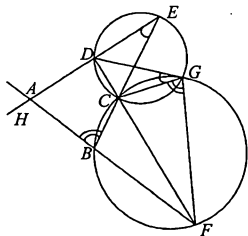


Рис. 5.106

Решение.

В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 5.106) стороны AB , DC продолжены до пересечения в точке F , а стороны AD , BC продолжены до пересечения в точке E . Окружности, описанные около треугольников BCF , CDE , имеют кроме точки C еще одну общую точку G . В противном случае эти окружности касались бы в точке C и из решения задачи 5.045 прямые BF , DE были бы параллельные, тогда как в действительности они пересекаются в точке F . Нужно доказать, что точка G лежит также и на окружностях, описанных около треугольников ABE , ADF . Доказательство одно и то же для обоих треугольников, и мы приведем его только для треугольника ADF . Чтобы доказать, что точки A , D , F , G лежат на одной окружности, достаточно проверить, что в четырехугольнике $ADGF$ внутренний угол DGF при вершине G равен внешнему углу FAH при противоположной вершине A .

Имеем: $\angle DGF = \angle DGC + \angle CGF$. Далее имеем: $\angle DGC = \angle DEC$, так как эти углы вписаны в один и тот же круг и опираются на одну и ту же дугу, и $\angle CGF = \angle CBA$, так как угол CGF внутренний при вершине G , а угол CBA внешний при вершине B вписанного четырехугольника. Отсюда $\angle DGF = \angle DEC + \angle CBA$, т.е. угол DGF равен сумме двух внутренних углов треугольника ABE , не смежных с внешним углом FAH . Так как эта сумма равна углу FAH , то мы получаем $\angle DGF = \angle FAH$. **QED.**

5.056. Доказать, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него подобный ему треугольник.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 5.107), в котором $AH_1 \perp BC$ и $BH_2 \perp AC$. Требуется доказать, что треугольники H_1CH_2 , ACB подобные.

Треугольники AH_1C и BH_2C подобные (они прямоугольные и $\angle C$ у них общий), поэтому

$$\frac{AC}{H_1C} = \frac{BC}{H_2C}. \text{ Таким образом, в } \triangle ABC \text{ и } \triangle H_1H_2C \text{ две стороны одного пропорцио-}$$

нальны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами равны, следовательно, треугольники H_1CH_2 и ACB подобные. **QED.**

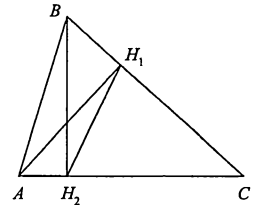


Рис. 5.107

5.057. Стороны пятиугольника продолжены до образования пятиугольной звезды и около пяти треугольных лучей описаны круги. Доказать, что пять наружных точек пересечения соседних кругов лежат на одной окружности (*теорема Микеля*).

Решение.

Стороны пятиугольника $ABCDE$ (рис. 5.108) продолжены до образования пятиугольной звезды $KLMNP$, и около треугольных лучей ABN , BCP , CDK , DEL , EAM описаны окружности. Как и в задаче 5.055, убедимся, что окружности, описанные около соседних лучей, пересекаются кроме вершины пятиугольника еще в одной точке. Обозначим новые точки пересечения через A' , B' , C' , D' , E' . Требуется доказать, что эти точки лежат на одной окружности. Достаточно доказать, что точки A' , B' , C' , D' лежат на одной окружности и что точки B' , C' , D' , E' лежат на одной окружности, так как из этого будет следовать, что точки A' , E' лежат на окружности, проходящей через точки B' , C' , D' , т.е., что все пять точек лежат на этой окружности. Так как для любых четырех точек доказательство одинаково, то мы докажем только, что точки B' , C' , D' , E' лежат на одной окружности. Предварительно докажем, что точки P , B' , A , E , L лежат на одной окружности. Это вытекает из задачи 5.055. Применяя эту задачу к четырехугольнику $ABCL$, находим, что точка B' лежит на окружности, описанной около треугольника PAL , а применяя ее к четырехугольнику $AEDP$, убеждаемся, что и точка E лежит на окружности, описанной около треугольника PAL . Таким образом, точки P , B' , A , E , L действительно лежат на одной окружности.

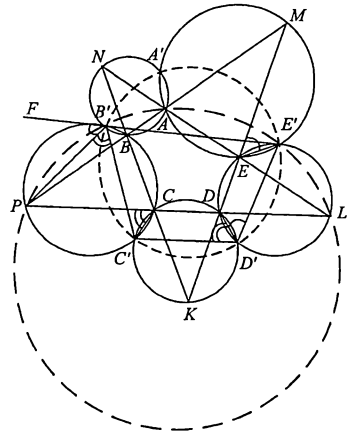


Рис. 5.108

Переходя к нашей задаче, заметим, что она будет доказана, если мы проверим равенство $\angle C'D'E' = \angle C'B'F$, так как это покажет, что четырехугольник $B'C'D'E'$ можно вписать в некоторую окружность. Представим это равенство в виде $\angle C'D'D + \angle DD'E' = \angle C'B'P + \angle PBF$ и докажем, что первые и вторые слагаемые равны в отдельности.

Действительно: $\angle C'D'D = \angle C'CP$ по свойству вписанного четырехугольника $C'D'DC$; $\angle C'CP = \angle C'B'P$, так как эти углы вписаны в один и тот же круг и опираются на одну и ту же дугу; следовательно, $\angle C'D'D = \angle C'B'P$, как и требовалось.

Далее, $\angle DD'E = \angle DLE'$, так как эти углы вписаны в один и тот же круг и опираются на одну и ту же дугу; $\angle DLE' = \angle PBF$ по свойству вписанного четырехугольника $PBE'L$; следовательно, $\angle DD'E = \angle PBF$. **QED.**

5.058. Биссектриса некоторого треугольника совпадает с его медианой. Доказать, что такой треугольник является равнобедренным.

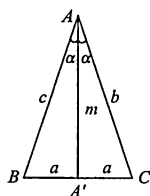


Рис. 5.109

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 5.109). По условию $BA' = A'C = a$, $AA' = m$, $\angle BA'A = \angle CA'A = \alpha$. В треугольниках ABA' и $CA'A$ по теореме косинусов имеем: $a^2 = c^2 + m^2 - 2cm \cos \alpha$, $a^2 = b^2 + m^2 - 2bm \cos \alpha$. Вычитая одно равенство из другого, получим $(c^2 - b^2) - 2m(c - b) \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow (c - b)(c + b - 2m \cos \alpha) = 0$. Так как $c + b - 2m \cos \alpha \neq 0$, то $c = b$, т.е. треугольник ABC является равнобедренным. **QED.**

5.059. Равносторонний треугольник вписан в круг. Доказать, что расстояние всякой точки дуги, стягиваемой какой-нибудь из его сторон, от противоположной вершины равно сумме расстояний той же точки от остальных вершин.

Решение.

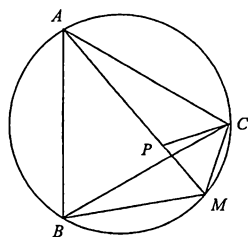


Рис. 5.110

Требуется доказать, что $AM = BM + CM$ (рис. 5.110).

Для доказательства нужно разбить отрезок AM на части, равные в отдельности отрезкам BM и CM . Если отложим на отрезке AM отрезок AP , равный отрезку BM , то остается доказать, что отрезок PM равен отрезку CM . В треугольниках CAP , CBM имеем: $CA = CB$, $AP = BM$ и $\angle CAP = \angle CBM$, так как эти углы вписанные и опираются на одну и ту же дугу CM . Следовательно, треугольники CAP , CBM равны и $CP = CM$. Таким образом, треугольник CPM равнобедренный с основанием PM . Но угол при основании PMC вписанный и опирается на дугу AC , равную трети полной окружности. Следовательно, угол PMC равен 60° , откуда легко вывести, что и остальные углы треугольника PMC равны 60° , так что он оказался равносторонним. Отсюда находим: $PM = CM$. **QED.**

5.060. Доказать, что длина медианы треугольника меньше полусуммы длин заключающих ее сторон.

Решение.

Пусть a, b, c — длины сторон данного треугольника, тогда $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$. Необходимо доказать:

$$\frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} < \frac{1}{2}(b + c).$$

Имеем: $\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} < b + c \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 < b^2 + 2bc + c^2 \Leftrightarrow (b^2 - c^2) - a^2 < 0 \Leftrightarrow (a + b - c)(b - a - c) < 0$.

Так как в треугольнике $(a + b) - c > 0$, $b - (a + c) < 0$, то неравенство $(a + b - c)(b - a - c) < 0$ является верным, поэтому

разность $\frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} - \frac{1}{2}(b + c)$ меньше нуля, т.е. $\frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} < \frac{1}{2}(b + c)$. **QED.**

5.061. Доказать, что высота треугольника и радиус описанного круга, проведенный к вершине, образуют равные углы с боковыми сторонами.

Решение.

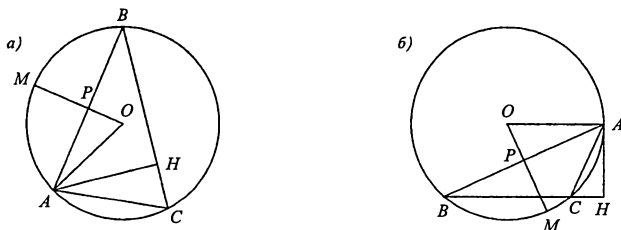


Рис. 5.111

Пусть AH — высота треугольника и O — центр описанного круга около этого треугольника ABC (рис. 5.111). Проведем радиус OA , опустим из O перпендикуляр AP на сторону AB и продолжим его до пересечения в точке M с окружностью. Требуется доказать: $\angle OAB = \angle CAH$. Так как треугольники OAP , CAH прямоугольные, то достаточно доказать, что $\angle AOP = \angle ACH$.

Предположим сначала, что угол C треугольника ABC острый (рис. 5.111, а). Тогда угол ACH совпадает с углом C и измеряется половиной дуги сегмента, прилегающего к стороне AB . С другой стороны, в этом случае центр O лежит вне того же сегмента. Поэтому продолжение перпендикуляра OP делит пополам дугу именно этого сегмента, и угол AOP также измеряется половиной его дуги. Следовательно, углы ACH , AOP равны, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что угол C треугольника ABC тупой (рис. 5.111, б). Тогда угол ACH смежный с углом C и измеряется половиной дуги ACB , дополняющей дугу сегмента, прилегающего к стороне AB , до полной окружности. С другой стороны, в этом случае центр O лежит внутри того же сегмента. Поэтому продолжение перпендикуляра OP делит пополам дугу ACB дополнительного сегмента, и угол AOP измеряется половиной этой дуги. Следовательно, в этом случае углы ACH , AOP равны.

Остается только случай, когда угол C прямой. Но тогда высота AH совпадает со стороной AC , а радиус AO идет по стороне AB , так что углы ACH , OAB оба равны нулю и, следовательно, равны между собой. **QED.**

5.062. Доказать, что сумма длин высот треугольника меньше его периметра.

Решение.

Пусть a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие сторонам a, b, c углы соответственно; h_a, h_b, h_c — высоты,

проведенные к сторонам a, b, c соответственно. Тогда площадь треугольника $S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \Leftrightarrow h_a = b \sin \gamma$.

Аналогично, $h_b = c \sin \alpha$, $h_c = a \sin \beta$, следовательно, $h_a + h_b + h_c = b \sin \gamma + c \sin \alpha + a \sin \beta$ или $h_a + h_b + h_c < a + b + c$ (так как $\sin \alpha \leq 1$, $\sin \beta \leq 1$, $\sin \gamma \leq 1$, по одновременно они не могут быть равны единице). **QED.**

5.063. Треугольник разбит на два других треугольника прямой, проведенной из вершины. Доказать, что центры кругов, описанных около всех трех треугольников, лежат на одной окружности с вершиной.

Решение.

Треугольник ABC разбит прямой AD на треугольники ABD , ACD (рис. 5.112). Центр описанного круга O треугольника ABC есть точка пересечения перпендикуляров в серединах сторон AB, AC ; центр описанного круга O_1 треугольника ABD

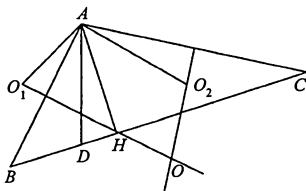


Рис. 5.112

лежит на первом перпендикуляре; центр описанного круга O_2 треугольника ACD лежит на втором перпендикуляре. Нужно доказать, что четырехугольник AO_1OO_2 можно вписать в окружность. Так как угол O_1OO_2 , очевидно, дополняет угол BAC до 180° , то остается доказать, что противоположный угол равен углу BAC . Предположим, что прямая AD наклонена к основанию AC и что через ADB обозначен тупой угол, а через ADC — острый. Тогда из рассуждений решения задачи 5.061 видно, что центр O_1 лежит вне треугольника ABC , а центр O_2 — внутри этого треугольника. Поэтому $\angle O_1AO_2 = \angle BAC + \angle BAO_1 - \angle CAO_2 = \angle CAO_2$. Но по задаче 5.061 для треугольников ABD, ACD $\angle BAO_1 = \angle DAH, \angle CAO_2 = \angle DAH$. Следовательно, углы BAO_1, CAO_2 равны и $\angle O_1AO_2 = \angle BAC$, что и оставалось доказать.

Если теперь предположим, что прямая AD перпендикулярна к основанию BC , то доказательство только упрощается. В этом случае O_1 лежит на AB , и O_2 лежит на AC , так что мы сразу получаем $\angle O_1AO_2 = \angle BAC$. **QED.**

5.064. Доказать, что из трех медиан прямоугольного треугольника наименьшую длину имеет та, которая проведена к гипотенузе.

Решение.

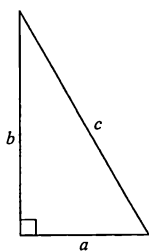


Рис. 5.113

В прямоугольном треугольнике (рис. 5.113) имеем:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3b^2 + c^2}, \quad (1)$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + c^2}, \quad (2)$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} = \frac{1}{2} c, \quad (3)$$

так как $c^2 = a^2 + b^2$. Тогда из (1) и (3) получаем $\frac{m_a}{m_c} = \sqrt{\frac{3b^2 + c^2}{c^2}} = \sqrt{3 \cdot \frac{b^2}{c^2} + 1} > 1$, т.е. $m_a > m_c$. Аналогично из (2) и (3)

получаем, что $m_b > m_c$. Следовательно, медиана m_c имеет наименьшую длину. **QED.**

5.065. Доказать, что из четырех точек, одна из которых есть ортоцентр треугольника (точка пересечения высот треугольника), образуемого тремя остальными, каждую можно рассматривать как ортоцентр треугольника, образуемого тремя остальными.

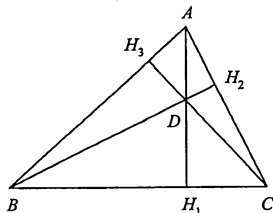


Рис. 5.114

Решение.

Из рис. 5.114 легко увидеть, что точки A, B, C есть ортоцентры треугольников BCD, ACD, ABD . Но можно высказать отношение между точками A, B, C, D в таком виде, что точка D не будет играть особой роли по сравнению с точками A, B, C : из четырех точек A, B, C, D каждая есть ортоцентр треугольника, образованного тремя остальными, когда прямые, соединяющие любые две различные пары из этих точек, взаимно перпендикулярны, т.е. когда $AB \perp CD, AC \perp BD, BC \perp AD$. **QED.**

5.066. Доказать, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного многоугольника, до прямых, проходящих через его стороны, равна произведению апофемы многоугольника на число его сторон.

Решение.

Пусть N — произвольная точка внутри правильного многоугольника $ABC...L$ (рис. 5.115). Соединим точку N с вершинами многоугольника и опустим перпендикуляры из N на его стороны. Тогда площадь многоугольника

$$ABC...LS = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \dots + \frac{1}{2}ah_l = \frac{a}{2}(h_1 + h_2 + \dots + h_l),$$

где a — длина стороны, а l — количество сторон многоугольника. С другой стороны, площадь данного многоугольника равна произведению его периметра на апофему: $S = ph$. Следовательно,

$$ph = \frac{a}{2}(h_1 + h_2 + \dots + h_l) \Leftrightarrow \frac{la}{2}h = \frac{a}{2}(h_1 + h_2 + \dots + h_l) \Leftrightarrow h_1 + h_2 + \dots + h_l = lh.$$

QED.

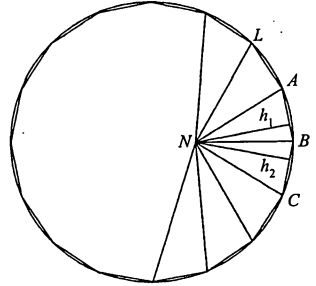


Рис. 5.115

5.067. Доказать, что прямая, соединяющая вершину параллелограмма с серединами сторон, сходящихся в противоположной вершине, пересекает диагональ, соединяющую две другие вершины, на три равные части.

Решение.

Пусть M, N — середины сторон BC, CD параллелограмма $ABCD$ (рис. 5.116).

Требуется доказать: $BP = PQ = QD = \frac{1}{3}BD$. В треугольнике ABC прямые BO, AM — медианы. Отсюда находим, что $BP = \frac{2}{3}OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD$.

Точно так же из треугольника ACD получаем $QD = \frac{1}{3}BD$. Отсюда уже само

собой следует, что $PQ = BD - BP - DQ = BD - \frac{1}{3}BD - \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}BD$. QED.

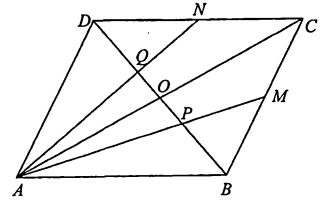


Рис. 5.116

5.068. Каждая сторона выпуклого четырехугольника меньше r . Доказать, что его площадь меньше r^2 .

Решение.

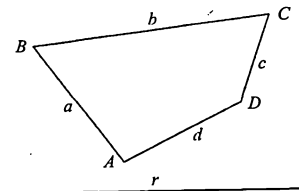


Рис. 5.117

Пусть a, b, c, d — стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 5.117), каждая из которых меньше r . Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2} \sin \angle B$ и $S_{\triangle ADC} = \frac{cd}{2} \sin \angle D$;

откуда $S_{ABCD} = \frac{ab}{2} \sin \angle B + \frac{cd}{2} \sin \angle D < \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$, т.е. $S_{ABCD} < \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} = r^2$.

QED.

5.069. Доказать, что расстояние центра описанного круга от стороны треугольника вдвое меньше расстояния ортоцентра от противоположной вершины.

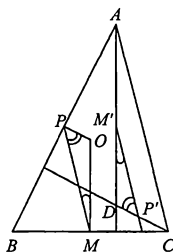


Рис. 5.118

Решение.

Проведем в треугольнике ABC (рис. 5.118) высоты к сторонам AB, BC до пересечения в ортоцентре O и перпендикуляры в серединах P, M сторон AB, BC до пересечения в центре описанного круга O' . Требуется доказать, что $OM' = \frac{1}{2} DA$. Средняя линия $M'P'$ треугольника ACD равна и параллельна средней линии MP треугольника ACB , так как треугольники ACD, ACB имеют общее основание AC . В треугольниках $OMP, DM'P'$ стороны $MP, M'P'$ равны по доказанному и, кроме того, соответственные углы равны, так как соответственные стороны параллельны. Следовательно, треугольники $OMP, DM'P'$ равны, и мы имеем:

$$OM = DM' = \frac{1}{2} DA.$$

QED.

5.070. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Доказать, что биссектриса также равна основанию треугольника.

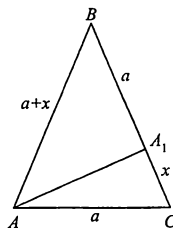


Рис. 5.119

Решение.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник, в котором A_1 — биссектриса и $AB = BC$ (рис. 5.119). По условию $AC = BA_1$. Пусть $AC = a, CA_1 = x$, тогда $AB = a + x$. По свойству биссектрисы треугольника запишем: $\frac{BA_1}{AB} = \frac{CA_1}{AC}$ или $\frac{a}{a+x} = \frac{x}{a} \Leftrightarrow a^2 = ax + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a$ (значение $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a$ не

подходит по условию, так как $x > 0$). Значит, $AB = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2} a = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a$. Далее,

$$AA_1 = \sqrt{AB \cdot AC - BA_1 \cdot CA_1} = \sqrt{\frac{1}{2} a^2 (\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2} a^2 (\sqrt{5}-1)} = a.$$

QED.

5.071. Доказать, что центр описанного круга, ортоцентр и центр тяжести (точка пересечения медиан треугольника) лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

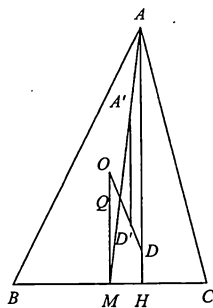


Рис. 5.120

Решение.

В треугольнике ABC (рис. 5.120) проведем высоту AH и отметим на ней ортоцентр O , затем проведем перпендикуляр C в середине M стороны BC и отметим на нем центр описанной окружности O' , наконец, проведем медиану и отметим ее точку пересечения Q с прямой OD . Нужно доказать, что Q есть центр тяжести. Отрезок MO параллелен отрезку AD и по задаче 5.069 равен его половине. Следовательно, отрезок MO равен и параллелен средней линии $A'D'$ треугольника ADQ . Поэтому отрезки OD', MA' взаимно

делятся пополам, и мы получаем $\frac{1}{2} QA = \frac{1}{3} MA$. Это показывает, что точка Q есть действительно центр тяжести, и мы видим, что центр описанного круга O , ортоцентр D и центр тяжести Q лежат на одной прямой. Заметим, что нами рассмотрен только общий случай, когда медиана не совпадает с высотой. Но если медиана совпадает с высотой, то доказываемое утверждение становится очевидным, так как в этом случае все три точки лежат на высоте.

QED.

5.072. Доказать, что если медианы AM_1 и BM_2 треугольника ABC равны, то треугольник равнобедренный: $AC = BC$.

Решение.

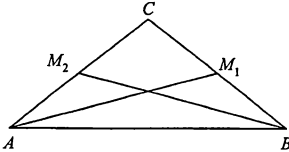


Рис. 5.121

Так как $AM_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2(CA^2 + AB^2) - CB^2}$, $BM_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2(CB^2 + AB^2) - CA^2}$ (рис. 5.121) и $AM_1 = BM_2$, то

$$\begin{aligned}\sqrt{2(CA^2 + AB^2) - CB^2} &= \sqrt{2(CB^2 + AB^2) - CA^2} \Leftrightarrow 2(CA^2 + AB^2) - CB^2 = \\ &= 2(CB^2 + AB^2) - CA^2 \Leftrightarrow CA^2 = CB^2,\end{aligned}$$

т.е. $AC = BC$.

QED.

5.073. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на стороны вписанного треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симсона).

Решение.

Из точки M на окружности круга, описанного около треугольника ABC , опущены перпендикуляры MP , MQ , MR на стороны (рис. 5.122). Требуется доказать, что точки P , Q , R лежат на одной прямой. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда одна из точек P , Q , R лежит на самой стороне треугольника.

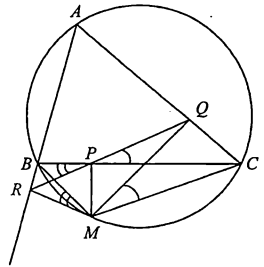


Рис. 5.122

Пусть, например, точка P лежит на стороне BC . Из двух противоположных углов ABM , ACM вписанного четырехугольника $ABMC$ или один острый, а другой — тупой, или оба прямые. Если они оба прямые, то R совпадает с B и Q совпадает с C . Следовательно, точки P , Q , R лежат на прямой BC , и задача решена. Предположим, напротив, что один из этих углов, например угол ACM , острый и, следовательно, другой угол ABM тупой. Тогда Q лежит на самой стороне AC , а R лежит на продолжении стороны AB за конец B . Из сказанного следует, что отрезки PB , PC составляют продолжение друг друга, а отрезки PQ , PR во всяком случае расположены по разные стороны от прямой BC . Нужно доказать, что и отрезки PQ , PR составляют продолжение друг друга, для чего достаточно проверить равенство $\angle CPQ = \angle BPR$. Заметив, что P , Q лежат на окружности, описанной на MC как на диаметре, и P , R лежат на окружности, описанной на MB как на диаметре, мы можем заменить углы CPQ , BPR равными им углами CMQ , BMR , и нам остается проверить равенство $\angle CMQ = \angle BMQ$. Но из прямоугольных треугольников CMQ , BMR находим: $\angle CMQ = 90^\circ - \angle ACM$, $\angle BMR = 90^\circ - \angle RBM$, так что остается проверить только равенство $\angle ACM = \angle RBM$. А это равенство следует из того, что во вписанном четырехугольнике $ABMC$ угол ACM есть внутренний при вершине C , а угол RBM есть внешний при противоположной вершине B .

QED.

5.074. Доказать, что в треугольнике отношение суммы всех попарных произведений, составленных из длин сторон треугольника, к сумме длин его трех высот равно диаметру описанной окружности.

Решение.

Необходимо доказать, что $\frac{ab+bc+ac}{h_a+h_b+h_c} = 2R$ (рис. 5.123), где R — радиус описанной окружности.

По теореме синусов $\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$ получаем:

$$\frac{ac}{c \sin \angle A} = \frac{ab}{a \sin \angle B} = \frac{bc}{b \sin \angle C} = 2R. \text{ Так как } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \angle C = \frac{1}{2} ah_a,$$

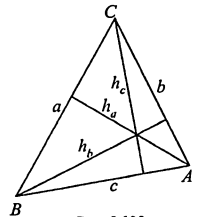


Рис. 5.123

то $h_a = b \sin \angle C$. Аналогично, $h_b = c \sin \angle A$, $h_c = a \sin \angle B$. Тогда $ab = 2R \sin \angle B = 2R h_c$, $bc = 2R \sin \angle C = 2R h_a$, $ac = 2R \sin \angle A = 2R h_b$.

Складывая эти равенства, имеем: $ab + bc + ac = 2R(h_a + h_b + h_c) \Leftrightarrow \frac{ab + bc + ac}{h_a + h_b + h_c} = 2R$.

QED.

5.075. Доказать, что окружность с центром в середине отрезка, соединяющего центр описанного круга и ортоцентр, и с радиусом, равным половине радиуса описанного круга, проходит через основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами (круг девяти точек).

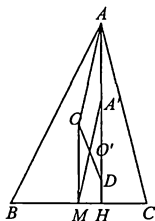


Рис. 5.124

Решение.

Примем (рис. 5.124) точку A за вершину треугольника ABC , проведем высоту AH и перпендикуляр в середине M основания BC и отметим центр описанного круга O , ортоцентр D , середину O' отрезка OD и середину A' отрезка AD . Достаточно доказать, что окружность с

центром O' и радиусом $\frac{1}{2}OA$ проходит через точки M, H, A' , потому что безразлично, которую из точек A, B, C приять за вершину треугольника ABC . Отрезок OM параллелен отрезкам $AA', A'D$ и по задаче 5.069 равен им. Поэтому $OAA'M$ есть параллелограмм, откуда находим: $MA' = OA$. Точно так же OM и $A'D$ есть противоположные стороны параллелограмма, диагонали которого есть OD, MA' . Так как диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам, то мы видим, что MA' проходит через O' , и кроме того получаем:

$O'M = O'A' = \frac{1}{2}MA' = \frac{1}{2}OA$. Отсюда следует, что окружность с центром O' и радиусом $\frac{1}{2}OA$ пройдет через M и A' . Так как MA' есть диаметр этой окружности и угол MHA' прямой, то она пройдет и через H .

QED.

5.076. Доказать, что в любом прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин медиан составляет 150% от квадрата длины его гипотенузы.

Решение.

Пусть a, b, c — катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника соответственно, тогда из задачи 5.064 имеем:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{3b^2 + c^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + c^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}c.$$

Возведя записанные выражения для медиан в квадрат и сложив почленно, получим:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{4}(3b^2 + c^2) + \frac{1}{4}(3a^2 + c^2) + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}(3c^2 + 3(a^2 + b^2)) = \frac{6}{4}c^2 = 1,5c^2,$$

т.е. сумма квадратов длин медиан составляет 150% от квадрата длины гипотенузы.

QED.

5.077. Доказать, что два квадрата всегда подобны.

Решение.

Пусть $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ — два квадрата. Имеем: $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \angle D = \angle D_1$, так как все углы прямые, и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1}$, так как в каждом квадрате стороны равны. Согласно определению подобия многоугольников, это доказывает подобие квадратов $ABCD, A_1B_1C_1D_1$.

QED.

5.078. Доказать, что если квадраты сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то треугольник, сторонами которого служат медианы данного, подобен данному треугольнику.

Решение.

Запишем формулы выражения медиан треугольника через его стороны a, b, c :

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Так как a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию, то $2b^2 = a^2 + c^2$, поэтому $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} c, m_b = \frac{\sqrt{3}}{2} b, m_c = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.

Отсюда следует, что $m_a : m_b : m_c = c : b : a$.

QED.

5.079. Доказать, что два прямоугольника подобны, если имеют равные отношения соседних сторон.

Решение.

Пусть в прямоугольниках $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Переставив соседние члены, найдем: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Это отношение не изменится, если заменить входящие в них стороны прямоугольников противоположными сторонами. Поэтому

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1}$. Кроме того, имеем: $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \angle D = \angle D_1$, так как все эти углы прямые.

Отсюда вытекает подобие прямоугольников $ABCD, A_1B_1C_1D_1$.

QED.

5.080. Стороны угла соединены двумя параллельными отрезками, и в концах каждого отрезка проведены перпендикуляры к сторонам угла до взаимного пересечения. Доказать, что точки пересечения перпендикуляров лежат на одной прямой с вершиной угла.

Решение.

Пусть O — вершина данного угла, $AB, A'B'$ — данные отрезки, C, C' — точки пересечения перпендикуляров к сторонам угла в концах отрезков $AB, A'B'$ (рис. 5.125). Треугольники $OAB, OA'B'$ подобны, так как они отсечены параллельными прямыми от одного и того же угла.

Отсюда: $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$, $\angle OAB = \angle OA'B'$. Треугольники $ABC, A'B'C'$ подобны, так как их соответственные стороны параллельны. Отсюда

имеем: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Сопоставляя полученное,

находим: $\frac{OA}{OA'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\angle OAC = \angle OA'C'$. Из этого следует, что тре-

угольники $OAC, OA'C'$ подобны, так как они имеют по равному углу между пропорциональными сторонами. Вследствие этого углы $AOC, A'OC'$ равны, и поэтому стороны OC, OC' совпадают.

QED.

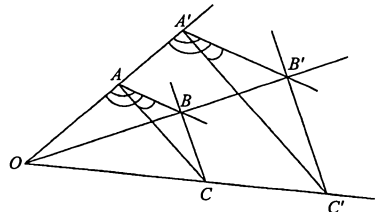


Рис. 5.125

5.081. Доказать, что прямая, соединяющая точки пересечения биссектрис двух внутренних углов треугольника с противоположными сторонами, пересекает третью сторону в той же точке, что и биссектриса внешнего угла при противолежащей вершине.

Решение.

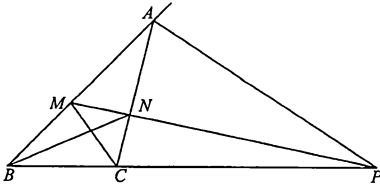


Рис. 5.126

В треугольнике ABC (рис. 5.126) проведены внутренние биссектрисы BN , CM и внешняя биссектриса AP . Требуется доказать, что точки M , N , P лежат на одной прямой. Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Точки M , N делят стороны BA , CA внутренним образом в отношениях $\frac{BM}{AM} = \frac{a}{b}$, $\frac{CN}{AN} = \frac{a}{c}$. По теореме Менелая (см. задачу 5.169), точка пересечения P' прямой MN с основанием BC делит его внешним образом в отношении $\frac{BP'}{CP'} = \frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, но в том же

отношении $\frac{BP}{CP} = \frac{c}{b}$ делит его и точка P , и тоже внешним образом. Отсюда заключаем, что точки P , P' совпадают, так что точка P лежит на прямой MN . При доказательстве мы воспользовались тем, что две несовпадающие точки P , P' не могли бы делить отрезок AC внешним образом в одном и том же отношении. Предоставляем доказательство этого утверждения читателю. **QED.**

5.082. Доказать, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолженных боковых сторон трапеции, делит основания пополам.

Решение.

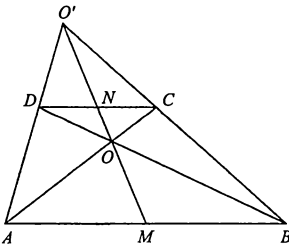


Рис. 5.127

В трапеции $ABCD$ (рис. 5.127) проведена прямая через точки пересечения O , O' диагоналей и боковых сторон соответственно. Требуется доказать, что точки пересечения M , N этой прямой с основаниями есть середины оснований. Применим теорему Чевы (см. задачу 5.170) к треугольнику $O'AB$ и точке O :

$\frac{AM}{BM} = \frac{AO}{O'D} \cdot \frac{BC}{O'C}$. Но из параллельности прямых AB и DC следует:

$\frac{AO}{O'D} = \frac{BC}{O'C}$. Отсюда находим, что $\frac{AM}{BM} = 1$, $AM = BM$. Точно так же, применяя теорему Чевы к треугольнику $O'DC$, получим:

$\frac{DN}{CN} = \frac{DO}{O'A} \cdot \frac{CB}{O'B} = 1$, $DN = CN$. **QED.**

5.083. Доказать, что расстояние точки окружности от хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями концов хорды от касательной к окружности в этой точке.

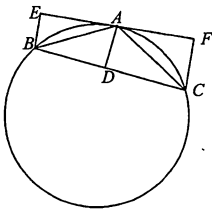


Рис. 5.128

Решение.

Пусть A — данная точка, BC — данная хорда, AD — перпендикуляр к BC , BE и CF — перпендикуляры к касательной EF в точке A (рис. 5.128). Требуется доказать: $\frac{BE}{AD} = \frac{AD}{CF}$.

Прямоугольные треугольники ABD , ACF подобны, так как у них острые углы ABD , CAF измеряются половиной одной и той же дуги AC . Таким же образом докажем, что треугольники ACD , ABE подобные. Далее, четырехугольники $BEAD$, $ADCF$ подобны, так как они сходственным образом составлены из подобных треугольников. Приравни-

вая отношения сходственных сторон, получим: $\frac{BE}{AD} = \frac{AD}{CF}$. **QED.**

5.084. От точки пересечения M двух прямых отложены на одной прямой отрезки MA_1, MB_1 , на другой — отрезки MA_2, MB_2 , связанные соотношением $MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2$, и притом на обеих прямых в одну сторону или на обеих прямых в разные стороны от точки M . Доказать, что точки A_1, B_1, A_2, B_2 лежат на одной окружности.

Решение.

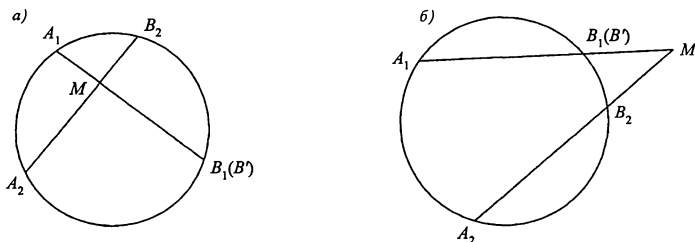


Рис. 5.129

На рис. 5.129 изображены два возможных случая расположения точек M, A_1, B_1, A_2, B_2 . В первом случае (рис. 5.129, а) точки A_1, B_1 и A_2, B_2 расположены по разные стороны от точки M , во втором случае (рис. 5.129, б) — по одну сторону. В обоих случаях проведем окружность через точки A_1, A_2, B_2 и обозначим как B' точку пересечения ее с прямой MA_1 . По теореме об отрезках хорд или секущих получим в обоих случаях: $MA_1 \cdot MB' = MA_2 \cdot MB_2$. Сравнивая это отношение с предложенным в условии $MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2$, заключаем, что $MB' = MB_1$. Теперь рассмотрим каждый случай в отдельности. В первом случае точка M лежит на самой хорде A_2B_2 и, следовательно, внутри круга. Поэтому направление отрезка MB' обратно направлению отрезка MA_1 . Таково же по условию и направление отрезка MB_1 . Так как отрезки MB', MB_1 равны и отложены в одну сторону от точки M , то их концы B', B_1 совпадают и, следовательно, точки A_1, B_1, A_2, B_2 лежат на одной окружности. Рассмотрение второго случая предоставляем читателю. Заметим только, что в этом случае точки A_1, B_1 могут и совпадать. Тогда секущая MA_1 обратится в касательную. **QED.**

5.085. Доказать, что общие хорды трех попарно пересекающихся окружностей пересекаются в одной точке или параллельны.

Решение.

Пусть общие хорды A_1B_1, A_2B_2 кругов O_1, O_2 пересекаются с кругом O в точке M (рис. 5.130). Мы не предполагаем обязательно, что точка M принадлежит самим хордам, она может лежать и на их пересечениях; частный случай, когда она совпадает с их концами, мы пока не будем рассматривать. Если точка M лежит внутри круга O , то она лежит на самих хордах A_1B_1, A_2B_2 и, следовательно, лежит и внутри кругов O_1, O_2 . Если же точка M лежит вне круга O , то она лежит на продолжениях хорд A_1B_1, A_2B_2 и, следовательно, лежит вне кругов O_1, O_2 . Применяя в первом случае теорему об отрезках секущих, получим в обоих случаях: $MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = k$.

Обозначив через A одну из точек пересечения окружностей O_1, O_2 , проведем прямую MA и отложим на ней отрезок MB , равный $k:MA$, так что $MA \cdot MB = k$, причем в первом случае отложим его от точки M в направлении, обратном направлению отрезка MA , а во втором случае — в направлении отрезка MA . На основании равенства $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1$ и одинаковости расположения точек A, B и A_1, B_1 по отношению к точке M заключаем по задаче 5.084, что точка B лежит на окружности, проходящей через точки A, A_1, B_1 , т.е. лежит на окружности O_1 . Так же докажем, что точка B лежит на окружности O_2 . Следовательно, точка B есть общая точка окружностей O_1, O_2 и, значит, AB — их общая хорда. Мы видим, что общие хорды AB, A_1B_1, A_2B_2 окружностей O, O_1, O_2 пересекаются в одной точке M . Если теперь хорды A_1B_1, A_2B_2 параллельны, то диаметр круга O , перпендикулярный к ним, есть также диаметр кругов O_1, O_2 и, следовательно, перпендику-

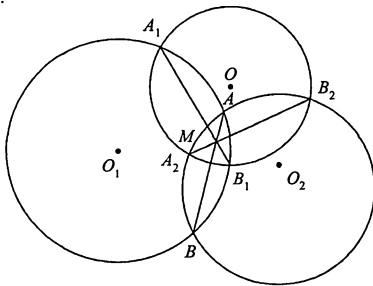


Рис. 5.130

лярен и к хорде AB . Следовательно, хорды AB, A_1B_1, A_2B_2 параллельны. В случае, который мы вначале оставили в стороне, когда точка M лежит на окружности круга O , она лежит также на окружностях кругов O_1, O_2 , так что она будет общим концом хорд AB, A_1B_1, A_2B_2 , которые, таким образом, и в этом случае сходятся в одной точке. **QED.**

5.086. Доказать, что общие хорды всех окружностей, проходящих через две данные точки, с данным кругом пересекаются в одной точке или параллельны.

Решение.

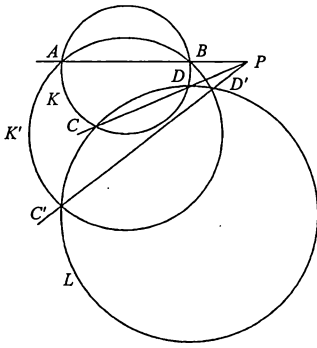


Рис. 5.131

Пусть круги K, K' , проходящие через точки A, B , пересекают круг L (рис. 5.131). Обозначим общую хорду кругов K, L через CD и один из концов общей хорды кругов K', L через C' . Рассмотрим в решении задачи 5.085 все возможные случаи, мы ограничимся теперь одним случаем, когда хорда CD пересекает прямую AB и точка пересечения P лежит вне круга K . По теореме об отрезках секущих имеем: $PA \cdot PB = PC \cdot PD = k$.

Отложим на прямой PC по направлению PC отрезок PD' , равный $\frac{k}{PC}$, так что $PD' \cdot PC = k$. Так как $PA \cdot PB = PC \cdot PD'$, и точки A, B и C, D' расположены по одну сторону от точки P , то по задаче 5.084 точка D' лежит на окружности, проходящей через точки A, B, C , т.е. на окружности K' . Также убедимся, что точка D' лежит на окружности L . Таким образом, точка D' есть общая точка окружностей K', L и, следовательно, $C'D'$ — их общая хорда. Мы видим, что хорды $CD, C'D'$ пересекают прямую AB в одной и той же точке P . Заметим, что утверждение задачи остается верным и в том случае, когда общая секущая $C'D'$ кругов K', L обращается в их общую касательную. **QED.**

5.087. Доказать, что касательные к двум пересекающимся окружностям из всякой точки продолжения их общей хорды равны между собой.

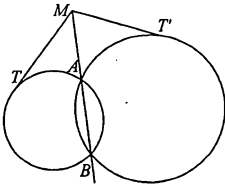


Рис. 5.132

Решение.

По известной теореме $MT^2 = MA \cdot MB$, $MT'^2 = MA \cdot MB$ (рис. 5.132). Отсюда имеем: $MT = MT'$. **QED.**

5.088. Из точки на окружности проведены полупрямые, пересекающие прямую, перпендикулярную к диаметру, проходящую через эту точку. Доказать, что произведение отрезков, отсекаемых окружностью и прямой от всякой полупрямой, есть величина постоянная.

Решение.

Дана окружность K , точка A на ней и прямая CD , перпендикулярная к диаметру AB (рис. 5.133). Требуется доказать, что для всех прямых, проходящих через точку A и пересекающих прямую CD , произведение отрезков AB', AC' , отсекаемых на них окружностью и прямой, имеет одно и то же значение. Пусть C не совпадает с A . В $\triangle ABB'$ угол B' прямой, так как он вписанный и опирается на диаметр. Прямоугольные треугольники ABB', ACC' подобны, так как у них острый угол A

общий. Следовательно, $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC}{AC'}$, откуда получаем: $AB' \cdot AC' = AB \cdot AC$, что и доказывает утверждение задачи в рассматриваемом случае. Если же C совпадает с A , то утверждение вытекает из того, что $AC' = 0$, следовательно, и $AB' \cdot AC'$ всегда нуль. QED.

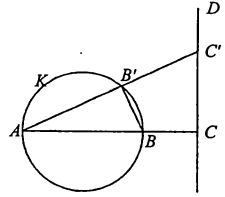


Рис. 5.133

5.089. Из центра подобия двух окружностей проведены секущие к ним. Доказать, что произведение отрезков всякой секущей от центра подобия до двух несходственных точек окружностей есть величина постоянная.

Решение.

Из центра подобия S окружностей K, K' проведены две секущие (рис. 5.134). Выберем на этих секущих две точки A, B окружности K и найдем на них же сходственные точки A', B' и несходственные точки A_1, B_1 окружности K' . Требуется доказать, что $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1$. Так как точки A', B' сходственны с точками A, B , то прямая $A'B'$ параллельна прямой AB и, следовательно, $\angle A'B'S = \angle ABS$. С другой стороны, $\angle A'B'S = \angle B_1A_1S$, так как оба угла вписаны в круг K' и опираются на одну и ту же дугу $A'B_1$. Следовательно, углы ABS, B_1A_1S равны между собой. Эти углы принадлежат треугольникам ABS, B_1A_1S , которые сверх того имеют общий угол S . По двум углам треугольники ABS, B_1A_1S подобны. Откуда находим:

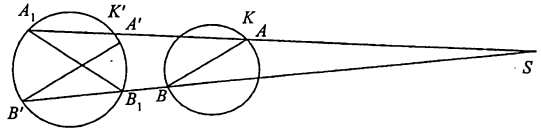


Рис. 5.134

$\frac{SA}{SB} = \frac{SB_1}{SA_1}$ или $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1$. На рис. 5.134 S — центр прямого подобия, но сходными рассуждениями утверждение задачи доказывается и для центра обратного подобия. QED.

5.090. Трапеция разбита диагоналями на четыре части. Доказать, что части, прилегающие к боковым сторонам, равновелики.

Решение.

Треугольники ADC, BDC (рис. 5.135) равновелики, так как у них основание DC общее и вершины A, B лежат на прямой, параллельной основанию CD . Если отрезем от треугольников ADC, BDC по треугольнику ODC , то оставшиеся треугольники OBC, ODA также должны быть равновеликими. QED.

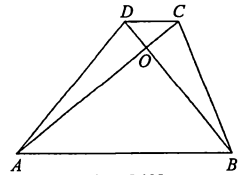


Рис. 5.135

5.091. Параллелограмм разбит на четыре части прямыми, проведенными через какую-нибудь точку диагонали параллельно сторонам. Доказать, что части, расположенные по разные стороны от диагонали, равновелики.

Решение.

Имеем (рис. 5.136): $S_{MDBE} = S_{ABC} - S_{ADM} - S_{MEC}$, $S_{MD'FE} = S_{A'B'C'} - S_{A'D'M} - S_{M'E'C'}$. Правые части этих равенств равны почленно, следовательно, и левые части равны: $S_{MDBE} = S_{MD'FE}$. QED.

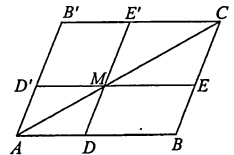


Рис. 5.136

5.092. Параллелограмм разбит на четыре части прямыми, соединяющими какую-нибудь внутреннюю точку с вершинами. Доказать, что суммы площадей противоположных частей равны.

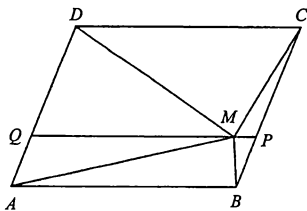


Рис. 5.137

Решение.

Требуется доказать, что $S_{MAB} + S_{MCD} = S_{MBC} + S_{MAD}$ (рис. 5.137), т.е., что эти суммы равны $\frac{1}{2} S_{ABCD}$. Проведем PMQ параллельно AB и CD . Имеем сле-

дующие соотношения: $S_{MAB} = \frac{1}{2} S_{ABPQ}$, $S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{CDQP}$. Складывая по-

членно, получим: $S_{MAB} + S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

QED.

5.093. Через середину каждой диагонали четырехугольника проведена прямая параллельно другой диагонали. Доказать, что прямые, соединяющие точку пересечения этих прямых с серединами сторон четырехугольника, разбивают его на равновеликие части.

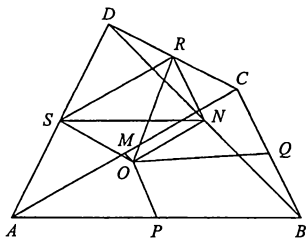


Рис. 5.138

Решение.

Через середины M, N диагоналей AC, BD проведены параллельные к диагоналям BD, AC до пересечения в точке O , и точка O соединена с серединами P, Q, R, S сторон AB, BC, CD, DA (рис. 5.138). Требуется доказать, что площади $OSAP, OPBQ, OQCR$ и $ORDS$ равны между собой, т.е. каждая из них равна четверти площади $ABCD$. Рассмотрим для примера четырехугольник $ORDS$. Площадь этого четырехугольника не изменится от перенесения вершины O в точку N . В самом деле, прямые ON, SR параллельны между собой, так как обе параллельны прямой AC , первая — согласно условию, а вторая — как средняя линия треугольника ACD . При перенесении вершины O в точку N треугольник SOR заменится равновеликим треугольником SNR , и тем самым четырехугольник $SORD$ заменится равновеликим четырехугольником $SNRD$. Но четырехугольник $SNRD$ подобен четырех-

угольнику $ABCD$ и имеет вдвое меньшие линейные размеры, так что площадь его вчетверо меньше. Следовательно, и площадь четырехугольника $SORD$ составляет четверть площади четырехугольника $ABCD$.

QED.

5.094. Доказать, что высота треугольника есть геометрическое место точек, для которых сумма квадратов расстояния от конца основания с квадратом противоположной этому концу стороны имеет равные значения для обоих концов основания.

Решение.

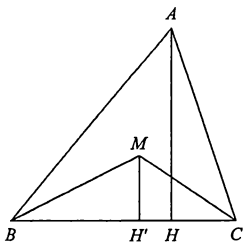


Рис. 5.139

Требуется доказать, что для всех точек M высоты AH треугольника ABC (рис. 5.139) имеет место соотношение $MB^2 + AC^2 = MC^2 + AB^2$ и что это соотношение не имеет места ни для каких других точек. Вместо этого соотношения мы будем рассматривать следующее, равносильное ему: $MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2$.

Пусть M — какая угодно точка, и H' — основание перпендикуляра из этой точки на сторону BC . Имеем: $MB^2 - MC^2 = (BH'^2 + H'M^2) - (CH'^2 + H'M^2) = BH'^2 - CH'^2$, $AB^2 - AC^2 = (BH^2 + HA^2) - (CH^2 + HA^2) = BH^2 - CH^2$. Отсюда видно, что соотношение $MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2$ равносильно соотношению $BH'^2 - CH'^2 = BH^2 - CH^2$, а последнее, как нетрудно убедиться, имеет место тогда и только тогда, когда точка H' совпадает с точкой H , т.е. когда точка M лежит на высоте AH . Итак, мы доказали, что высота AH есть геометрическое место точек M , для которых $MB^2 + AC^2 = MC^2 + AB^2$.

QED.

5.095. Доказать, что сумма квадрата расстояния ортоцентра от вершины с квадратом противоположной стороны равна квадрату диаметра описанного круга.

Решение.

Пусть D — ортоцентр треугольника ABC и COE — диаметр описанного круга (рис. 5.140). Четырехугольник $ADBE$ есть параллелограмм, так как стороны AD, BE перпендикулярны к прямой BC и, следовательно, параллельны, а стороны BD, AE перпендикулярны к прямой AC и, следовательно, также параллельны. Отсюда заключаем, что $AD = BE$, после чего находим: $AD^2 + BC^2 = BE^2 + BC^2 = CE^2$, или $AD^2 + BC^2 = 4R^2$. То же самое можно получить из решения задачи 5.069: $OM^2 + MC^2 = OC^2$,

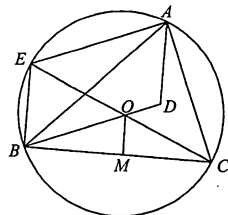


Рис. 5.140

QED.

5.096. Доказать, что невозможно сложить паркет из правильных десятиугольников и пятиугольников.

Решение.

Угол десятиугольника равен $\frac{4\pi}{5}$, а угол пятиугольника — $\frac{3\pi}{5}$. Если в одной точке сходится x десятиугольников и y

пятиугольников, то должно иметь место уравнение $\frac{4\pi}{5}x + \frac{3\pi}{5}y = 2\pi$, или $4x + 3y = 10$. При этом нужно иметь в виду, что

x, y — числа целые и положительные. Полагая $x = 1, 2, 3, \dots$, найдем из уравнения $y = 2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$. Из этих чисел первое — целое и положительное, второе — дробное и положительное, а все дальнейшие — отрицательные. Таким образом, единственно возможным оказывается предположение $x = 1, y = 2$, т.е. что в каждой точке сходится один десятиугольник и два пятиугольника. Но легко убедиться, что паркет из десятиугольников и пятиугольников все же невозможен. Из двух соседних сторон пятиугольника к одной должен прилегать десятиугольник, а к другой — пятиугольник, потому что в вершине должны соединяться один десятиугольник и два пятиугольника. При обходе пятиугольника мы должны около одной стороны найти десятиугольник, около следующей — пятиугольник, около третьей — десятиугольник, около четвертой — пятиугольник, около пятой — десятиугольник. Но тогда оказалось бы, что к двум соседним сторонам, первой и пятой, прилегают десятиугольники, что невозможно.

QED.

5.097. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC (рис. 5.141) высота $AH = h$, а $BH = m, CH = n$. Пусть $DH = x$, где D — точка пересечения AH с BK (BK — высота). Треугольники BDH, ACH подобны вследствие перпендикулярности сходственных сторон. Отсюда пропорция:

$$\frac{DH}{BH} = \frac{CH}{AH}, \text{ или } \frac{x}{m} = \frac{n}{h}, \text{ откуда } x = \frac{mn}{h}.$$

Полученное выражение для x симметрично по отношению к m, n и не изменилось бы, если бы мы искали вместо отрезка DH , отсекаемого высотой BK , отрезок $D'H$, отсекаемый высотой CL . Отсюда видно, что отрезки $DH, D'H$ равны. Нетрудно также проверить, что они во всех случаях расположены по одну сторону от точки H . Следовательно, точки D, D' совпадают. Таким образом, высоты BK, CL пересекают высоту AH в одной и той же точке $D(D')$, т.е. все три высоты пересекаются в одной точке.

QED.

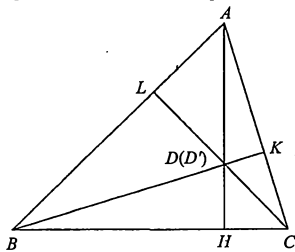


Рис. 5.141

5.098. Доказать, что сумма произведений высот остроугольного треугольника на отрезки их от ортоцентра до вершин равна полусумме квадратов сторон. Обобщить на случай тупоугольного треугольника.

Решение.

В обозначениях задачи 5.097 требуется доказать: $AH \cdot AD + BK \cdot BD + CL \cdot CD = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$. Пользуясь тем, что четырехугольники $ALDK$, $BLDH$ можно вписать, найдем по теореме о произведении секущей на внешний отрезок $AH \cdot AD = AB \cdot AL$, $BK \cdot BD = AB \cdot BL$. Складывая почленно, получим: $AH \cdot AD + BK \cdot BD = AB \cdot AL + AB \cdot BL = AB(AL + BL) = AB \cdot AC$. Аналогично найдем, что $AH \cdot AD + CL \cdot CD = AC^2$, $BK \cdot BD + CL \cdot CD = BC^2$. Складывая почленно и деля пополам, находим:

$$AH \cdot AD + BK \cdot BD + CL \cdot CD = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Если угол C тупой, то мы получим $AH \cdot AD + BK \cdot BD - CL \cdot CD = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

QED.

5.099. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон с удвоенным произведением оснований.

Решение.

Складывая выражения для m^2 и n^2 , выведенные в решении задачи 5.197, найдем:

$$m^2 + n^2 = 2ab + \frac{c^2a + d^2a - c^2b - d^2b}{a-b} = 2ab + \frac{(c^2 + d^2)(a-b)}{a-b} = c^2 + d^2 + 2ab.$$

QED.

5.100. Треугольники ABC , $A_1B_1C_1$ расположены так, что пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой. Доказать, что прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке или параллельны (теорема Дезарга).

Решение.

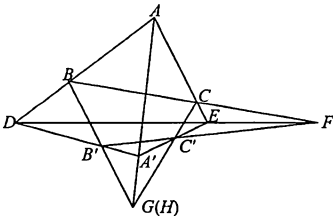


Рис. 5.142

Треугольники ABC , $A_1B_1C_1$ расположены так, что точки пересечения D , E , F соответственных сторон лежат на одной прямой (рис. 5.142). Требуется доказать, что соединительные прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 соответствующих вершин пересекаются в одной точке или параллельны. Выясним сначала расположение частей фигуры. Выберем обозначения так, чтобы точка F лежала на продолжении отрезка DE , что всегда возможно сделать. Рассматривая треугольники ADE , $A'D'E'$ с пересекающимися FCB , $FC'B'$, убеждаемся на основании замечания, сделанного в конце решения задачи 5.169, что точки B , C должны одновременно лежать на отрезках AD , AE или на их продолжениях, и точно так же точки B' , C' должны одновременно лежать на отрезках $A'D'$, $A'E'$ или на их продолжениях.

Переходя к треугольникам ADA' , EAA' , заключаем, что точки B , B' расположены относительно отрезков DA , DA' так же, как точки C , C' расположены относительно отрезков EA , EA' . На основании того же замечания из решения задачи 5.169 мы вправе сделать вывод, что прямые BB' , CC' или обе пересекают отрезок AA' , или обе не пересекают его. Теперь перейдем к количественным соотношениям частей фигуры, рассматривая те же треугольники в том же порядке. Обозначим для краткости:

$$\frac{DF}{EF} = p, \quad \frac{DB}{AB} = m, \quad \frac{EC}{AC} = n, \quad \frac{DB'}{A'B'} = m', \quad \frac{EC'}{A'C'} = n'.$$

По теореме Менелая (см. задачу 5.169) находим из треугольника ADE с пересекающей FCB и из треугольника $A'DE$ с пересекающей $FC'B'$, что $p = \frac{m}{n}$, $p = \frac{m'}{n'}$; отсюда $m = np$, $m' = n'p$.

Если прямая CC' параллельна прямой AA' , то она делит отрезки EA , EA' одинаковым образом и в равных отношениях n , n' . Тогда прямая BB' делит отрезки DA , DA' также одинаковым образом и также в равных отношениях p , p' . Поэтому прямая BB' также параллельна прямой AA' . Таким же образом можно доказать, что из параллельности прямой BB' и прямой AA' вытекает параллельность прямой CC' и прямой AA' . Следовательно, прямые BB' , CC' или обе параллельны прямой AA' , или обе пересекают ее. Остается доказать, что в последнем случае точки пересечения совпадают. Обозначим точки пересечения прямых BB' , CC' с прямой AA' через G , H . Применяя теорему Менелая к треугольнику $DA'A'$ с пересекающей BB' и к треугольнику CAA' с пересекающей CC' , находим: $\frac{AG}{A'G} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}$, $\frac{AH}{A'H} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n'} = \frac{n'}{n}$, откуда $\frac{AG}{A'G} = \frac{AH}{A'H}$.

Таким образом, точки G , H делят отрезок AA' в одинаковых отношениях, а по доказанному и одинаковым образом. Следовательно, точки G , H совпадают. **QED.**

ТЕМА: ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

5.101. На прямой даны два отрезка $OA = a$, $OB = b$ ($a < b$). Определить расстояние AB и расстояние между точкой O и серединой M отрезка AB .

Решение.

Точки A , B могут лежать по одну сторону или по разные стороны от точки O (рис. 5.143).

Если $a < b$, то в первом случае $AB = OB - OA = b - a$, $OM = OB - MB = b - \frac{1}{2}(b - a) =$

$= \frac{1}{2}(b + a)$, а во втором случае $AB = OB + OA = b + a$, $OM = OB - MB = b - \frac{1}{2}(b - a) =$

$= \frac{1}{2}(b + a)$.

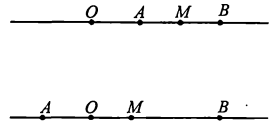


Рис. 5.143

Ответ: $AB = b \mp a$, $OM = \frac{1}{2}(a + b)$.

5.102. Углы $MON = \alpha$, $NOP = \beta$ приложены друг к другу. Определить угол между их биссектрисами. Применить результат к случаю, когда эти углы смежные.

Решение.

Из рис. 5.144 видно, что искомый угол равен $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, или $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Если углы MON и NOP смежные, то $\alpha + \beta = 180^\circ$ и, следовательно,

$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ$. Таким образом, биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; 90° .

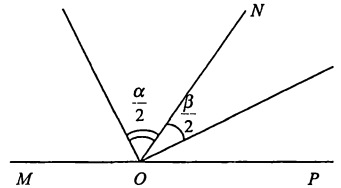


Рис. 5.144

5.103. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его внутренних углов вместе с одним из внешних равна $23\frac{\pi}{2}$.

Решение.

Величина любого внешнего угла выпуклого многоугольника заключена между 0 и π , поэтому сумма внутренних углов данного многоугольника, равная $\pi(n-2)$, заключена между $23\frac{\pi}{2} - \pi = 21\frac{\pi}{2}$ и $23\frac{\pi}{2}$. Решая неравенство $21\frac{\pi}{2} < \pi(n-2) < 23\frac{\pi}{2}$, находим $12,5 < n < 13,5$. Число сторон многоугольника $n \in \mathbb{N}$, поэтому $n = 13$.

Ответ: 13.

5.104. Углы $MON = \alpha$, $NOP = \beta$, $POQ = \gamma$ приложены друг к другу. Определить угол между биссектрисами углов MON , POQ . Применить результат к случаю, когда углы MON , POQ вертикальные.

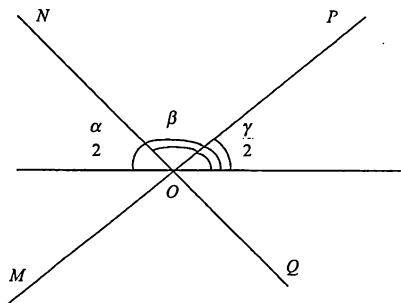


Рис. 5.145

Решение.

Из рис. 5.145 видно, что искомый угол равен $\frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma$, если рассматривать углы, большие 180° . Если углы MON , POQ вертикальные, то $\gamma = \alpha$, и искомый угол будет равен $\frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\alpha = \alpha + \beta$. Но $\alpha + \beta = 180^\circ$, так как углы MON , NOP в этом случае смежные. Следовательно, биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга.

Ответ: $\frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma$; 180° .

5.105. Можно ли разрезать разносторонний треугольник на два равных треугольника?

Решение.

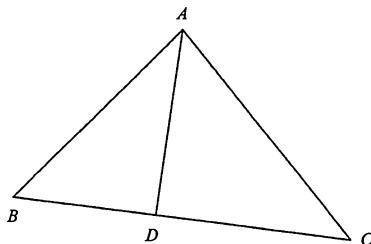


Рис. 5.146

Допустим, это треугольник ABC разрезан на два равных треугольника ABD и ADC (рис. 5.146). Тогда угол ADB треугольника ABD должен быть равен одному из углов треугольника ADC . Но он не может быть равен углам DAC , ACD , так как внешний угол треугольника всегда больше внутренних, с ним не смежных. Поэтому он должен быть равен смежному углу ADC . Но тогда противолежащие стороны AB , AC были бы равны, что противоречит условию, в котором треугольник ABC предположен разносторонним.

Ответ: нет.

5.106. Стороны треугольника равны 2; 1,6 и 0,8 дм. Найти сторону подобного ему треугольника, периметр которого равен 5,5 дм.

Решение.

Периметр данного треугольника равен $2 + 1,6 + 0,8 = 4,4$ (дм), а периметр подобного ему треугольника равен 5,5 (дм);

отсюда коэффициент подобия $k = \frac{5,5}{4,4} = \frac{5}{4}$. Далее вычислим стороны подобного треугольника: $a = 2 \cdot \frac{5}{4} = 2,5$ (дм),

$b = 1,6 \cdot \frac{5}{4} = 2$ (дм), $c = 0,8 \cdot \frac{5}{4} = 1$ (дм).

Ответ: 2,5; 2; 1 дм.

5.107. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Если $AB > AC$, то, который из углов AMB или AMC больше и который из углов BAM или CAM больше?

Решение.

В треугольниках AMB , AMC (рис. 5.147) стороны AM , MB соответственно равны сторонам AM , MC , но сторона AB больше стороны AC . Следовательно, угол AMB больше угла AMC . Чтобы сравнить углы BAM , CAM , продолжим медиану AM на отрезок MD , равный AM , и соединим точки C и D . Треугольники AMB , DMC будут равны, причем $AB = DC$ и $\angle BAM = \angle CDM$. Таким образом, условие $AB > AC$ заменяется условием $DC > AC$ и вместо углов BAM , CAM нужно будет сравнить углы CDM , CAM . В треугольнике ACD против большей из сторон DC , AC лежит больший из углов CDM , CAM . Следовательно, угол CAM больше угла CDM . Мы видим, таким образом, что из двух углов AMB , AMC больше тот, который обращен к большей из боковых сторон, а из двух углов BAM , CAM больше тот, который прилегает к меньшей из боковых сторон треугольника.

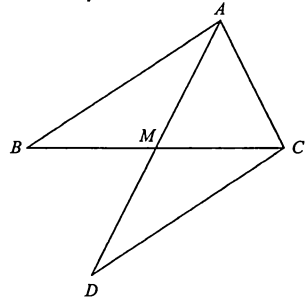


Рис. 5.147

Ответ: $\angle AMB$; $\angle CAM$.

5.108. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Если $AD > AC$, то, который из углов ADB , ADC больше и который из отрезков BD , CD больше?

Решение.

Отложим на стороне AB отрезок AE , равный AC , и соединим точки D , E (рис. 5.148). Треугольник ADE будет равен треугольнику ADC , причем $\angle ADE = \angle ADC$ и $ED = CD$. Мы можем поэтому сравнивать вместо углов ADB , ADC углы ADB , ADE и вместо отрезков BD , CD — отрезки BD , ED . Так как по условию $AB > AC$, то точка E лежит между точками A , B и угол ADE есть часть угла ADB ; следовательно, $\angle ADB > \angle ADE$. Чтобы сравнить отрезки BD , ED , нужно сравнить противолежащие углы BED , EBD треугольника BDE . Но угол BED равен внешнему углу BCF треугольника ABC , так как эти углы смежные с равными углами треугольников ADE , ADC , а угол BCF больше внутреннего не смежного с ним угла EBD треугольника ABC . Следовательно, угол BED больше угла EBD , и вместе с тем $BD > ED$. Итак, из двух углов ADB , ADC и из двух отрезков BD , CD больше тот, который обращен к большей из боковых сторон.

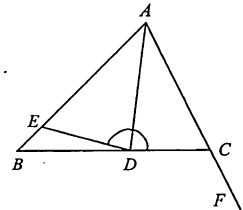


Рис. 5.148

Ответ: $\angle ADB$; BD .

5.109. В треугольник, у которого основание равно 30 см, а высота 10 см, вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на этом основании. Определить гипотенузу.

Решение.

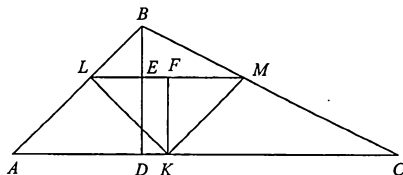


Рис. 5.149

Треугольник KLM , вписанный в треугольник ABC , прямоугольный и равнобедренный; его высота KF является биссектрисой. $\angle FKL = \angle KLF = 45^\circ$ (рис. 5.149). Следовательно, треугольник KLF равнобедренный и $FK = LF$. Пусть $FK = x$, тогда $LM = 2x$, $BE = BD - ED = 10 - x$. Кроме того, треугольники LBM , ABC подобны (так как соответствующие углы равны), поэтому $\frac{BE}{BD} = \frac{LM}{AC}$, т. е. $\frac{10 - x}{10} = \frac{2x}{30} \Leftrightarrow x = 6$ (см), и $LM = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

5.110. По основаниям a, b трапеции ($a > b$) определить отрезок, соединяющий середины ее диагоналей.

Решение.

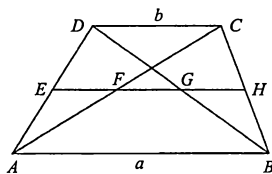


Рис. 5.150

В трапеции $ABCD$ (рис. 5.150) $AB = a$, $CD = b$; F и G — середины диагоналей AC и BD соответственно, а E и H — середины боковых сторон AD и BC соответственно. По теореме о средней линии для треугольников ABD , ACD запишем:

$$EG = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a, EF = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} b. \text{ Вычитая почленно, получаем } FG = \frac{1}{2} (a - b).$$

Таким образом, отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности ее оснований.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} (a - b).$$

5.111. По данным расстояниям концов отрезка от прямой определить расстояние его середины от той же прямой.

Решение.

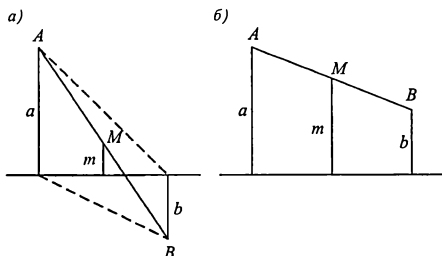


Рис. 5.151

Обозначим расстояния концов A, B и середины M данного отрезка от данной прямой через a, b, m (рис. 5.151, а). Если точки A, B лежат по одну сторону от данной прямой (рис. 5.151, а), то по теореме о средней линии трапеции найдем: $m = \frac{1}{2} (a + b)$. Если же точки A, B лежат по

разные стороны от данной прямой (см. рис. 5.151, а), то по решению задачи 5.110 находим: $m = \frac{1}{2} (a - b)$, если

$$a > b \text{ или } m = \frac{1}{2} (b - a), \text{ если } b > a.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} (a + b); \frac{1}{2} (a - b) (a > b), \frac{1}{2} (b - a) (b > a).$$

5.112. Расстояние точки внутри круга радиуса r от его центра равно d . Определить длину хорды, проведенной через эту точку перпендикулярно к диаметру, проходящему через нее.

Решение.

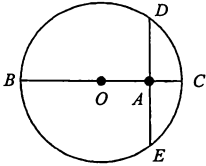


Рис. 5.152

Пусть A — данная точка, O — центр данного круга, $BOAC$ — диаметр этого круга, проведенный через точку A , DAE — хорда того же круга, перпендикулярная к этому диаметру в точке A (рис. 5.152). По свойству отрезков хорд будем иметь

$$AD \cdot AE = AB \cdot AC = (OB + OA)(OC - OA), \text{ или } \left(\frac{1}{2}DE\right)^2 = (r + d)(r - d), \text{ откуда}$$

$$DE = 2\sqrt{r^2 - d^2}.$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{r^2 - d^2}.$$

5.113. По данным расстояниям двух противоположных вершин параллелограмма от прямой, проходящей через третью вершину, определить расстояние четвертой вершины от той же прямой.

Решение.

Обозначим расстояние вершин B, C, D и точки пересечения M диагоналей параллелограмма $ABCD$ от прямой, проходящей через вершину A , соответственно через b, c, d, m (рис. 5.153). По теореме о средней линии треугольника $m = \frac{1}{2}c$. Но это же расстояние можно определить и по решению задачи 5.111 для отрезка BD . Если данная прямая не пересекает отрезка BD , то $m = \frac{1}{2}(b + d)$. Если же данная

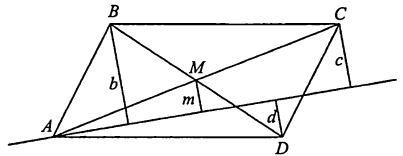


Рис. 5.153

прямая пересекает отрезок BD , то, смотря по тому, будет ли она ближе к B или к D , получим: $m = \frac{1}{2}(b - d)$, или

$m = \frac{1}{2}(d - b)$. Приравнявая выражения для m , полученные двумя способами, найдем в зависимости от случая: $c = b + d$,

или $c = b - d$, или $c = d - b$.

Ответ: $b + d$, или $b - d$, или $d - b$.

5.114. Через середину хорды a круга проведена другая хорда длины b . Определить длины отрезков, на которые хорда b делится хордой a .

Решение.

Обозначив искомые отрезки через x, y , имеем $x + y = b$, $xy = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Отсюда видно, что x, y есть корни квадратного

уравнения $z^2 - bz + \frac{a^2}{4} = 0$, т.е. равны $\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - a^2}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - a^2})$.

5.115. Радиусы двух кругов равны R и r , а расстояние между их центрами равно d . Определить длину общей внешней и общей внутренней касательной.

Решение.

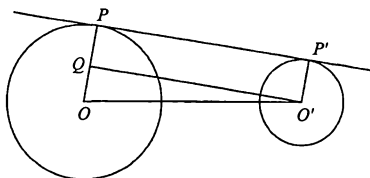


Рис. 5.154

Проведем $O'Q$ параллельно $P'P$ (рис. 5.154). В прямоугольном треугольнике OQO' имеем: $OO' = d$, $OQ = OP - QP = OP - O'P' = R - r$, $O'Q = P'P = x$. По теореме Пифагора находим $x = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}$. Для длины общей внутренней касательной таким же образом найдем выражение: $\sqrt{d^2 - (R + r)^2}$.

Ответ: $\sqrt{d^2 - (R - r)^2}$, $\sqrt{d^2 - (R + r)^2}$.

5.116. Определить длину общей касательной двух внешне касающихся кругов радиусами R и r .

Решение.

Искомую длину найдем по формуле решения задачи 5.115, полагая в ней $d = R + r$, $x = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}$.

Ответ: $2\sqrt{Rr}$.

5.117. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна к медиане BN . Найти площадь треугольника ABC , если $AM = m$, $BN = n$.

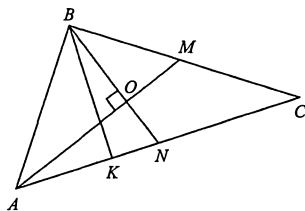


Рис. 5.155

Решение.

Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC и BK перпендикулярен AC (рис. 5.155). Площадь треугольника ABC найдем по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 2AN \cdot BK = 2S_{ABN}.$$

Так как $S_{ABN} = \frac{1}{2} BN \cdot AO = \frac{1}{2} BN \cdot \frac{2}{3} AM = \frac{1}{3} mn$, то $S_{ABC} = \frac{2}{3} mn$.

Ответ: $\frac{2}{3} mn$.

5.118. По катетам b , c прямоугольного треугольника определить высоту h из вершины прямого угла.

Решение.

Из рис. 5.156 имеем: $h^2 = b'c'$, $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$, $b^2 + c^2 = a^2$. Отсюда находим:

$$h = \sqrt{b'c'} = \sqrt{\frac{b^2}{a} \cdot \frac{c^2}{a}} = \frac{bc}{a} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Ответ: $\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

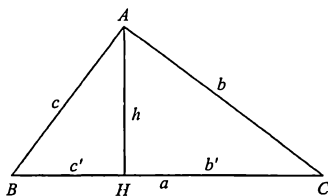


Рис. 5.156

5.119. Пусть длины всех трех сторон прямоугольного треугольника выражаются в целых числах. Могут ли длины обоих катетов быть нечетными числами?

Решение.

Пусть длины катетов — нечетные числа, равные $2k+1$ и $2l+1$. Сумма их квадратов равна $(2k+1)^2 + (2l+1)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2 = 4m + 2$. Покажем, что число вида $4m + 2$ не может быть квадратом целого числа. Если число нечетное, то его квадрат нечетен, а $4m + 2$ — четное. Если число четное, то его квадрат делится на 4, а $4m + 2$ не делится на 4. Таким образом, получили противоречие, которое доказывает неправильность исходного предположения, что длины катетов — нечетные числа.

Ответ: нет.

5.120. Расстояние точки вне круга радиусом r от его центра равно d . Определить длину касательной к кругу из этой точки.

Решение.

Пусть A — данная точка, O — центр данного круга, $BOCA$ — диаметр, проходящий через точку A , AT — касательная из точки A (рис. 5.157). По свойству отрезков секущей имеем:

$$AT^2 = AB \cdot AC = (OA + OB)(OA - OC),$$

или $AT^2 = (d+r)(d-r)$, откуда получаем, что $AT = \sqrt{d^2 - r^2}$.

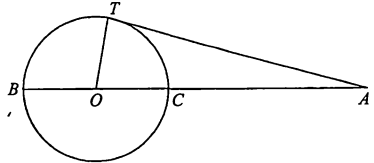


Рис. 5.157

Ответ: $\sqrt{d^2 - r^2}$.

5.121. Разрезать данный треугольник на три части, из которых можно было бы сложить прямоугольник.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC (рис. 5.158) сторона BC больше или по крайней мере не меньше сторон AB, AC . Тогда углы B, C острые, так как в противном случае одна из сторон AB, AC была бы больше стороны BC . Опустим из середин M, N сторон AB, AC перпендикуляры MP, NQ на сторону BC . В треугольнике MBC углы при стороне BC острые, так как один из них равен углу B , а другой есть часть угла C . Следовательно, точка P лежит на самой стороне BC . По тем же причинам и точка Q лежит на стороне BC . Таким образом, отрезки MP, NQ разрезают треугольник ABC на пятиугольник $AMPQN$ и треугольники MBP, NCQ . Повернув эти треугольники в надлежащих направлениях на сто восемьдесят градусов вокруг вершин M, N , сложим из них и пятиугольника прямоугольник $PQ'Q'P'$.

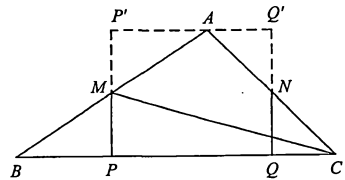


Рис. 5.158

5.122. Какую верхнюю границу для числа π даст рассмотрение правильного описанного шестиугольника?

Решение.

Имеем $2\pi R < 6a$, где a — сторона шестиугольника, которая равна $R\sqrt{\frac{4}{3}}$ (см. задачу 5.211). Полагая $R = 1$, имеем

$$2\pi < 6\sqrt{\frac{4}{3}} = 2\sqrt{12}, \text{ откуда } \pi < \sqrt{12} = 3,46\dots$$

Ответ: $\sqrt{12}$.

5.123. Существует ли треугольник, у которого длины всех высот меньше 1 см, а площадь больше 100 см²?

Решение.

Рассмотрим равнобедренный треугольник AOD , у которого $AO = OD$, $AD = 20\,000$ см, $AB = 0,1$ см и, следовательно, высота $OF = 0,1$ см < 1 см (рис. 5.159). Покажем, что длина высоты AE треугольника AOD меньше 1 см. Построим прямоугольники $ABGD$ и $ACKD$. Тогда $S_{AOD} = 1000$ см², $S_{COA} = 1000$ см². По теореме Пифагора $OC = \sqrt{10\,000^2 + 0,1^2}$.

Из треугольника COA получаем:

$$S_{COA} = \frac{1}{2} AE \cdot OC, \text{ откуда}$$

$$AE = \frac{2S_{COA}}{OC} < \frac{2000}{10000} = 0,2 \text{ см.}$$

Ответ: существует.

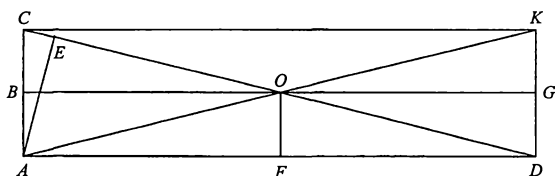


Рис. 5.159

5.124. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Найти биссектрису прямого угла.

Решение.

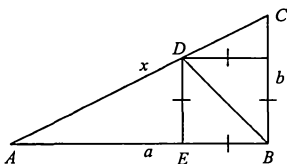


Рис. 5.160

По теореме Пифагора гипотенуза треугольника ABC равна $\sqrt{a^2 + b^2}$. Обозначим один из отрезков, на которые биссектриса делит гипотенузу, например AD , через x , тогда второй отрезок (DC) равен $\sqrt{a^2 + b^2} - x$ (рис. 5.160). По свойству биссектрисы угла треугольника запишем:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - x}{b}, \text{ откуда } bx + ax = a\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}. \text{ Далее, про-}$$

ведем DE параллельно BC . Из подобия треугольников AED и ABC (соответствующие углы равны) получаем пропорцию: $\frac{ED}{AD} = \frac{BC}{AC}$, т.е. $\frac{ED}{\frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, откуда $ED = \frac{ab}{a + b}$. В пря-

моугольном треугольнике BED $\angle EBD = 45^\circ$ и, следовательно, $BD = \frac{ED}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}ab}{a + b}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}ab}{a + b}$.

5.125. Диагонали параллелограмма равны 24 и 28 см, а разность сторон составляет 8 см. Найти стороны параллелограмма.

Решение.

Обозначим стороны параллелограмма через a и b , тогда по условию $a - b = 8$ см. Используя зависимость сторон и диагоналей параллелограмма, получаем второе уравнение: $2(a^2 + b^2) = 24^2 + 28^2$. Решив систему уравнений
$$\begin{cases} a - b = 8, \\ 2(a^2 + b^2) = 1360, \end{cases}$$
 находим $a = 22$ см, $b = 14$ см.

Ответ: 14 и 22 см.

5.126. Найти точку, сумма расстояний которой от вершин данного четырехугольника наименьшая.

Решение.

Искомая точка есть точка пересечения диагоналей. В самом деле, для точки, не лежащей ни на одной из диагоналей, сумма расстояний от двух противоположных вершин больше соединяющей их диагонали, и, следовательно, сумма расстояний от всех вершин больше суммы диагоналей; для точки, лежащей на одной из диагоналей, сумма расстояний от концов этой диагонали равна этой диагонали, но сумма расстояний от концов другой диагонали больше этой диагонали, и, следовательно, сумма расстояний от всех вершин все-таки больше суммы диагоналей; только для точки, лежащей на обеих диагоналях, т.е. для точки пересечения их, сумма расстояний от всех вершин равна сумме диагоналей. Таким образом, для этой точки сумма расстояний от всех вершин действительно наименьшая, и притом только для нее одной.

Ответ: точка пересечения диагоналей.

5.127. Дана полуокружность с центром O . Из каждой точки X , лежащей на продолжении диаметра полуокружности, проведен касящийся полуокружности луч и на нем отложен отрезок XM , равный отрезку XO . Найти множество точек M , полученных таким образом.

Решение.

Пусть K — точка касания прямых XM и данной полуокружности, а P — проекция точки M на диаметр (рис. 5.161). В прямоугольных треугольниках MPX и OKX равны гипотенузы ($XM = OX$) и острые углы ($\angle XMP = \angle OKX$). Поэтому эти треугольники равны и, в частности, $MP = KO = R$, где R — радиус данной полуокружности. Следовательно, точка M лежит на прямой l , параллельной диаметру полуокружности и касающейся полуокружности.

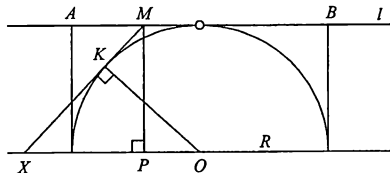


Рис. 5.161

Пусть AB — отрезок прямой l , проекцией которого является диаметр полуокружности. Из точки прямой l , лежащей вне отрезка AB , нельзя провести касательную к данной полуокружности. Также нельзя взять точку на продолжении диаметра полуокружности, чтобы проведенная через нее касательная проходила через середину отрезка AB . Поэтому искомым множеством точек является отрезок AB , из которого удалена его середина.

Ответ: см. рис. 5.161 (отрезок AB без его середины).

5.128. По углу при вершине треугольника определить острый угол между биссектрисами внутренних углов при основании, острый угол между биссектрисами внешних углов при основании и острый угол между биссектрисой внутреннего угла при одном из концов основания и биссектрисой внешнего угла при другом конце.

Решение.

В треугольнике ABC прямые BDE , CD есть биссектрисы внутренних углов при вершинах B , C , а прямые BF , FCE — биссектрисы внешних углов при тех же вершинах. Условимся обозначать углы треугольника ABC просто через A , B , C и

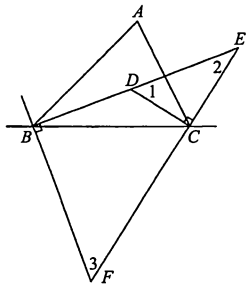


Рис. 5.162

обозначим углы между биссектрисами через 1, 2, 3, как показано на рис. 5.162. По условию задачи необходимо выразить углы 1, 2, 3 через известный угол A . Заметим предварительно, что углы DCE , DBF прямые, так как биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны. В треугольнике BDC внешний угол при вершине D равен сумме внутренних при вершинах B , C , которые в свою очередь равны половинам углов B , C треугольника ABC : $\angle 1 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Так как сумма всех углов треугольника

равна 180° , то сумма их половин равна 90° , и мы можем написать $\angle 1 = 90^\circ - \frac{1}{2}A$. Так как треугольник DCE прямоугольный, то сумма его острых углов равна 90° ; отсюда $\angle 2 = 90^\circ - \angle 1 = \frac{1}{2}A$. Так как треугольник FBE также прямоугольный, то по той же причине $\angle 3 = 90^\circ - \angle 2 = 90^\circ - \frac{1}{2}A$.

Углы 1, 2, 3 острые, как и требует условие задачи. Действительно, угол A меньше 180° и, следовательно, $\frac{1}{2}A = \angle 2$ меньше 90° , а потому и $90^\circ - \frac{1}{2}A = \angle 1 = \angle 3$ меньше 90° .

Ответ: $90^\circ - \frac{1}{2}A$; $\frac{1}{2}A$; $90^\circ - \frac{1}{2}A$.

5.129. В прямоугольном треугольнике катеты равны 75 и 100 см. На отрезках гипотенузы, образуемых высотой, построены полукруги по одну сторону с треугольником. Найти отрезки катетов, заключенные внутри этих полукругов.

Решение.

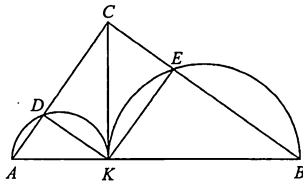


Рис. 5.163

По катетам $AC = 75$ см и $CB = 100$ см, используя теорему Пифагора, найдем гипотенузу $AB = \sqrt{75^2 + 100^2} = 125$ см (рис. 5.163). По теореме о перпендикуляре, проведенном из вершины прямого угла на гипотенузу, получим: $AC^2 = AB \cdot AK$, откуда $AK = \frac{AC^2}{AB}$, т.е. $AK = \frac{75^2}{125} = 45$ см. Значит, $KB = AB - AK = 125 - 45 = 80$ см. Угол ADK прямой, так как опирается на диаметр полукруга. Рассматривая KD как перпендикуляр, проведенный из вершины прямого угла треугольника AKC на гипотенузу, получаем: $AK^2 = AC \cdot AD$ или $45^2 = 75 \cdot AD \Leftrightarrow AD = 27$ см. Аналогично $KB^2 = BC \cdot BE$ или $80^2 = 100 \cdot BE \Leftrightarrow BE = 64$ см.

Ответ: 27 и 64 см.

5.130. По углам четырехугольника $ABCD$ определить углы между биссектрисами двух соседних углов, между биссектрисами двух противоположных углов и между биссектрисами двух углов, образуемых парами противоположных сторон, продленных до пересечения.

Решение.

Каждые две биссектрисы образуют при пересечении две пары вертикальных углов. Вертикальные углы между биссектрисами двух соседних углов четырехугольника, в которых не лежит сторона, соединяющая вершины этих углов, равны их полусумме.

Вертикальные углы между биссектрисами двух противоположных углов четырехугольника, в которых не лежит диагональ, соединяющая вершины этих углов, равны полуразности двух других углов. Вертикальные углы между биссектрисами углов, образуемых парами противоположных сторон четырехугольника, продолженными до пересечения, равны полусуммам тех углов четырехугольника, вершины которых лежат внутри этих вертикальных углов.

Докажем для примера последнее утверждение из трех как более сложное. Обозначим углы четырехугольника через A, B, C, D ; углы между парами противоположных сторон, продолженных до пересечения, через E, F ; углы между их биссектрисами EH, FH , в которых лежат вершины A, C , — через x , вспомогательный угол EGF — через α . Из треугольника FGH (рис. 5.164) находим:

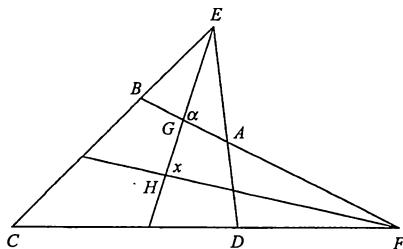


Рис. 5.164

$x = \alpha - \frac{1}{2}F$. Из треугольника AEG находим: $\alpha = A - \frac{1}{2}E$. Подставляя, получим: $x = A - \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}F$. Остается определить углы E, F . Из треугольников CDE, BCF находим соответственно: $E = 180^\circ - C - D, F = 180^\circ - B - C$. Подставляя, получаем:

$x = A + C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D - 180^\circ$. Так как сумма всех углов четырехугольника равна 360° , то сумма их половин равна 180° .

Поэтому $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = 180^\circ - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C$. Подставляя, получаем: $x = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$, или $x = \frac{1}{2}(A + C)$. Полученная формула доказывает высказанное утверждение для пары углов между биссектрисами, в которых лежат вершины A, C . Углы оставшейся пары равны: $180^\circ - x = 180^\circ - \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D)$, что также согласно с этим утверждением.

5.131. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см. На стороне AB взята точка M так, что $3AM = AB$, а на стороне BC — точка K так, что $3BK = 2KC$. Найти длину отрезка MK .

Решение.

По условию задачи $AB = 3AM = 3$ см (рис. 5.165), откуда $AM = 1$ см и $KC = \frac{3}{2}BK$. Тогда $BC = BK + \frac{3}{2}BK = \frac{5}{2}BK = 5$ см, откуда $BK = 2$ см. По теореме косинусов находим: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$, т.е. $36 = 9 + 25 - 30 \cos \angle B \Leftrightarrow \cos \angle B = -\frac{1}{15}$. Из треугольника MBK по теореме косинусов имеем:

$$MK^2 = MB^2 + BK^2 - 2MB \cdot BK \cdot \cos \angle B = 8 + \frac{8}{15} = 8\sqrt{\frac{2}{15}} \text{ см.}$$

Ответ: $8\sqrt{\frac{2}{15}}$ см.

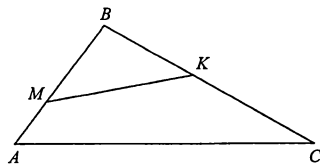


Рис. 5.165

5.132. Какому условию должен удовлетворять параллелограмм, чтобы около него можно было описать окружность?

Решение.

Пусть $ABCD$ — параллелограмм, вписанный в круг (рис. 5.166). Так как хорды AB, CD параллельны, то заключенные между ними дуги AD, BC равны. Прибавив к этим дугам по дуге AMB , получим равные дуги BAD, ABC , откуда следует равенство хорд BD, AC , т.е. диагоналей параллелограмма. Но параллелограмм с равными диаго-

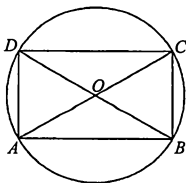


Рис. 5.166

налями есть прямоугольник. Наоборот, около всякого прямоугольника можно описать круг, так как точка пересечения его диагоналей находится, вследствие равенства диагоналей, на равных расстояниях от вершин. Таким образом, чтобы около параллелограмма можно было описать круг, необходимо и достаточно, чтобы он был прямоугольником.

Ответ: параллелограмм должен быть прямоугольником.

5.133. Какова должна быть трапеция, чтобы около нее можно было описать окружность?

Решение.

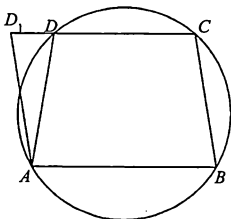


Рис. 5.167

Пусть $ABCD$ — трапеция, вписанная в круг (рис. 5.167). Вследствие параллельности хорд AB , CD заключенные между ними дуги AD , BC равны, а поэтому и хорды AD , BC равны. Следовательно, трапеция $ABCD$ равнобокая. Наоборот, если трапеция $ABCD$ равнобокая, то около нее можно описать круг, так как окружность, описанная около треугольника ABC , пройдет и через точку D . Действительно, эта окружность пересечет прямую CD в точке, расстояние которой от точки A равно BC . Таких точек две, а именно D и D_1 , но через точку D , наша окружность не пройдет, так как четырехугольник $ABCD_1$ есть параллелограмм, отличный от прямоугольника, и около него нельзя поэтому описать круг. Таким образом, чтобы около трапеции можно было описать круг, необходимо и достаточно, чтобы она была равнобокая.

Ответ: трапеция должна быть равнобокая.

5.134. В какой параллелограмм можно вписать окружность?

Решение.

Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 5.168), описанный около круга. Соединим центр круга O с вершинами параллелограмма. Углы DAB , CBA в сумме составляют 180° как внутренние односторонние. Половина этих углов OAB , OBA в сумме составляет 90° . Поэтому третий угол AOB в треугольнике AOB также равен 90° . Подобным образом

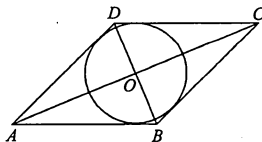


Рис. 5.168

докажем, что все четыре угла вокруг точки O равны 90° . Отсюда следует, что AOC , BOD есть прямые линии и что эти прямые перпендикулярны. Но параллелограмм с перпендикулярными диагоналями есть ромб. Наоборот, во всякий ромб можно вписать круг, так как точка пересечения его диагоналей, как легко убедиться, равноудалена от его сторон. Таким образом, чтобы в параллелограмм можно было вписать круг, необходимо и достаточно, чтобы он был ромбом.

Ответ: параллелограмм должен быть ромбом.

5.135. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C . По данным сторонам $AC = b$ и $AB = c$ найти сторону треугольника $BC = a$.

Решение.

Проведем биссектрису AA_1 угла A и найдем отрезки BA_1 и A_1C (рис. 5.169). По теореме о биссектрисе угла треугольника

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}. \text{ Обозначим } BA_1 \text{ через } x, \text{ тогда } \frac{x}{a-x} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow x = BA_1 = \frac{ac}{b+c}.$$

$$\text{Отрезок } A_1C = BC - BA_1 = a - x = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}.$$

Треугольник AA_1C равнобедренный, следовательно, $AA_1 = A_1C$ и $DC = \frac{1}{2}AC$. Из прямоугольного треугольника A_1DC выразим $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{DC}{A_1C} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b(b+c)}{2ab} = \frac{b+c}{2a}. \text{ Далее, по теореме косинусов на-}$$

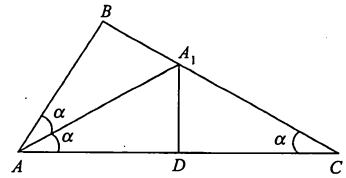


Рис. 5.169

$$\text{ходим: } a: c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \frac{b+c}{2a} \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - b^2 - bc \Leftrightarrow a^2 = c^2 + bc \Leftrightarrow a = \sqrt{c^2 + bc}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{c^2 + bc}.$$

5.136. В равнобедренной трапеции острый угол при основании равен α , диагональ образует с основанием угол β и большее основание равно a . Найти высоту и боковую сторону трапеции.

Решение.

Обозначим высоту трапеции $BH = h$ (рис. 5.170). Из прямоугольных треугольников AHB и BHD находим:

$$AB = \frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha}, AH = BH \operatorname{ctg} \alpha = h \operatorname{ctg} \alpha, HD = BH \operatorname{ctg} \beta = h \operatorname{ctg} \beta. \text{ По условию } AD = a, \text{ но } AD = AH + HD, \text{ следовательно,}$$

$$a = h \operatorname{ctg} \alpha + h \operatorname{ctg} \beta \Leftrightarrow h = \frac{a}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Далее, } AB = CD = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

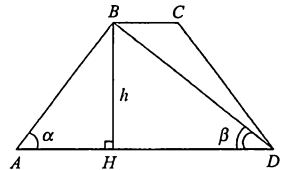


Рис. 5.170

$$\text{Ответ: } \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

5.137. Найти все треугольники, у которых и стороны, и углы составляют арифметические прогрессии.

Решение.

Пусть α, β, γ — внутренние углы треугольника. Предположим, что они в заданном порядке составляют арифметическую прогрессию. Тогда $\begin{cases} \beta - \alpha = \gamma - \beta, \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = \alpha + \gamma, \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = \alpha + \gamma, \\ 3\beta = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 120^\circ - \alpha, \\ \beta = 60^\circ. \end{cases}$ При этом $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Пусть длины сторон треугольника, лежащие напротив углов α, β, γ соответственно равны a, b, c . Используя теорему синусов, имеем: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin(120^\circ - \alpha)} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sin(60^\circ + \alpha)}$. Из последнего выражения находим:

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} b \sin \alpha, \quad c = \frac{2}{\sqrt{3}} b \sin(60^\circ + \alpha).$$

Рассмотрим три случая, последовательно выбирая в качестве среднего члена арифметической прогрессии стороны b, a и c .

$$1. \quad 2b = a + c \Leftrightarrow 2b = \frac{2}{\sqrt{3}} b (\sin \alpha + \sin(60^\circ + \alpha)) \Leftrightarrow \sin \alpha + \sin(60^\circ + \alpha) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ + 360^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \quad 2a = b + c \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} b \sin \alpha = b + \frac{2}{\sqrt{3}} b \sin(60^\circ + \alpha) \Leftrightarrow 2 \sin \alpha - \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ + (-1)^n 30^\circ + 180^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \quad 2c = a + b \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} b \sin(60^\circ + \alpha) = b + \frac{2}{\sqrt{3}} b \sin \alpha \Leftrightarrow 2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm 60^\circ + 360^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что во всех случаях только $\alpha = 60^\circ$ удовлетворяет условию $0^\circ < \alpha < 120^\circ$. Следовательно, искомым является треугольник, у которого $\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 60^\circ$ и $a = b = c$.

Ответ: все равнобедренные треугольники.

5.138. Найти наименьшее и наибольшее расстояние точки от окружности.

Решение.

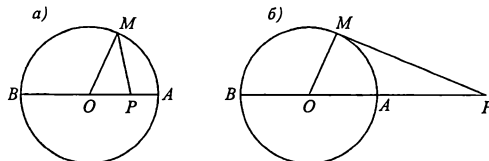


Рис. 5.171

Обозначим радиус данного круга через R и расстояние его центра O от данной точки через d (рис. 5.171). Предположим сначала, что P не совпадает с O . Тогда чертеж наглядно показывает, что ближайшая к P точка окружности есть конец A диаметра OP , расположенный с P по одну сторону от O , а самая дальняя — другой конец B того же диаметра. Чтобы проверить это, нам нужно доказать, что для всякой точки M окружности, кроме A , будем иметь $PM > PA$ и что для всякой точки M окружности, кроме B , будем иметь $PM < PB$. Если P лежит внутри круга (рис. 5.171, а), то $PA = OA - OP = R - d$, $PM > OM - OP = R - d$ и, следовательно, $PM > PA$. Если P лежит вне круга (рис. 5.171, б), то $PA = OP - OA = d - R$, $PM > OP - OM = d - R$ и, следовательно, также $PM > PA$. Если P лежит на окружности, то она совпадает с A . В этом случае $PA = 0$, $PM > 0 \Leftrightarrow PM > PA$. Таким образом, неравенство $PM > PA$ доказано во всех случаях. Что касается неравенства $PM < PB$, то его доказательство не требует рассмотрения отдельных случаев. Имеем: $PB = OB + OP = R + d$, $PM < OM + OP = R + d$, откуда находим, что $PM < PB$. Если теперь предположим, что P совпадает с O , то для всех точек M имеем $PM = R$. В этом случае расстояние P от всех точек окружности одно и то же и не существует ни наименьшего, ни наибольшего расстояния.

5.139. В окружность вписана трапеция, боковая сторона которой равна a , а острый угол при основании равен α . Определить основания трапеции, если известно, что диагональ ее образует с основанием угол β .

Решение.

Пусть $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle BDA = \beta$ (рис. 5.172). Тогда $\angle ABD = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. По теореме синусов из треугольника ABD имеем

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AD}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} \Leftrightarrow AD = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}.$$

Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная. Тогда

$BC = AD - 2AK$. Из прямоугольного треугольника AKB находим: $AK = a \cos \alpha$, поэтому

$$BC = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} - 2a \cos \alpha = \frac{a(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - 2 \sin \beta \cos \alpha)}{\sin \beta} = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta}.$$

Ответ: $\frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}, \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta}.$

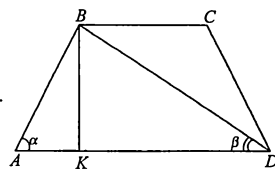


Рис. 5.172

5.140. Каково относительное расположение двух кругов радиусами R и $3R$, когда расстояние между их центрами равно $3R, R, 5R, 4R$ и $2R$?

Решение.

В первом случае окружности пересекаются, во втором — первый круг лежит внутри второго, в третьем — они лежат вне друг друга, в четвертом — внешне касаются, в пятом — внутренне касаются. Для решения такого рода задач нужно составить сумму и разность радиусов данных кругов и сравнить с этой суммой и разностью расстояние между центрами. В нашей задаче сумма радиусов равна $4R$, а разность — $2R$. В первом случае расстояние между центрами $3R$ меньше суммы радиусов $4R$ и больше их разности $2R$. Следовательно, окружности пересекаются. Во втором случае расстояние между центрами R меньше разности радиусов $2R$, поэтому один круг лежит внутри другого и т. д.

5.141. В треугольнике ABC даны длины трех сторон: $BC=29, AC=36, AB=25$. Вычислить площадь треугольника и длину высоты BD , проведенной из вершины B . Найти радиусы вписанной и описанной окружностей.

Решение.

Площадь треугольника вычислим по формуле Герона, так как известны три стороны. Полупериметр

$$p = \frac{1}{2}(29 + 36 + 25) = 45, \text{ поэтому } S = \sqrt{45(45 - 29)(45 - 36)(45 - 25)} = \sqrt{45 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 20} = 360 \text{ (кв. ед.)}. \text{ Для определения вы-}$$

соты BD воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC \Leftrightarrow BD = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 360}{36} = 20$. Радиусы найдем из следующих формул:

$$S = rp \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{360}{45} = 8, \quad S = \frac{BC \cdot AC \cdot AB}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{BC \cdot AC \cdot AB}{4S} = \frac{29 \cdot 36 \cdot 25}{4 \cdot 360} = 18,125.$$

Ответ: 360 кв. ед.; 20; 8; 18,125.

5.142. По углам между диагоналями (α) и между противоположными сторонами (β, γ) вписанного четырехугольника определить углы этого четырехугольника.

Решение.

Обозначим углы четырехугольника через A, B, C, D ; стягиваемые сторонами четырехугольника дуги — через x, y, z, v , как показано на рис. 5.173. Теми же буквами, что и дуги, будем обозначать соответствующие центральные углы. Имеем:

$$\frac{1}{2}(x + y) = \alpha, \quad \frac{1}{2}(x - y) = \beta, \quad \frac{1}{2}(z + v) = 180^\circ - \alpha, \quad \frac{1}{2}(z - v) = \gamma.$$

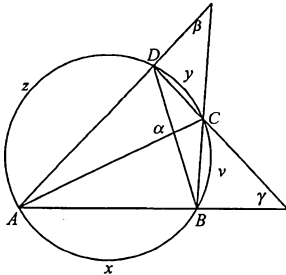


Рис. 5.173

Решая эти уравнения, находим: $x = \alpha + \beta$, $y = \alpha - \beta$, $z = 180^\circ - \alpha + \gamma$, $v = 180^\circ - \alpha - \gamma$.

После этого получим: $A = \frac{1}{2}(y + v) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$,

$$B = \frac{1}{2}(y + z) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta - \gamma), \quad C = \frac{1}{2}(x + z) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\beta + \gamma),$$

$$D = \frac{1}{2}(x + v) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

Ответ: $90^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, $90^\circ - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, $90^\circ + \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, $90^\circ + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

5.143. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l , угол при вершине равен α . Найти площадь равнобедренного треугольника.

Решение.

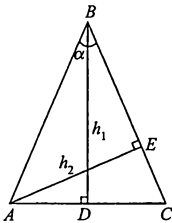


Рис. 5.174

Выразим h_1 и h_2 через AB и угол α из треугольников ABD и ABE соответственно (рис. 5.174):

$$h_1 = AB \cos \frac{\alpha}{2}, \quad h_2 = AB \sin \alpha. \quad \text{Тогда } l = h_1 + h_2 = AB \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \right) \Leftrightarrow AB = \frac{l}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha}.$$

Далее, площадь треугольника ABC найдем по формуле $S = \frac{1}{2} AB^2 \sin \alpha$, т.е.

$$S = \frac{1}{2} \frac{l^2 \sin \alpha}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \right)^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2} \frac{l^2 \sin \alpha}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \right)^2}.$

5.144. По углам при основании вписанного треугольника определить угол между касательной к кругу в его вершине и основанием.

Решение.

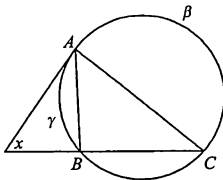


Рис. 5.175

Обозначим (рис. 5.175) углы при основании треугольника через B, C ; стягиваемые боковыми сторонами AB, AC дуги и соответствующие центральные углы — через γ, β ; искомым углом — через x , как показано на рис. 5.175. Имеем:

$$x = \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{1}{2}(2B - 2C) = B - C.$$

Ответ: $B - C$.

5.145. Найти площадь ромба $ABCD$ с острым углом α , если радиус окружности, вписанной в треугольник ABD , равен r .

Решение.

Центр K вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис углов, т.е. на диагонали ромба AC (рис. 5.176).

Из прямоугольного треугольника AKM следует: $AK = \frac{KM}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Тогда $AO = AK + KO = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} + r = \frac{r(1 + \sin \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Из

прямоугольного треугольника AOD находим: $OD = AO \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Следовательно, площадь ромба $ABCD$ равна

$$S = 2 \cdot AO \cdot OD = 2AO^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2r^2 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{4r^2 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin \alpha}.$$

Ответ: $\frac{4r^2 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin \alpha}$.

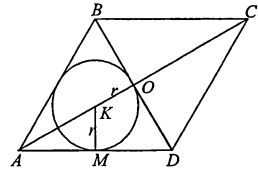


Рис. 5.176

5.146. По углам вписанного треугольника определить углы треугольника, ограниченного касательными к кругу в его вершинах.

Решение.

Обозначим (рис. 5.177) углы треугольника через A, B, C ; стягиваемые его сторонами дуги и соответствующие центральные углы — через α, β, γ ; искомые углы — через x, y, z . Имеем:

$$x = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) = \frac{1}{2}(2B + 2C - 2A) = (B + C) - A = (180^\circ - A) - A = 2(90^\circ - A).$$

Аналогично найдем y и z . Итак: $x = 2(90^\circ - A)$, $y = 2(90^\circ - B)$, $z = 2(90^\circ - C)$.

Ответ: $2(90^\circ - A)$, $(90^\circ - B)$, $(90^\circ - C)$.

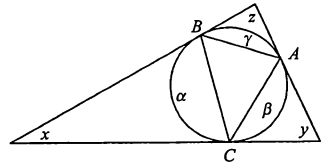


Рис. 5.177

5.147. Длина окружности равна $4\sqrt{\pi}$. Из круга, ограниченного этой окружностью, вырезан сектор с центральным углом $\alpha = 0,1\pi$. Найти площадь сектора.

Решение.

Длина окружности $C = 2\pi R = 4\sqrt{\pi} \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{\pi}}{2\pi} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$. Тогда площадь сектора вычислим по формуле

$$S_{\text{сект}} = \frac{R^2 \alpha}{2} = \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{0,1\pi}{2} = 0,2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 0,2 кв. ед.

5.148. При каких условиях центр описанного круга лежит внутри, вне и на границе треугольника?

Решение.

Центр описанного круга может лежать или внутри треугольника, или внутри одного из трех сегментов, прилегающих к сторонам треугольника, или на одной из трех сторон треугольника. В первом случае сегменты не содержат центра внутри себя. Поэтому дуги их меньше полуокружности, и углы треугольника острые. Во втором случае дуга сегмента, содержащего центр, больше полуокружности, и опирающийся на нее угол треугольника тупой. В третьем случае дуга сегмента, прилегающего к стороне, содержащей центр, есть полуокружность, и опирающийся на нее угол треугольника прямой. Эти три случая исчерпывают все возможности и исключают друг друга.

5.149. Найти радиус, длину окружности и площадь круга, вписанного в данный сектор, если радиус сектора равен R , а дуга содержит 60° .

Решение.

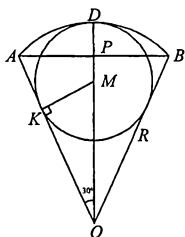


Рис. 5.178

Так как радиус KM перпендикулярен к AO , то прямоугольные треугольники APM , KMO подобны (рис. 5.178). Пусть $KM = x$, тогда $MD = x$, $MO = R - x$; $AP = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} R$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). Из подобия треугольников KMO и PAO

находим: $\frac{KM}{MO} = \frac{AP}{AO} \Leftrightarrow \frac{x}{R-x} = \frac{\frac{R}{2}}{R} \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$. Следовательно, $r = x = \frac{R}{3}$, $S = \pi r^2 = \frac{\pi R^2}{9}$,

$$C = 2\pi r = \frac{2}{3}\pi R.$$

$$\text{Ответ: } \frac{R}{3}, \frac{2}{3}\pi R, \frac{\pi R^2}{9}.$$

5.150. Найти части плоскости, в которых лежат вершины остроугольных и тупоугольных треугольников, опирающихся на заданное основание.

Решение.

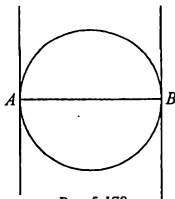


Рис. 5.179

Пусть AB — заданное основание (рис. 5.179). Тогда вершины остроугольных треугольников лежат внутри полосы, ограниченной прямыми, перпендикулярными к прямой AB в точках A , B , но вне круга, построенного на отрезке AB как на диаметре. Вершины тупоугольных треугольников лежат по обе стороны от полосы и внутри круга, но не на прямой AB . Вершины прямоугольных треугольников лежат на краях полосы и на окружности круга, но не в точках A , B . На прямой AB вообще не лежат вершины треугольников с основаниями AB .

5.151. К какой из вершин ортоцентра (точка пересечения высот треугольника) ближе всего?

Решение.

На рис. 5.180 имеем: $AC < AB$. Поэтому $HC < HB$, так как меньшая наклонная ближе к перпендикуляру. Отсюда находим $DC < DB$, поскольку из двух наклонных меньше та,

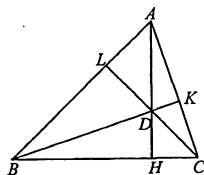


Рис. 5.180

которая ближе к перпендикуляру. Таким образом, из двух вершин ортоцентр D ближе к той, которая лежит против большей стороны. Следовательно, из всех вершин ортоцентр ближе к той, которая лежит против наибольшей стороны, т.е. к вершине наибольшего угла.

Ответ: к вершине наибольшего угла.

5.152. К которой из сторон ортоцентр ближе всего?

Решение.

На рис. 5.180 (см. задачу 5.151) имеем: $AC < AB$; отсюда $\angle ABC < \angle ACB$, откуда в свою очередь $\angle BAN < \angle CAN$, так как $\angle BAN = 90^\circ - \angle ABC$, $\angle CAN = 90^\circ - \angle ACB$. Окружность, описанная на AD как на диаметре, пройдет через вершины K, L прямых углов, опирающихся на AD . Из двух хорд DK, DL этой окружности меньше та, на которую опирается меньший из вписанных углов KAD, LAD , т.е. хорда DK . Таким образом, из двух сторон треугольника ABC ортоцентр D ближе всего к меньшей и, следовательно, из всех сторон ближе к наименьшей. Однако решение задачи еще нельзя считать законченным, так как в нашем рассуждении имеет существенное значение, что углы ABC, ACB острые. Предлагаем читателю проверить справедливость полученного результата для случая прямоугольного и тупоугольного треугольников.

Ответ: к наименьшей стороне.

5.153. В треугольнике ABC со сторонами a, b, c ($c < a < b$) найти расстояние от ортоцентра до вершины A .

Решение.

Пусть O — точка пересечения высот AE, CD данного треугольника ABC (рис. 5.181); $AB = c, BC = a, AC = b$. В силу того, что треугольники ADO, ABE подобны, запишем: $\frac{AD}{AE} = \frac{AO}{c} \Leftrightarrow AO = \frac{AD \cdot c}{AE}$. Так как $AD = b \cos \angle A$ и $2S_{\triangle ABC} = a \cdot AE = b \cdot c \sin \angle A$,

то $AE = \frac{b \cdot c \cdot \sin \angle A}{a}$; поэтому $AO = \frac{b \cdot c \cdot \cos \angle A}{\frac{b \cdot c \cdot \sin \angle A}{a}} = a \operatorname{ctg} \angle A$. По теореме косинусов для треугольника ABC имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A \Leftrightarrow \cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{и } \sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2bc}.$$

$$\text{Тогда } \operatorname{ctg} \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{2bc}{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}.$$

$$\text{Таким образом, } AO = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}.$$

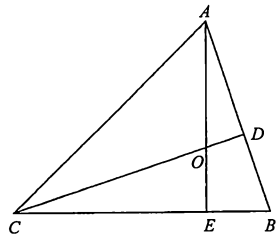


Рис. 5.181

5.154. К какой из вершин и к какой из сторон центр тяжести (точка пересечения медиан треугольника) ближе всего?

Решение.

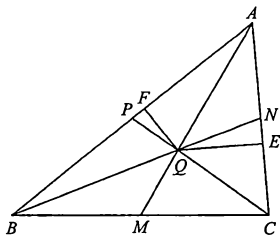


Рис. 5.182

Пусть Q — точка пересечения медиан AM, BN, CP треугольника ABC (рис. 5.182). Если предположим $AC < AB$, то на основании решения задачи 5.107 имеем: $\angle AMC < \angle AMB$ и $\angle MAB < \angle MAC$. В треугольниках CMQ, BMQ имеем $CM = BM$, $MQ = MQ$, $\angle CMQ < \angle BMQ$. Отсюда $QC < QB$, т.е. из двух вершин центр тяжести Q ближе к той, которая противолежит большей стороне. Следовательно, из всех вершин центр тяжести ближе всего к той, которая противолежит наибольшей стороне, т.е. к вершине наибольшего угла. При сравнении расстояний QE, QF центра тяжести от сторон AC, AB можно повторить рассуждения решения задачи 5.152, пользуясь неравенством $\angle QAF < \angle QAE$. Получим неравенство $QF < QE$, которое показывает, что центр тяжести ближе к большей из сторон и, следовательно, ближе всего к наименьшей стороне.

Ответ: к вершине наибольшего угла; к наименьшей стороне.

5.155. По основанию a треугольника определить расстояние между точками, делящими боковые стороны в отношении m , считая от вершины.

Решение.

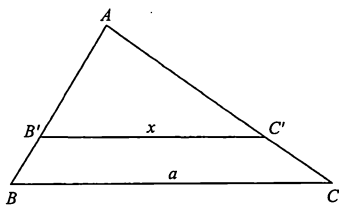


Рис. 5.183

В треугольнике ABC (рис. 5.183) стороны AB, AC разделены точками B', C' в отношении $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} = m$. Кроме того, дано $BC = a$. Требуется

определить $B'C' = x$. Из пропорции $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$ следует, что прямые $BC, B'C'$ параллельны. Поэтому треугольники $ABC, A'B'C'$ подобны и мы имеем: $\frac{x}{a} = \frac{AB'}{AB}$. Остается найти последнее отношение. Это можно сделать с помощью производных пропорций:

$$\frac{AB'}{BB'} = \frac{1}{m}, \frac{AB'}{AB' + B'B} = \frac{m}{m+1}, \frac{AB'}{AB} = \frac{m}{m+1}. \text{ Отсюда получаем: } \frac{x}{a} = \frac{m}{m+1} \Leftrightarrow x = \frac{ma}{1+m}.$$

Ответ: $\frac{ma}{1+m}$.

5.156. Вычислить площадь треугольника по двум сторонам 8 и 4 и биссектрисе 5 угла между ними.

Решение.

Если B_1 — биссектриса данного треугольника ABC (рис. 5.184) и $AB = 8, BC = 4, B_1 = 5, \angle B = 2\alpha$, то по теореме косинусов для треугольников AB_1 и B_1C получаем:

$$AB_1^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow AB_1^2 = 89 - 80 \cos \alpha \text{ и } B_1C^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow B_1C^2 = 41 - 40 \cos \alpha. \text{ По свойству биссектрисы}$$

угла треугольника имеем: $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC}$ или $\frac{AB_1^2}{B_1C^2} = \frac{8^2}{4^2} = 4$.

Следовательно, $\frac{AB_1^2}{B_1C^2} = \frac{89 - 80 \cos \alpha}{41 - 40 \cos \alpha} = 4 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{15}{16}$. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AB_1 и ACB_1 :

$$S_{ABC} = \frac{8 \cdot 5}{2} \sin \alpha + \frac{4 \cdot 5}{2} \sin \alpha = 30 \sin \alpha = 30 \sqrt{1 - \left(\frac{15}{16}\right)^2} = 30 \cdot \frac{1}{16} \sqrt{16^2 - 15^2} = \frac{15\sqrt{31}}{8} \text{ (кв. ед.)}.$$

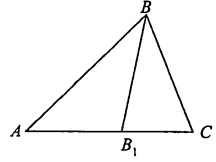


Рис. 5.184

Ответ: $\frac{15\sqrt{31}}{8}$ (кв. ед.).

5.157. По основаниям a, b ($a > b$) трапеции определить расстояние между точками, делящими боковые стороны в отношении m , считая от основания a .

Решение.

В трапеции $ABCD$ (рис. 5.185) дано: $AB = a, DC = b, \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = m$. Из пропорции следует, что прямая EF параллельна основаниям AB, DC . Проведя DGH параллельно BC , получим два подобных треугольника DEG, DAH . Пусть $ED = 1$ и, следовательно, $AE = m, AD = 1 + m$, найдем соотношения: $\frac{EG}{a-b} = \frac{1}{1+m}, EG = \frac{a-b}{1+m}$. Кроме того, очевидно: $GF = b$. Отсюда находим искомое расстояние:

$$EF = EG + GF = \frac{a-b}{1+m} + b = \frac{a+mb}{1+m}.$$

Ответ: $\frac{a+mb}{1+m}$.

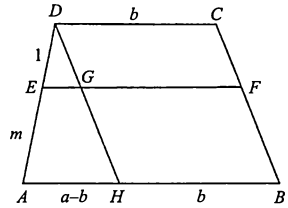


Рис. 5.185

5.158. По расстояниям p, q, r вершин треугольника от прямой, не пересекающей его, определить расстояние его центра тяжести от той же прямой.

Решение.

Чтобы построить центр тяжести Q треугольника ABC (рис. 5.186), делим BC пополам в точке M и затем делим AM в отношении $2:1$, считая от A , в точке Q . Пусть $AA' = p, B' = q, CC' = r, MM' = s, QQ' = x$ — расстояния точек A, B, C, M, Q от некоторой прямой. Из этих расстояний p, q, r даны, а x требуется определить. Из трапеции $BCC'B'$ найдем по теореме о средней линии, что $s = \frac{1}{2}(q+r)$. Из трапеции $AMM'A'$ найдем на основании реше-

ния задачи 5.157: $x = \frac{p+2s}{1+2} = \frac{p+q+r}{3}$.

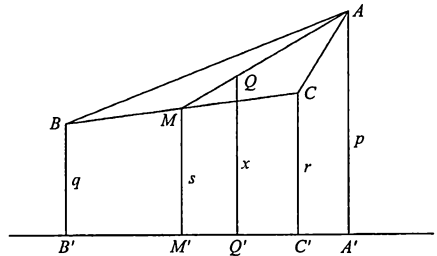


Рис. 5.186

Ответ: $\frac{p+q+r}{3}$.

5.159. В равносторонний треугольник ABC со стороной 6 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что отрезок ее внутри треугольника равен 2 см. Найти площадь треугольника, отсеченного этой касательной от данного.

Решение.

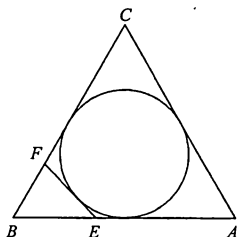


Рис. 5.187

Пусть в треугольнике ABC вписана окружность (рис. 5.187) и $EF = 2$ см — касательная к этой окружности. Пусть $BE = x$, $BF = y$. Так как в четырехугольнике $AECF$ вписана окружность, то $AE + CF = EF + AC = 2 + 6 \Leftrightarrow BE + BF = (6 - AE) + (6 - CF) = 12 - (AE + CF) = 12 - 8 = 4$ (см), или $(x + y)^2 = 16$ (см²). По теореме косинусов для треугольника BEF

$$EF^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ \Leftrightarrow (x + y)^2 = EF^2 + 3xy = 16 \Leftrightarrow xy = \frac{16 - 2^2}{3} = 4 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Таким образом, $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} xy \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см²).

Ответ: $\sqrt{3}$ см².

5.160. По основаниям a, b ($a > b$) трапеции определить отношение, в котором ее диагонали делят друг друга.

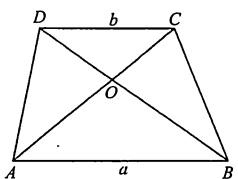


Рис. 5.188

Решение.

Из подобия треугольников OAB, OCD (рис. 5.188) находим: $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{a}{b}$, т.е. диагонали трапеции делят друг друга в отношении оснований.

Ответ: $\frac{a}{b}$.

5.161. По основаниям a, b ($a > b$) трапеции определить отрезок прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей, заключающийся между боковыми сторонами.

Решение.

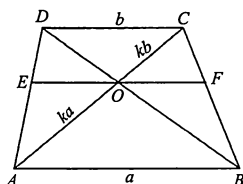


Рис. 5.189

Согласно решению задачи 5.160, отрезки AO, OC диагонали AC пропорциональны основаниям AB, CD (рис. 5.189). Отсюда находим: $AO = ka, OC = kb, AC = k(a + b)$, где k — коэффициент пропорциональности. Из подобия треугольников AOE, ACD получаем следующее отношение:

$$\frac{OE}{b} = \frac{ka}{k(a+b)} = \frac{a}{a+b} \Leftrightarrow OE = \frac{ab}{a+b}.$$

Таким же образом найдем: $OF = \frac{ab}{a+b}$. Складывая оба равенства, получим искомый отрезок: $EF = \frac{2ab}{a+b}$.

Ответ: $\frac{2ab}{a+b}$.

5.162. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A = 90^\circ$) биссектриса прямого угла отсекает на гипотенузе отрезки длиной 5 и 3. Найти площадь квадрата, стороной которого является половина этой биссектрисы.

Решение.

Пусть AA_1 — биссектриса прямого угла треугольника ABC , $BA_1 = 5$, $AC = 3$ (рис. 5.190). Опустим перпендикуляры из точки A_1 на катеты треугольника. Тогда AEA_1F есть квадрат, в котором длину стороны обозначим a . Пусть $BE = b$, $CF = c$. Из подобия треугольников BA_1E и A_1CF запишем:

$$\frac{b}{a} = \frac{5}{3}, \frac{a}{c} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow b^2 = \frac{25}{9}a^2, c^2 = \frac{9}{25}a^2.$$

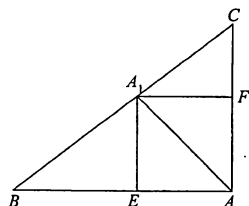


Рис. 5.190

По теореме Пифагора для треугольников BA_1E , A_1CF имеем:

$$b^2 + a^2 = 5^2, c^2 + a^2 = 3^2 \Leftrightarrow (b^2 + c^2) + 2a^2 = 34 \Leftrightarrow a^2 \left(\frac{25}{9} + \frac{9}{25} + 2 \right) = 34 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3825}{578} = \frac{225}{34}.$$

Так как $AA_1^2 = 2a^2$, то искомая площадь квадрата будет равна $\left(\frac{AA_1}{2} \right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{225}{68}$ (кв. ед.).

Ответ: $\frac{225}{68}$ кв. ед.

5.163. По основаниям a, b трапеции определить отношение, в котором ее боковые стороны, продолженные до пересечения, делят друг друга внешним образом.

Решение.

В трапеции $ABCD$ (рис. 5.191) боковые стороны AD, BC продолжены до пересечения в точке O . По данным основаниям $AB = a, DC = b$ требуется узнать отношение, в котором точка O делит стороны AD, BC , т.е. отношения $\frac{AO}{OD}, \frac{BO}{OC}$. Из подобия треугольни-

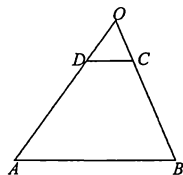


Рис. 5.191

ков OAB, ODC находим, что $\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OC} = \frac{a}{b}$, т.е. боковые стороны трапеции делят

друг друга в отношении оснований. Сравнивая этот результат с результатом решения задачи 5.160, видим, что диагонали и боковые стороны трапеции делят друг друга в одинаковом отношении. Разница только в том, что точка пересечения диагоналей лежит на них самих, т.е. делит их внутренним образом в этом отношении, а точка пересечения боковых сторон лежит на их продолжениях, т.е. делит их внешним образом в том же отношении.

Ответ: $\frac{a}{b}$.

5.164. По основаниям a, b трапеции определить отрезок прямой, проведенной параллельно основанию через точку пересечения продолженных боковых сторон, заключающийся между продолжениями диагоналей.

Решение.

Согласно решению задачи 5.163, расстояния AO, OD точки пересечения O боковых сторон от концов боковой стороны AD пропорциональны основаниям AB, DC (рис. 5.192). Отсюда находим: $AO = ka$, $OD = kb$, $AD = k(a - b)$. Из подобия тре-

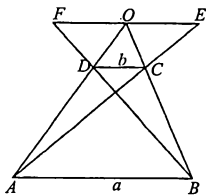


Рис. 5.192

угольников AOE , ADC легко получаем, что $\frac{OE}{b} = \frac{ka}{k(a-b)} = \frac{a}{a-b} \Leftrightarrow OE = \frac{ab}{a-b}$. Таким образом, получим, что $OF = \frac{ab}{a-b}$. Складывая оба равенства, сразу получим искомый отрезок: $EF = \frac{2ab}{a-b}$.

Ответ: $\frac{2ab}{a-b}$.

5.165. Внутри прямого угла дана точка N , расстояния от которой до сторон угла равны 5 и 10 см. Прямая, проходящая через точку N , отсекает от прямого угла треугольник площадью 200 см². Найти катеты треугольника.

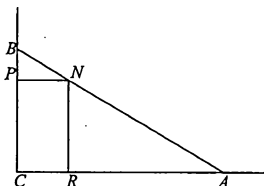


Рис. 5.193

Решение.

По условию задачи $\angle C = 90^\circ$, $NP = 5$ см, $NR = 10$ см, $S_{\triangle ABC} = 200$ см² (рис. 5.193).

Требуется определить BC и AC . Пусть $BC = x$, $AC = y$, тогда $\frac{1}{2}xy = 200 \Leftrightarrow xy = 400$.

Далее, из подобия треугольников BPN и NRA запишем: $\frac{NP}{AR} = \frac{BP}{NR}$ или $\frac{5}{y-5} = \frac{x-10}{10}$.

Таким образом, для определения BC и AC имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{5}{y-5} = \frac{x-10}{10} \\ xy = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=80, \\ xy=400 \end{cases} \Leftrightarrow y^2-40y+200=0, \quad y_1=20+10\sqrt{2} \text{ (см)}, \quad y_2=20-10\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Окончательно получаем два решения: $x_1 = 40 - 20\sqrt{2}$ см, $y_1 = 20 + 10\sqrt{2}$ см и $x_2 = 40 + 20\sqrt{2}$ см, $y_2 = 20 - 10\sqrt{2}$ см.

Ответ: $40 - 20\sqrt{2}$ и $20 + 10\sqrt{2}$ см или $40 + 20\sqrt{2}$ и $20 - 10\sqrt{2}$ см.

5.166. По основанию a и боковым сторонам b, c треугольника определить отрезки, на которые биссектриса внутреннего угла при вершине делит основание.

Решение.

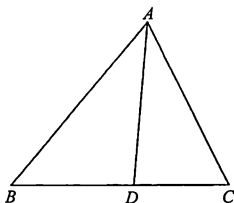


Рис. 5.194

Пусть AD — внутренняя биссектриса треугольника ABC (рис. 5.194). Требуется по сторонам треугольника определить отрезки BD , DC . По известному свойству биссектрисы угла треугольника отрезки BD , DC пропорциональны сторонам AB , AC :

$BD = kc$, $DC = kb$. Складывая почленно, получаем: $a = k(c + b)$. Отсюда $k = \frac{a}{b+c}$ и,

следовательно, $BD = \frac{ac}{b+c}$, $DC = \frac{ab}{b+c}$.

Ответ: $\frac{ac}{b+c}$, $\frac{ab}{b+c}$.

5.167. По основанию a и боковым сторонам b, c ($b < c$) треугольника определить расстояния от концов основания до точки пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине с основанием.

Решение.

Пусть AD — внешняя биссектриса треугольника ABC (рис. 5.195). Требуется по сторонам треугольника определить отрезки BD, DC . По свойству биссектрисы угла треугольника отрезки BD, DC пропорциональны сторонам AB, AC :

$BD = kc, DC = kb$. Вычитая почленно, находим: $a = k(c - b) \Leftrightarrow k = \frac{a}{c - b}$ и, сле-

довательно, $BD = \frac{ac}{c - b}$, $DC = \frac{ab}{c - b}$. Если бы было $b > c$, то мы имели бы

$$BD = \frac{ac}{b - c}, \quad DC = \frac{ab}{b - c}.$$

Ответ: $\frac{ac}{c - b}$, $\frac{ab}{c - b}$.

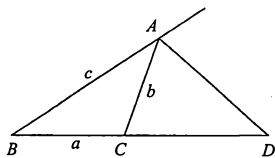


Рис. 5.195

5.168. В треугольник вписан ромб со стороной 4 см так, что один угол у них общий, а противоположная этому углу вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки 3 и 5 см. Найти стороны треугольника.

Решение.

В треугольник ABC (рис. 5.196) вписан ромб $ADEF$, $BE = 3$ см, $EC = 5$ см, $AD = DE = EF = FA = 4$ см; тогда $BC = BE + EC = 3 + 5 = 8$ см. Так как треугольники DBE ,

ABC подобны (по двум углам), то $\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} \Leftrightarrow AC = \frac{DE \cdot BC}{BE} = \frac{4 \cdot 8}{3} = \frac{32}{3}$ см.

Аналогично из подобия треугольников FEC и ABC находим, что

$$AB = \frac{FE \cdot BC}{EC} = \frac{4 \cdot 8}{5} = \frac{32}{5} \text{ см.}$$

Ответ: 8 см, $\frac{32}{3}$ см, $\frac{32}{5}$ см.

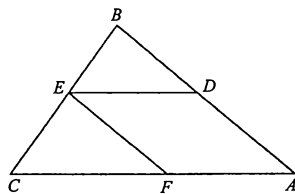


Рис. 5.196

5.169. Прямая пересекает стороны треугольника или их продолжения. По отношениям m, n , в которых она делит две стороны, считая от третьей, определить отношения, в которых она делит третью сторону.

Решение.

Прямая пересекает стороны AB, AC, BC треугольника ABC или их продолжения в точках M, N, P (рис. 5.197). По данным отношениям $\frac{BM}{AM} = m$, $\frac{CN}{AN} = n$ требуется

определить отношение $\frac{BP}{CP} = p$. Проведем AQ , параллельную прямой MNP . Имеем:

$\frac{BP}{PQ} = \frac{BM}{AM} = m$, $\frac{CP}{PQ} = \frac{CN}{AN} = n$. Отсюда $BP = m \cdot PQ$, $CP = n \cdot PQ$, $\frac{BP}{CP} = \frac{m}{n}$. Итак,

$$p = \frac{m}{n}.$$

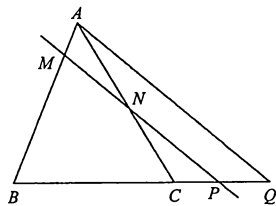


Рис. 5.197

Для решения безразлично, пересекает ли прямая MNP сами стороны треугольника или их продолжения. Заметим, однако, что прямая может или пересекать две стороны и продолжение третьей, как на нашем рисунке, или пересекать продолжения всех трех сторон треугольника. Это нужно иметь в виду, когда из соотношения $p = \frac{m}{n}$ нужно вывести, что точки M, N, P лежат на одной прямой. Такое обращение нашего утверждения справедливо только в том случае, когда две точки лежат на продолжениях сторон треугольника. В несколько другой форме это важное утверждение носит название *теоремы Менелая*.

Ответ: $\frac{m}{n}$.

5.170. Вершины треугольника соединены с некоторой точкой. По отношениям m, n , в которых прямые, исходящие из двух вершин, делят противоположные стороны, считая от третьей стороны, определить отношение, в котором прямая, исходящая из третьей вершины, делит противоположную сторону.

Решение.

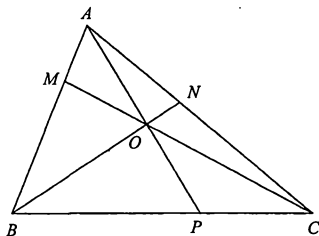


Рис. 5.198

Прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с точкой O , пересекают его стороны AB, AC, BC или их продолжения в точках M, N, P (рис. 5.198).

По данным отношениям $\frac{BM}{AM} = m, \frac{CN}{AN} = n$ и требуется определить отношение

числа $\frac{BP}{CP} = p$. Обозначим для простоты $\frac{PO}{AO} = k$. Применяя теорему Менелая (задача 5.169) к треугольнику ABP с пересекающей MOC и к треугольнику ACP с пересекающей NOB , получаем: $\frac{PC}{BC} = \frac{k}{m}, \frac{PB}{CB} = \frac{k}{n}$, откуда имеем:

$$PC = \frac{k \cdot BC}{m}, PB = \frac{k \cdot CB}{n}, \frac{PB}{PC} = \frac{m}{n}. \text{ Итак, } p = \frac{m}{n}.$$

Заметим, что точки M, N, P или все лежат на сторонах, или одна лежит на стороне, а две другие — на продолжениях сторон треугольника. Полученное утверждение называется *теоремой Чебы*.

Ответ: $\frac{m}{n}$.

5.171. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной a и b . Расстояние между серединами данных хорд равно c . Найти радиус окружности.

Решение.

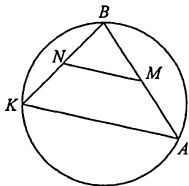


Рис. 5.199

Из точки B окружности (рис. 5.199) проведены хорды $AB = a, BK = b, MN = c$. Так как MN является средней линией треугольника ABK , то $AK = 2MN = 2c$. Искомый радиус R найдем как радиус окружности, описанной около треугольника ABK , по формуле $R = \frac{AB \cdot BK \cdot AK}{4S_{\triangle ABK}}$

или $R = \frac{a \cdot b \cdot 2c}{4S_{\triangle ABK}} = \frac{abc}{2S_{\triangle ABK}}$. Площадь треугольника ABK найдем по формуле Герона:

$S_{\Delta BKC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2c)}$, где $p = \frac{a+b+2c}{2}$. Окончательно выражение для радиуса R принимает вид:

$$R = \frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2c)}}.$$

Ответ: $\frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2c)}}$, где $p = \frac{a+b+2c}{2}$.

5.172. Вывести из свойств пропорциональных отрезков в круге известные числовые соотношения в треугольнике: выражение для квадрата стороны любого треугольника и выражение для квадрата катета и квадрата высоты из вершины прямого угла в прямоугольном треугольнике.

Решение.

В треугольнике ABC (рис. 5.200, а, б) проведем высоту AH и обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CH = m$. Опишем около A окружность радиусом $AC = b$ и обозначим вторую точку пересечения ее с AC через D , а точки пересечения с AB — через E, F . Имеем: $BE \cdot BF = BC \cdot BD$. Если угол C острый (рис. 5.200, а), то это равенство можно переписать в виде: $(AB + AE) \cdot (AB - AF) = BC(BC - 2CH)$ или $(c + b)(c - b) = a(a - 2m) \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2am$. Если угол C тупой (рис. 5.200, б), то это же равенство можно переписать в следующем виде: $(AB + AE) \cdot (AB - AF) = BC(BC + 2CH)$ или $(c + b)(c - b) = a(a + 2m) \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2am$. Если угол C прямой, то, очевидно, BC из секущей превращается в касательную, и мы таким же образом будем иметь: $c^2 = a^2 + b^2$. Доказательство соотношений в прямоугольном треугольнике $h^2 = mn$, $b^2 = an$ ясно из рис. 5.200, в, г.

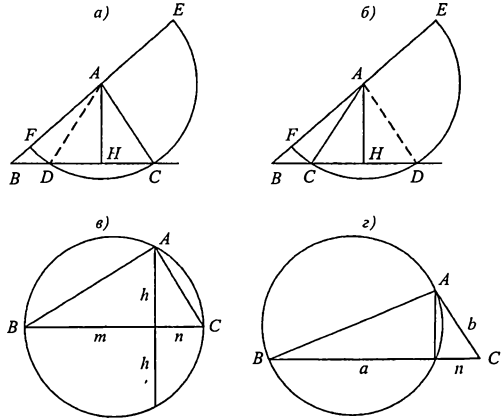


Рис. 5.200

5.173. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении делит она боковые стороны треугольника?

Решение.

Если $B'C'$ делит площадь треугольника ABC пополам (рис. 5.201), то $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta B'C'}} = 2$. Так как площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон, то

$$\frac{AB^2}{AB'^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{AB}{AB'} = \sqrt{2} \Leftrightarrow AB = \sqrt{2}AB', \quad BB' \neq AB - AB' =$$

$$= \sqrt{2}AB' - AB' = (\sqrt{2} - 1)AB', \quad \frac{BB'}{AB'} = \sqrt{2} - 1.$$

Итак, искомое отношение есть $\frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'} = \sqrt{2} - 1$.

Ответ: $\sqrt{2} - 1$.

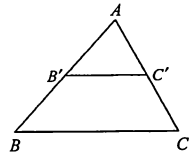


Рис. 5.201

5.174. Луч, проведенный из вершины равностороннего треугольника, делит его основание в отношении 3:2. Найти острый угол между лучом и основанием.

Решение.

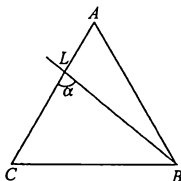


Рис. 5.202

Луч BL делит сторону AC равностороннего треугольника ABC в отношении 3:2 (рис. 5.202).

Требуется найти $\angle BLC = \alpha$ между лучом и основанием AC . Так как $LC > AL$, то $\frac{AL}{LC} = \frac{2}{3}$.

Пусть $AL = 2x$, тогда $LC = 3x$ и $AB = AC = 5x$. Угол A равен $\frac{\pi}{3}$, поэтому $\angle ABL = \alpha - \frac{\pi}{3}$. По теореме синусов для треугольника ALB запишем:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin \angle ALB} &= \frac{AL}{\sin \angle ABL} \Leftrightarrow \frac{5x}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{2x}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin \alpha} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \alpha = \\ &= \frac{2}{5} \Leftrightarrow \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Отсюда $\alpha = \arctg(5\sqrt{3})$.

Ответ: $\arctg(5\sqrt{3})$.

5.175. Трапеция разделена диагоналями на четыре части. Определить площадь трапеции по площадям частей, прилегающих к основаниям.

Решение.

Обозначим площадь трапеции через S , а площадь ее частей, прилегающих к сторонам a, b, c, d , соответственно через S_a, S_b, S_c, S_d . Площади S_a, S_b даны; найдем площади S_c, S_d . Имеем (рис. 5.203):

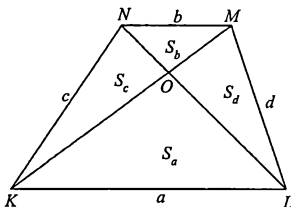


Рис. 5.203

$$\frac{S_a}{S_c} = \frac{LO}{NO}, \frac{S_c}{S_b} = \frac{KO}{MO}, \frac{LO}{NO} = \frac{KO}{MO}. \text{ Отсюда } \frac{S_a}{S_c} = \frac{S_c}{S_b}, S_c^2 = S_a \cdot S_b$$

и, следовательно, $S_c = \sqrt{S_a \cdot S_b}$. Аналогично найдем: $S_d = \sqrt{S_a \cdot S_b}$. Складывая все части трапеции, получим:

$$S = S_a + S_b + 2\sqrt{S_a \cdot S_b} = (\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b})^2.$$

Ответ: $(\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b})^2$.

5.176. Прямая, параллельная основанию треугольника площади S , отсекает от него треугольник площади s . Определить площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая лежит на основании большего треугольника.

Решение.

Площадь четырехугольника $AB'DC'$ (рис. 5.204) не зависит от положения точки D на прямой BC , так как прямая BC параллельна основанию $B'C'$ треугольника $DB'C'$. Поэтому можно заменить площадь четырехугольника $AB'DC'$ площадью

треугольника $AB'C'$. Имеем: $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB}{AB'}$, $\frac{S_{AB'C'}}{S_{AB'C'}} = \frac{AC}{AC'}$, $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$. Отсюда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{S_{AB'C'}}{S_{AB'C'}} \quad \text{или} \quad \frac{S}{S_{AB'C'}} = \frac{S_{AB'C'}}{s}, \quad \text{откуда} \quad S_{AB'C'} = \sqrt{Ss} \quad \text{и, следовательно,}$$

$$S_{AB'DC'} = \sqrt{Ss}.$$

Ответ: \sqrt{Ss} .

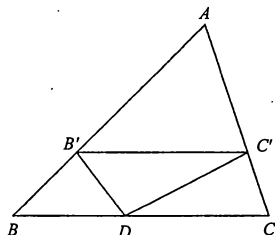


Рис. 5.204

5.177. В треугольнике ABC даны острые углы α и β ($\alpha > \beta$), прилежащие к стороне AC . Из вершины B проведены медиана BD и биссектриса BB_1 . Найти отношение площади треугольника BDB_1 к площади данного треугольника ABC .

Решение.

В треугольнике ABC (рис. 5.205) $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$. Точка D находится между точками A и B_1 (так как $\alpha > \beta$). Треугольники BDB_1 и ABC имеют общую высоту, поэтому

$$\frac{S_{BDB_1}}{S_{ABC}} = \frac{DB_1}{AC}. \quad \text{Пользуясь рисунком, запишем} \quad AC = CB_1 + AB_1, \quad AD = AB_1 + DB_1,$$

$$CD = CB_1 - DB_1. \quad \text{Так как} \quad CD = AD, \quad \text{то} \quad AB_1 + DB_1 = CB_1 - DB_1 \Leftrightarrow DB_1 = \frac{CB_1 - AB_1}{2}.$$

По условию B_1 — биссектриса треугольника ABC , поэтому по свойству биссектрисы

$$\text{угла запишем:} \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (\text{так как по теореме синусов} \quad \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta}).$$

Таким образом,

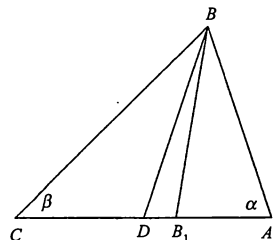


Рис. 5.205

$$\frac{S_{BDB_1}}{S_{ABC}} = \frac{DB_1}{AC} = \frac{CB_1 - AB_1}{2(CB_1 + AB_1)} = \frac{\frac{CB_1}{AB_1} - 1}{2\left(\frac{CB_1}{AB_1} + 1\right)} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - 1}{2\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1\right)} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2(\sin \alpha + \sin \beta)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\text{Ответ:} \quad \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

5.178. Два круга радиусов R и r внешне касательные. Определить радиус круга, касательного к ним и к их общей касательной.

Решение.

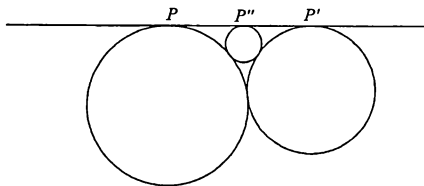


Рис. 5.206

Обозначим искомый радиус через x и точки касания их общей внешней касательной к кругам радиусов R, r, x соответственно через P, P', P'' (рис. 5.206). Имеем: $PP' + P'P'' = PP''$, или по формуле решения задачи 5.116: $2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr}$, откуда

$$2(\sqrt{R} + \sqrt{r})\sqrt{x} = 2\sqrt{Rr} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} \Leftrightarrow x = \frac{Rr}{R + r + 2\sqrt{Rr}}.$$

Ответ: $\frac{Rr}{R + r + 2\sqrt{Rr}}.$

5.179. В треугольнике ABC найти геометрическое место точек M , для которых площади треугольников MAB, MAC равны между собой.

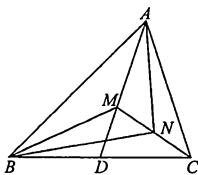


Рис. 5.207

Решение.

Искомое геометрическое место есть медиана AD . Действительно, для всякой точки M медианы AD имеем (рис. 5.207): $S_{ABD} = S_{ACD}$, $S_{MBD} = S_{MCD}$. Вычитая почленно, получаем: $S_{MAB} = S_{MAC}$, так что точки медианы действительно имеют требуемое свойство. Остается доказать, что точки внутри треугольника, не лежащие на медиане, этого свойства не имеют. Пусть N — такая точка и M — точка пересечения CN и AD . Имеем: $S_{NAB} > S_{MAB} = S_{MAC} > S_{NAC}$, откуда $S_{NAB} > S_{NAC}$, что и оставалось доказать.

Ответ: медиана проведенная из вершины A .

5.180. Пусть d — число диагоналей выпуклого многоугольника, а n — число его сторон. Найти все значения n , для которых $d < n$.

Решение.

Так как число диагоналей n -угольника определяется по формуле $d = \frac{(n-3)n}{2}$, а по условию $d < n$, то получаем неравенство

$$\frac{(n-3)n}{2} < n \Leftrightarrow n^2 - 5n < 0 \Leftrightarrow n \in (0; 5). \text{ Так как } n \text{ — число сторон многоугольника, то } n \geq 3 \text{ и } n \in \mathbb{N}, \text{ поэтому } n = 3 \text{ или } n = 4.$$

Ответ: 3 и 4.

5.181. На отрезке и на двух его половинах построены полуокружности в одну сторону. По радиусу R меньших полуокругов определить радиус круга, касательного ко всем трем полуокругам.

Решение.

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 5.208) получим, если обозначим радиус искомого круга через x : $AB = R, AC = AD - CD = 2R - x, BC = BE + CE = R + x$. По теореме Пифагора

$$R^2 + (2R - x)^2 = (R + x)^2 \Leftrightarrow R^2 + 4R^2 - 4Rx + x^2 = R^2 + 2Rx + x^2 \Leftrightarrow 4R^2 = 6Rx \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}R.$$

Ответ: $\frac{2}{3}R$.

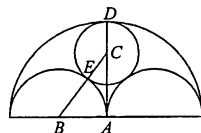


Рис. 5.208

5.182. Прямоугольный сектор радиуса R разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в точке, совпадающей с одним из концов дуги сектора. Определить радиус круга, вписанного в меньшую из этих частей.

Решение.

Соединим центр A круга искомого радиуса x с центрами B, C дуг, к которым он прикасается в точках F, G , и с точкой E , в которой он прикасается к отрезку CD (рис. 5.209). В треугольнике ABC имеем: $AB = BF + AF = R + x, AC = CG - AG = R - x, BC = R$. Кроме того, проводя высоту AH , найдем: $CH = AE = x$. По известной теореме имеем:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CH \Leftrightarrow (R+x)^2 = (R-x)^2 + R^2 - 2Rx \Leftrightarrow R^2 + 2Rx + x^2 = \\ &= R^2 - 2Rx + x^2 + R^2 - 2Rx \Leftrightarrow 6Rx = R^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}R. \end{aligned}$$

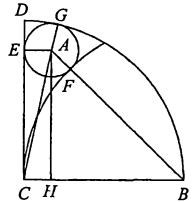


Рис. 5.209

Ответ: $\frac{1}{6}R$.

5.183. Длины сторон треугольника относятся как $m:n:p$ ($m < n < p$). В нем проведена биссектриса наименьшего угла. В каком отношении (считая от вершины) она делится центром окружности, вписанной в этот треугольник?

Решение.

Пусть k — коэффициент пропорциональности сторон треугольника ABC (рис. 5.210), тогда $AB = mk, BC = nk, AC = pk$. По свойству биссектрисы угла треугольника получаем: $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{pk}{nk} = \frac{p}{n}$. Так как $AD + BD = mk$ и

$$AD = \frac{p}{n} BD, \text{ то } BD \left(1 + \frac{p}{n}\right) = mk \Leftrightarrow BD = \frac{nmk}{n+p}.$$

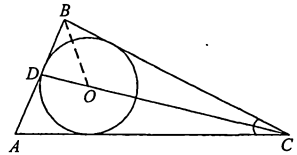


Рис. 5.210

$$\text{В } \triangle OBC \text{ находим искомое отношение: } \frac{OC}{OD} = \frac{BC}{BD} = \frac{nk}{\frac{nmk}{n+p}} = \frac{n+p}{m}.$$

Ответ: $\frac{n+p}{m}$.

5.184. По сторонам b, c и высоте h_a треугольника определить сторону a .

Решение.

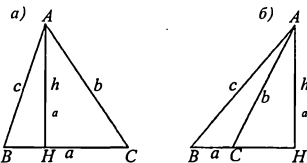


Рис. 5.211

Обозначив (рис. 5.211) через $\angle B$ острый угол при основании BC треугольника ABC , получим два случая: угол C также острый (рис. 5.211, а), и тогда

$$a = BC = BH + CH = \sqrt{c^2 - h_a^2} + \sqrt{b^2 - h_a^2};$$

$$\text{угол } C \text{ тупой (рис. 5.211, б), и тогда}$$

$$a = BC = BH - CH = \sqrt{c^2 - h_a^2} - \sqrt{b^2 - h_a^2}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{c^2 - h_a^2} + \sqrt{b^2 - h_a^2} \text{ или } \sqrt{c^2 - h_a^2} - \sqrt{b^2 - h_a^2}.$$

5.185. По сторонам a, b, c треугольника определить высоту h_a и площадь S .

Решение.

Требуемые выражения легко получить из решения задачи 5.184. Действительно, из уравнения $\sqrt{c^2 - h_a^2} \pm \sqrt{b^2 - h_a^2} = a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h_a^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}. \text{ Если разложить числитель на множители, то приходим к формуле}$$

$$h_a = \frac{1}{2a} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Если же просто раскрыть числитель, то получим формулу:

$$h_a = \frac{1}{2a} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}, \text{ также полезную во многих случаях. Далее, найдем:}$$

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2a} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}, \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

5.186. В равнобокую трапецию вписан круг радиуса r . Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найти площадь трапеции.

Решение.

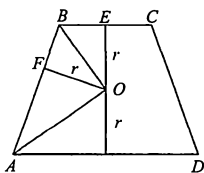


Рис. 5.212

Пусть O — центр круга, вписанного в трапецию $ABCD$ (рис. 5.212). Высота трапеции равна $2r$, поэтому $BF = BE = \frac{1}{2} BC$. Треугольник AOB прямоугольный (так как AO и BO — биссектрисы $\angle BAD$ и $\angle ABC$ соответственно), следовательно,

$$\angle ABO + \angle BAO = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

$$\text{Отсюда } OF^2 = BF \cdot FA \Leftrightarrow r^2 = \frac{r}{2} \cdot FA \Leftrightarrow FA = 2r, AB = 2r + \frac{r}{2} = \frac{5}{2}r.$$

По свойству сторон четырехугольника, в который можно вписать окружность, запишем: $BC + AD = 2AB \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow BC + AD = 2 \cdot \frac{5}{2}r = 5r. \text{ Таким образом, } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot 2r = 5r^2.$$

Ответ: $5r^2$.

5.187. По сторонам треугольника a, b, c определить его медианы m_a, m_b, m_c .

Решение.

Дополним данный треугольник ABC (рис. 5.213, а) до параллелограмма $ABDC$ (рис. 5.213, б).

По известной теореме найдем: $AD^2 + BC^2 = AB^2 + BD^2 + DC^2 + CA^2$ или

$$4m_a^2 + a^2 = c^2 + b^2 + c^2 + b^2 \Leftrightarrow 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \Leftrightarrow m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Так же найдем аналогичные формулы:

$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \Leftrightarrow m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2},$$

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \Leftrightarrow m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Возможно и другое решение данной задачи (с использованием теоремы косинусов): в треугольнике ABC (рис. 5.213, а) имеем: $m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot c \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \angle ABC$. Далее, по той же теореме косинусов $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle ABC \Leftrightarrow -2ac \cos \angle ABC = b^2 - a^2 - c^2$. Следовательно,

$$m_a^2 = \frac{1}{2} \left(2c^2 + \frac{a^2}{2} + b^2 - a^2 - c^2 \right) = \frac{1}{4} (4c^2 + a^2 + 2b^2 - 2a^2 - 2c^2) = \frac{1}{4} (2(b^2 + c^2) - a^2),$$

откуда $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$. Аналогично получаем соответствующие формулы для m_b, m_c .

Ответ: $\frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}, \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

5.188. По медианам m_a, m_b, m_c треугольника определить его стороны a, b, c и площадь S .

Решение.

Пусть Q — центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC (рис. 5.214). Продолжим медиану AQM на отрезок MR , равный QM . В треугольнике BQR отрезок $BM = \frac{1}{2}a$ есть медиана, а стороны — $BQ = \frac{2}{3}m_b$, $BR = CQ = \frac{2}{3}m_c$,

$QR = 2QM = \frac{2}{3}m_a$. По формуле решения задачи 5.187 имеем:

$$4\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 2\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2$$

$$\text{или } a^2 = \frac{8}{9}m_b^2 + \frac{8}{9}m_c^2 - \frac{4}{9}m_a^2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}.$$

Аналогично можем записать:

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}, \quad c = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}.$$

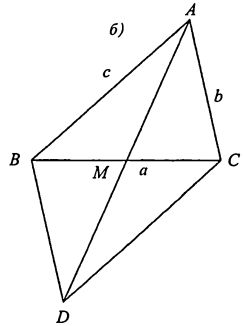
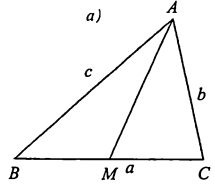


Рис. 5.213

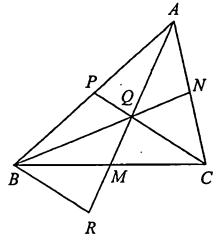


Рис. 5.214

Далее имеем: $S_{BQR} = S_{BQA} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} S$. Отсюда

$$S = 3S_{BQR} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b + \frac{2}{3} m_c \right) \left(\frac{2}{3} m_b + \frac{2}{3} m_c - \frac{2}{3} m_a \right) \left(\frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_c - \frac{2}{3} m_b \right) \right) \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b - \frac{2}{3} m_c \right)}$$

$$\text{или } S = \frac{1}{3} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}, \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}, \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2};$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}.$$

5.189. В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон DC и BC . Найти угол MAN .

Решение.

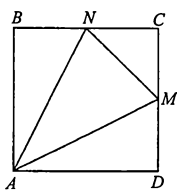


Рис. 5.215

Пусть сторона квадрата $ABCD$ (рис. 5.215) равна a . Тогда из прямоугольных треугольников

$$ABN, NCM, ADM \text{ по теореме Пифагора находим: } AN^2 = AB^2 + BN^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4} a^2,$$

$$NM^2 = NC^2 + CM^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}, \quad AM^2 = AD^2 + DM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4} a^2.$$

Далее, по теореме косинусов из треугольника ANM найдем искомый угол MAN :

$$MN^2 = AN^2 + AM^2 - 2 \cdot AN \cdot AM \cdot \cos \angle MAN \Leftrightarrow \cos \angle MAN = \frac{AN^2 + AM^2 - NM^2}{2 \cdot AN \cdot AM} = \frac{\frac{5}{4} a^2 + \frac{5}{4} a^2 - \frac{1}{2} a^2}{2 \cdot \sqrt{\frac{5}{4} a^2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4} a^2}} = \frac{2a^2}{5a^2} = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{2}{5} \Leftrightarrow \angle MAN = \arccos \frac{2}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{2}{5}.$$

5.190. По сторонам a, b, c треугольника определить биссектрису β_a .

Решение.

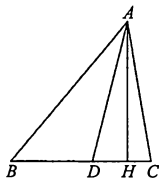


Рис. 5.216

В треугольнике ABC (рис. 5.216) биссектриса $AD = \beta$ делит основание $BC = a$ на отрезки $CD = b', BD = c'$, пропорциональные боковым сторонам $AC = b, AB = c$. Можно принять: $b' = kb$,

$$c' = kc \text{ и множитель } k \text{ определить из условия: } kb + kc = a \Leftrightarrow kb + kc = a \Leftrightarrow k = \frac{a}{b+c}.$$

По отрезкам a, b, c, b', c' можно вычислить биссектрису β . Для этого проведем высоту AH и введем вспомогательный отрезок $DH = t$. Из треугольников ACD и ABD имеем: $b^2 = \beta^2 + k^2 b^2 - 2kbt$, $c^2 = \beta^2 + k^2 c^2 + 2kct$. Чтобы исключить t , умножим первое уравнение на c , второе — на b и сложим почленно. Получим: $b^2 c + c^2 b = \beta^2 c + \beta^2 b + k^2 b^2 c + k^2 c^2 b \Leftrightarrow bc(b+c) =$

$= \beta^2(b+c) + k^2bc(b+c) \Leftrightarrow bc = \beta^2 + k^2bc \Leftrightarrow \beta^2 = bc - k^2bc$. Подставляя сюда найденное значение k , получим:

$$\beta^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}}.$$

Заметим, что из формул $\beta^2 = bc - k^2bc$, $kb = b'$, $kc = c'$ получаем, что $\beta^2 = bc - b'c'$, т.е. квадрат биссектрисы равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания.

Отметим: $\sqrt{bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}}.$

5.191. По сторонам a, b, c треугольника определить радиус R описанного круга, r — радиус вписанного круга и радиусы ρ_a, ρ_b, ρ_c вневписанных кругов.

Решение.

В треугольнике ABC проведена высота AH и центр описанного круга O соединен с вершиной A и серединой P стороны AB (рис. 5.217). В решении задачи 5.061 было доказано, что углы OAP, CAH равны. Следовательно, прямоугольные треугольники OAP, CAH подобны, и мы можем написать:

$$\frac{OA}{AP} = \frac{AC}{AH} \Leftrightarrow \frac{R}{\frac{1}{2}c} = \frac{b}{h_a} \Leftrightarrow R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{abc}{2ah_a} = \frac{abc}{4S}, \text{ где } S — \text{площадь треугольника } ABC.$$

Далее, примем центр вписанного круга за вершину, а стороны треугольника за основания трех других треугольников. Основания этих треугольников равны a, b, c , а высоты их равны r . Складывая из площади $\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = S \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)r = S$ или обозначив полу-

периметр треугольника ABC через p , $pr = S \Leftrightarrow r = \frac{S}{p}$.

Для определения радиуса ρ_a вневписанного круга, касательного к стороне a и к продолжениям сторон b, c , найдем таким же образом уравнение $\frac{1}{2}b\rho_a + \frac{1}{2}c\rho_a - \frac{1}{2}a\rho_a = S \Leftrightarrow \rho_a = \frac{S}{p-a}$. Аналогично получим формулы: $\rho_b = \frac{S}{p-b}$, $\rho_c = \frac{S}{p-c}$.

Отметим: $\frac{abc}{4S}$; $\frac{S}{p}$; $\frac{S}{p-a}$; $\frac{S}{p-b}$; $\frac{S}{p-c}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, S — площадь данного треугольника.

5.192. Углы треугольника относятся как 1:5:12. Наибольшая сторона треугольника равна $c = 2\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение.

Углы данного треугольника относятся как 1:5:12, т.е. $k + 5k + 12k = 180^\circ \Leftrightarrow 18k = 180^\circ \Leftrightarrow k = 10^\circ$; следовательно, углы треугольника равны $10^\circ, 50^\circ, 120^\circ$. Радиус окружности, описанной около этого треугольника, найдем по формуле

$$R = \frac{abc}{4S}. \text{ Так как } S = \frac{1}{2}ab \sin 120^\circ \text{ (наибольшая сторона треугольника } c \text{ лежит против наибольшего угла в } 120^\circ), \text{ то}$$

$$R = \frac{abc}{4 \cdot \frac{1}{2}ab \sin 120^\circ} = \frac{c}{2 \sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2.$$

Отметим: 2.

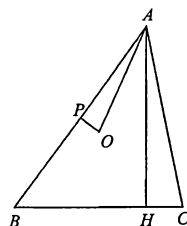


Рис. 5.217

5.193. Выразить разность квадратов диагоналей p, q параллелограмма через расстояния a, b, c, d произвольной точки от его вершин.

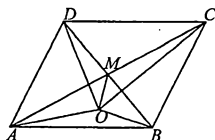


Рис. 5.218

Решение.

Требуется выразить разность квадратов диагоналей $AC = p, BD = q$ через расстояния $OA = a, OB = b, OC = c, OD = d$ произвольной точки O от вершин (рис. 5.218). Треугольники AOC, BOD имеют общую медиану OM . По формулам решения задачи 5.187 имеем: $4OM^2 = 2a^2 + 2c^2 - p^2 = 2b^2 + 2d^2 - q^2 \Leftrightarrow p^2 - q^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)$.

Ответ: $p^2 - q^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)$.

5.194. Выразить разность квадратов диагоналей p, q параллелограмма через его стороны m, n и площадь S .

Решение.

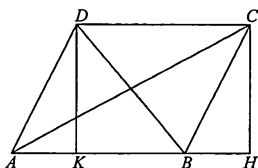


Рис. 5.219

Требуется выразить разность квадратов диагоналей $AC = p, BD = q$ через стороны $AB = CD = m, AD = CB = n$ и площадь S (рис. 5.219). Проведем высоты CH, DK и обозначим еще $CH = DK = h, BH = AK = k$. Из треугольников ABC, ABD найдем: $p^2 = m^2 + n^2 + 2mk, q^2 = m^2 + n^2 - 2mk$. Вычитая почленно, получим: $p^2 - q^2 = 4mk$.

Из треугольника BCH или ADK найдем: $k = \sqrt{n^2 - h^2}$. Следовательно, $p^2 - q^2 = 4m\sqrt{n^2 - h^2} = 4\sqrt{m^2 n^2 - m^2 h^2}$. Но $mh = S$, так что $p^2 - q^2 = 4\sqrt{m^2 n^2 - S^2}$.

Ответ: $p^2 - q^2 = 4\sqrt{m^2 n^2 - S^2}$.

5.195. Найти углы прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 2, а гипотенуза равна 13.

Решение.

Пусть a, b — катеты, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности. Тогда $(a-r) + (b-r) = c \Leftrightarrow 2r = a + b - c$. Используя

теорему Пифагора, получаем: $\begin{cases} a+b=c+2r, \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=17, \\ a^2+b^2=169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12, \\ b=5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b=12, \\ a=5. \end{cases}$ Следовательно, $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}$,

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin \frac{5}{13}, \beta = \arcsin \frac{12}{13}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{5}{13}, \arcsin \frac{12}{13}$.

5.196. Выразить площадь S параллелограмма через стороны m, n и расстояния a, b, c, d произвольной точки от вершин.

Решение.

Сравнивая выражения для $p^2 - q^2$, полученные в решениях задач 5.193 и 5.194, найдем:

$$2(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) = 4\sqrt{m^2 n^2 - S^2} \Leftrightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2 n^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{4m^2 n^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}$.

5.197. По основаниям a, b ($a > b$) и боковым сторонам c, d трапеции определить ее диагонали m, n .

Решение.

Даны (рис. 5.220) стороны $AB = a, CD = b, AD = c, CB = d$. Нужно определить диагонали $AC = m, BD = n$. Диагональ m можно было бы определить из треугольника ABC , если бы был известен отрезок $BH = k$ от вершины противоположащего угла до основания высоты: $m^2 = a^2 + d^2 \mp 2ak$. Чтобы найти уравнение, связывающее отрезок k с известными величинами, проведем CK параллельно DA . Из треугольника CKB , в котором $CK = DA = c, KB = AB - AK = AB - CD = a - b$, найдем искомое уравнение: $c^2 = (a - b)^2 + d^2 \mp 2(a - b)k$. Чтобы исключить k из двух полученных уравнений, умножим первое на $a - b$, второе — на $-a$ и сложим почленно. Получим уравнение $m^2(a - b) - c^2a = ab(a - b) - d^2b$, откуда найдем:

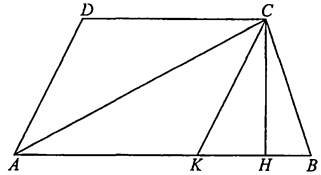


Рис. 5.220

$$m^2 = ab + \frac{c^2a - d^2b}{a - b}. \text{ По аналогии найдем: } n^2 = ab + \frac{d^2a - c^2b}{a - b}.$$

Заметим, что после складывания выражений для m^2 и n^2 , находим:

$$m^2 + n^2 = 2ab + \frac{c^2a + d^2a - c^2b - d^2b}{a - b} = 2ab + \frac{(c^2 + d^2)(a - b)}{a - b} = c^2 + d^2 + 2ab, \text{ т.е. сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон с удвоенным произведением оснований.}$$

$$\text{Ответ: } m = \sqrt{ab + \frac{c^2a - d^2b}{a - b}}; n = \sqrt{ab + \frac{d^2a - c^2b}{a - b}}.$$

5.198. Две окружности радиусом 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D так, что $CD = 8$, а B лежит между C и D . Найдите площадь треугольника ACD .

Решение.

Определим $AB = \frac{24}{5}$ (рис. 5.221). Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусами 3 и 4 соответственно и AH, O_1K, O_2L — перпендикуляры, опущенные на CD . Тогда $KL = \frac{1}{2}CD = 4$ ($KB = \frac{1}{2}CB, BL = \frac{1}{2}BD$). Проведем прямую O_1N , параллельную CD ($O_1N = KL$). Треугольник O_1O_2N подобен треугольнику ABH , откуда $AH = \frac{96}{25}$. Следовательно,

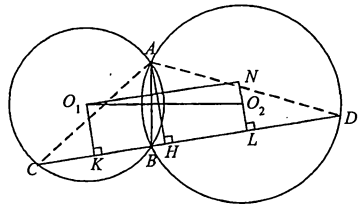


Рис. 5.221

$$S_{\Delta CDB} = \frac{1}{2}CD \cdot AH = \frac{384}{25}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{384}{25}.$$

5.199. По сторонам a, b, c, d трапеции определить ее площадь.

Решение.

В обозначениях решения задачи 5.197 имеем (см. рис. 5.220):

$$S_{CKB} = \frac{1}{4} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(c+d-a+b)}; \quad \frac{S_{ABCD}}{S_{CKB}} = \frac{\frac{1}{2}(AB+CD) \cdot CH}{\frac{1}{2}KB \cdot CH} = \frac{(AB+CD)}{KB} = \frac{a+b}{a-b}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{ABCD} = \frac{a+b}{a-b} \cdot S_{CKB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(c+d-a+b)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(c+d-a+b)}.$$

5.200. Выразить площадь четырехугольника через стороны a, b, c, d и диагонали m, n .

Решение.

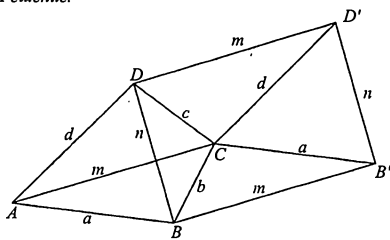


Рис. 5.222

Перенесем параллельно треугольник ABD в положение $CB'D'$ (рис. 5.222). Имеем: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD} = S_{CB'D'} + S_{CBD}$. Но по решению задачи 5.092 $S_{CBD} + S_{CB'D'} = \frac{1}{2} S_{BB'D'D}$. Следовательно,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{BB'D'D}$. Задача сведена к определению площади параллелограмма $BB'D'D$. Последнюю можно определить с помощью формулы решения задачи 5.196 по сторонам, равным диагоналям четырехугольника, и расстояниям точки C от вершин, равным сторонам четырехугольника. Получим:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{BB'D'D} = \frac{1}{4} \sqrt{4m^2 n^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4} \sqrt{4m^2 n^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}.$$

5.201. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Найти отношение площадей треугольников ABC и AED , если $AB = 6$, $AC = 5$, $CB = 7$.

Решение.

Пусть $\angle ABC = \beta$. Заметим, что $\angle EOD = \angle ABC$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 5.223). Тогда:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD, \quad S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin \angle EAO =$$

$$= \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \cos \beta \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AED}} = \frac{BC}{AE \cos \beta}.$$

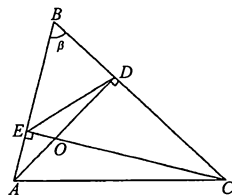


Рис. 5.223

Из треугольника ABC , используя теорему косинусов, определим $\cos \beta = \frac{5}{7}$. Выражая EC^2 из треугольников BCE и AEC , получим уравнение относительно AE : $AC^2 - AE^2 = BC^2 - (AB - AE)^2 \Leftrightarrow AE = 1$. Следовательно, $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle AED} = 49:5$.

Ответ: 49:5.

5.202. Выразить диагонали m, n вписанного четырехугольника через стороны a, b, c, d .

Решение.

Проведем в треугольниках ABC, ADC высоты CH, CK и определим из обоих треугольников диагональ AC (рис. 5.224): $m^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot BH$, $m^2 = d^2 + c^2 - 2d \cdot DK$. Чтобы исключить из этих уравнений BH и DK , достаточно связать эти величины еще одним уравнением. Такое уравнение получим из рассмотрения треугольников CHB и CDK . По свойству вписанного четырехугольника треугольники CBH и CDK имеют равные острые углы CBH и CDK . Следовательно, они подобны, и мы имеем

пропорцию: $\frac{BH}{DK} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow BH \cdot c = DK \cdot b$. Полученное соотношение позволяет исключить из наших уравнений BH и DK посредством умножения их соответственно на cd и ab и сложения. Получим уравнение

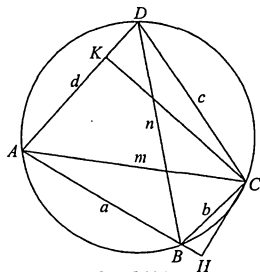


Рис. 5.224

$$m^2(ab + cd) = a^2cd + abd^2 + b^2cd + abc^2 \Leftrightarrow m^2(ab + cd) = (ac + bd)(ad + bc) \Leftrightarrow m^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

В числителе имеем сумму произведений противоположных сторон и сумму произведений сторон, сходящихся в концах определяемой диагонали, а в знаменателе — сумму произведений сторон, сходящихся в концах другой диагонали. По аналогии получим: $n^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$.

Заметим, что при перемножении полученных формул найдем: $m^2n^2 = (ac + bd)^2 \Leftrightarrow mn = ac + bd$, что составляет теорему Птолемея.

Ответ: $\sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$; $\sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$.

5.203. Выразить площадь вписанного четырехугольника через стороны.

Решение.

Вспользуемся формулой $S = \frac{1}{4} \sqrt{4m^2n^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}$, полученной при решении задачи 5.200. Имеем:

$S = \frac{1}{4} \sqrt{(2mn + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2mn - a^2 - c^2 + b^2 + d^2)}$. Подставив в это выражение формулу $mn = ac + bd$ из замечания решения задачи 5.202, получим:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{(2ac + 2bd + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2ac + 2bd - a^2 - c^2 + b^2 + d^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{((a+c)^2 - (b-d)^2) \times ((b+d)^2 - (a-c)^2)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+c+b-d)(a+c-b+d)(b+d+a-c)(b+d-a+c)}. \end{aligned}$$

Обозначив полупериметр данного четырехугольника через p ($p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$), найдем

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Ответ: $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

5.204. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около него, равно $\frac{1}{4}$. Найти углы треугольника.

Решение.

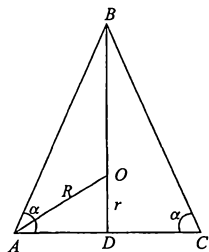


Рис. 5.225

Пусть O — центр вписанной окружности радиуса r в данный треугольник ABC , $\angle A = \angle C = \alpha$, R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 5.225). Если D — середина AC , то $r = OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = \frac{AC}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. По теореме синусов

$$R = \frac{AC}{2 \sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{AC}{2 \sin 2\alpha}. \text{ Отсюда } \frac{r}{R} = \frac{1}{4} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos^2 \alpha - 8 \cos \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{2\sqrt{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \alpha =$$

$$= \arccos \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \angle B = 180^\circ - 2\alpha = 2 \arcsin \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \quad (\text{так как } \arcsin \alpha + \arccos \alpha = \frac{\pi}{2}).$$

Ответ: $\arccos \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$, $2 \arcsin \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ или $\arccos \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, $2 \arcsin \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

5.205. По радиусу R и хордам a , b ($a > b$) двух дуг круга определить хорду суммы и разности этих дуг.

Решение.

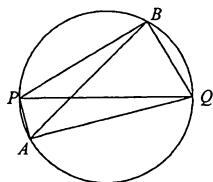


Рис. 5.226

Пусть $PA = a$, $PB = b$ — данные хорды, $AB = x$ — искомая хорда, $PQ = 2R$ — диаметр круга (рис. 5.226). Из треугольников PAQ , PBQ найдем: $AQ = \sqrt{4R^2 - a^2}$, $BQ = \sqrt{4R^2 - b^2}$. В случае, когда хорда AB стягивает сумму дуг, стягиваемых хордами PA , PB , найдем по

$$\text{теореме Птолемея: } 2Rx = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}.$$

Подобным же образом найдем для хорды разности данных дуг выражение:

$$x = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} - b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}.$$

Ответ: $a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}$; $a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} - b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}$.

5.206. По хордам a, b, c трех дуг, в сумме составляющих полуокружность, составить уравнение для определения диаметра круга.

Решение.

Пусть $AB = a, BC = b, CD = c, AD = 2R = x$ (рис. 5.227). Тогда из треугольников ABD, ACD найдем: $BD = \sqrt{x^2 - a^2}, AC = \sqrt{x^2 - c^2}$. По теореме Птолемея (см. задачу 5.202): $\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - c^2} = bx + ac$. Это и есть искомое уравнение. После возведения в квадрат и приведения подобных членов, оно примет вид:

$$x^4 - (a^2 + b^2 + c^2)x^2 - 2abcx = 0.$$

Это уравнение можно сократить на x , так как искомый диаметр не может быть равен нулю. Окончательно получаем: $x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$.

Ответ: $x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$.

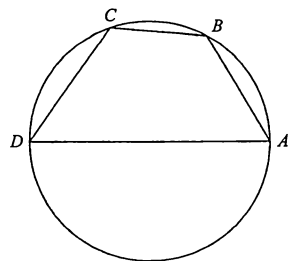


Рис. 5.227

5.207. Отношение радиуса круга, описанного около трапеции, к радиусу круга, вписанного в нее, равно $\sqrt{6}$. Найти углы трапеции.

Решение.

Если r — радиус окружности, вписанной в данную трапецию $ABCD$ (рис. 5.228), R — радиус окружности, описанной около $ABCD$, то трапеция $ABCD$ — равнобедренная. Пусть CH — высота трапеции, $\angle ADC = \alpha$; тогда $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$,

$$CH = 2r, CD = \frac{2r}{\sin \alpha}, AB = \frac{BC + AD}{2} \quad (\text{так как } AB = CD \text{ и } AB + CD = AD + BC) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{AH - CH \operatorname{tg} \alpha + AH + CH \operatorname{tg} \alpha}{2} = AH = \frac{2r}{\sin \alpha}. \quad \text{По теореме синусов для треугольника } ACD \text{ имеем:}$$

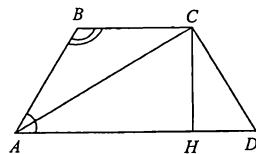


Рис. 5.228

$$AC = 2R \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow AC^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha = AH^2 + CH^2 = 4r^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + 1 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 6}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ, 180^\circ - \alpha = 135^\circ.$$

Ответ: $45^\circ, 135^\circ$.

5.208. В круг радиусом R вписаны три равных круга, касательных между собой. Определить этот радиус.

Решение.

Пусть будет O — центр данного круга; A, B, C — центры вписанных кругов, P — точка касания кругов A и B , Q — точка касания кругов A и C (рис. 5.229). В правильном треугольнике ABC имеем:

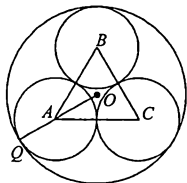


Рис. 5.229

$a = AB = AP + BP = x + x = 2x$, $r = OA = OQ - AQ = R - x$. Соотношение $a = r\sqrt{3}$ дает уравнение $2x = (R - x)\sqrt{3}$, из которого находим: $x = R(2\sqrt{3} - 3)$.

Ответ: $R(2\sqrt{3} - 3)$.

5.209. Круг радиусом R обложен четырьмя равными кругами, каждый из которых касательный к двум соседним. Определить радиус этих кругов.

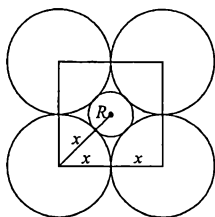


Рис. 5.230

Решение.

Центры внешних кругов (рис. 5.230) образуют квадрат, в котором $a = 2x$, $r = R + x$. Соотношение $a = r\sqrt{2}$ дает уравнение $2x = (R + x)\sqrt{2}$, из которого находим:

$$x = R(1 + \sqrt{2}).$$

Ответ: $R(1 + \sqrt{2})$.

5.210. В сегмент с центральным углом α вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой хорды сегмента, а две другие лежат на дуге сегмента. Высота треугольника равна H . Найти радиус дуги сегмента.

Решение.

Пусть O — центр окружности радиуса R с данным сегментом ST , $\alpha = \angle SOT$, B — середина хорды ST , треугольник ABC — правильный треугольник с высотой H , вписанный в сегмент ST (рис. 5.231). Продолжим OB до пересечения с AC в точке D . Так как треугольники AOB , COB равны, то OD — биссектриса угла AOC ; отсюда OD — высота угла AOC . Следовательно,

$$R^2 = DC^2 + OD^2 \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{H}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(H + R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2, \text{ так как } DC = \frac{H}{\sqrt{3}}, BD = H, OB = R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом получаем квадратное уравнение относительно R :

$$R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2RH \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{4}{3}H^2 = 0 \Leftrightarrow R = \frac{H}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Ответ: $\frac{H}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right)$

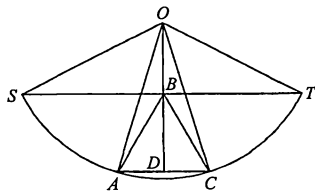


Рис. 5.231

5.211. Вычислить сторону правильного описанного треугольника, квадрата и шестиугольника, если дан радиус R вписанной окружности.

Решение.

Соединив точки касания сторон правильного описанного треугольника к кругу, получим правильный вписанный треугольник, стороны которого есть средние линии описанного треугольника. Пусть a_3, b_3 — стороны вписанного и описанного треугольника соответственно; тогда $b_3 = 2a_3 = 2R\sqrt{3}$.

Соединив точки касания противоположных сторон описанного квадрата к кругу, получим диаметр круга, который равен стороне квадрата как его средняя линия. Пусть b_4 — сторона описанного квадрата; тогда $b_4 = 2R$.

Сторону описанного шестиугольника вычислим по общей формуле $b_6 = \frac{2a_6 R}{\sqrt{4R^2 - a_6^2}} = \frac{2R \cdot R}{\sqrt{4R^2 - R^2}} = R\sqrt{\frac{4}{3}}$, где a_6 и b_6 —

стороны вписанного и описанного шестиугольника соответственно.

Ответ: $2R\sqrt{3}$; $2R$; $2R\sqrt{\frac{4}{3}}$.

5.212. На диаметре полукруга радиусом R построен правильный треугольник. Вычислить площадь его части вне полукруга.

Решение.

Так как вписанный угол ABC равен 60° , то дуга DEC , на которую он опирается, равна 120° и, следовательно, дуга BD равна 60° (рис. 5.232). Так же найдем, что и дуга CE равна 60° . Отсюда видно, что треугольники OBD, OCE также правильные. Площадь каждого из них составляет четверть площади треугольника ABC и, следовательно, оставшаяся площадь $ADOE$ составляет половину площади треугольника ABC . Вычтя из площади $ADOE$ площадь ODE , составляющую шестую часть данного круга, получим искомую площадь:

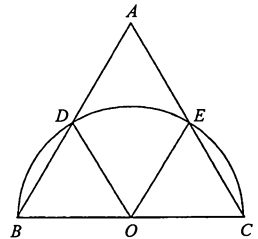


Рис. 5.232

$$S_{ADE} = S_{ADOE} - S_{ODE} = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3} - \frac{1}{6} \pi R^2 = R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right).$$

Ответ: $R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$.

5.213. В параллелограмме $ABCD$ каждая сторона разделена на равные отрезки, число которых m для противоположных сторон AB, CD и n для противоположных сторон AD, BC . Начало первого, второго и т. д. отрезков стороны AB , считая от точки A , соединено с концом первого, второго и т. д. отрезков стороны CD , считая от точки D . Точно так же конец первого, второго и т. д. отрезков стороны AD , считая от точки A , соединен с началом первого, второго и т. д. отрезков стороны BC , считая от точки B . Этими прямыми параллелограмм разбивается на части, имеющие вид треугольников, трапеций и параллелограммов. Какую часть площади всего параллелограмма составляет площадь одного такого параллелограмма?

Решение.

На рис. 5.233 $m = 4, n = 3$. Чтобы узнать, во сколько раз площадь данного параллелограмма $ABCD$ больше параллелограмма $HKLM$, найдем сначала, во сколько раз S_{ABCD} больше S_{AEFG} , а затем найдем, во сколько раз S_{AEFG} больше S_{HKLM} .

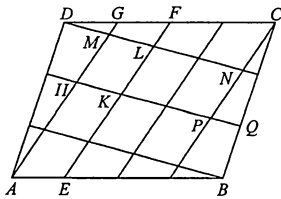


Рис. 5.233

Примем в параллелограммах $ABCD$, $AEFG$ стороны AB , AE за основания. Так как $AB = m \cdot AE$, то и $S_{ABCD} = m \cdot S_{AEFG}$.

Примем в параллелограммах $AEFG$, $HKLM$ стороны AG , HM за основания. Высоты их будут равны и площади будут относиться как основания. Имеем: $AG = AM + MG$. Из рассмотрения треугольника AMD найдем: $AM = n \cdot HM$.

Из рассмотрения треугольника CDN найдем: $MG = \frac{1}{m} \cdot CN$. Из рассмотрения треугольника CPQ и параллелограмма $HMNP$ найдем: $CN = NP = HM$. Сопоставляя все это, получим: $AG = n \cdot HM + \frac{1}{m} \cdot HM = \left(n + \frac{1}{m}\right) \cdot HM$, откуда

$$S_{AEFG} = \left(n + \frac{1}{m}\right) \cdot S_{HKLM}, \text{ и затем } S_{ABCD} = m \left(n + \frac{1}{m}\right) \cdot S_{HKLM}, \text{ или } S_{ABCD} = (mn + 1) \cdot S_{HKLM}. \text{ Следовательно,}$$

$S_{HKLM} = \frac{1}{mn + 1} S_{ABCD}$, т.е. площадь маленького параллелограмма составляет $(mn + 1)$ -ю часть площади большого, например на нашем рисунке — 13-ю.

Ответ: $(mn + 1)$ -ю часть.

5.214. На отрезке и двух его неравных частях построены полуокружности в одну сторону. По радиусам R , r меньших полуокружеств определить радиус круга, касательного ко всем трем полуокружностям.

Решение.

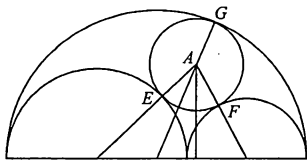


Рис. 5.234

Соединим центр A круга искомого радиуса x с центрами B , C , D кругов радиусами R , r , $R + r$, к которым он прикасается в точках E , F , G (рис. 5.234). Имеем: $AB = BE + AE = R + x$, $AC = CF + AF = r + x$, $AD = DG - AG = (R + r) - x$, $BD = (R + r) - R = r$, $CD = (R + r) - r = R$. Между этими отрезками существует некоторое соотношение, так как отрезок AD вполне определяется заданием остальных отрезков. Чтобы найти это соотношение, опустим перпендикуляр AP на общий диаметр данных полуокружеств и введем сначала вспомогательный отрезок $DP = y$. По теореме о квадрате стороны для сторон AB , AC треугольников ABD , ACD , из которых один остроугольный, а другой тупоугольный, имеем:

$$(R + x)^2 = ((R + r) - x)^2 + r^2 + 2ry, \quad (r + x)^2 = ((R + r) - x)^2 + R^2 - 2Ry.$$

Умножив первое уравнение на R , а второе — на r и сложив почленно, исключим y и получим искомого соотношение:

$$R(R + x)^2 + r(r + x)^2 = (R + r)((R + r) - x)^2 + Rr^2 + R^2r \Leftrightarrow R^3 + 2R^2x + Rx^2 + r^3 + 2r^2x + rx^2 = (R + r)^3 - 2(R + r)^2x + (R + r)x^2 + Rr^2 + R^2r \Leftrightarrow 2(R^2 + r^2 + (R + r)^2)x = (R + r)^3 + Rr^2 + R^2r - R^3 - r^3 \Leftrightarrow 2(R^2 + r^2 + (R + r)^2)x = 4Rr(R + r), \text{ откуда } x = 2 \frac{Rr(R + r)}{R^2 + r^2 + (R + r)^2}.$$

Ответ: $2 \frac{Rr(R + r)}{R^2 + r^2 + (R + r)^2}.$

5.215. По сторонам a , b , c треугольника определить длины касательных из его вершины к вписанному и внеписанным кругам.

Решение.

Обозначим длины касательных к вписанному кругу из вершин A, B, C соответственно через x, y, z (рис. 5.235): $AD_1 = AD_2 = x$, $BD_1 = BD_3 = y$, $CD_1 = CD_2 = z$. Эти величины связаны уравнениями: $y + z = a$, $x + z = b$, $x + y = c$. Складывая

почленно и деля пополам, найдем: $x + y + z = \frac{1}{2}(a + b + c) = p$, где p —

полупериметр треугольника ABC . Вычитая из полученного уравнения каждое из предыдущих, найдем: $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$, т.е. касательная из вершин треугольника к вписанному кругу равна полупериметру без противолежащей стороны. Теперь обозначим через x, y, z касательные из вершин A, B, C к вневписанному кругу, противолежащему вершине A : $AE_2 = AE_3 = x$, $BE_1 = BE_3 = y$, $CE_1 = CE_2 = z$. Для этих величин имеем уравнения: $y + z = a$, $x - z = b$, $x - y = c$. Складывая их почленно и деля пополам,

найдем: $x = \frac{1}{2}(a + b + c) = p$, т.е. касательная из вершины треугольника к противлежащему вневписанному кругу равна полупериметру. Из второго и третьего уравнений найдем теперь $z = p - b$, $y = p - c$. Сравнивая эти выражения с

выведенными выше для случая вписанного круга, убеждаемся, что сторона треугольника делится точками касания вписанного и вневписанного кругов на отрезки равные, но расположенные в обратном порядке.

Ответ: $p - a, p - b, p - c; p, p - c, p - b$, где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

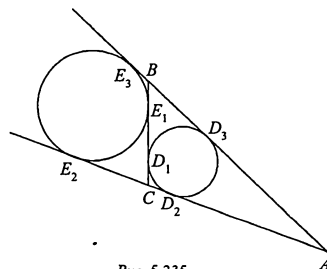


Рис. 5.235

5.216. По сторонам прямоугольного треугольника определить радиусы вписанного и вневписанного кругов.

Решение.

Радиусы вписанного или вневписанного круга, проведенные к точкам касания с катетами, образуют вместе с касательными к этому кругу из вершин прямого угла квадрат и, следовательно, равны этим касательным. Это показано на рис. 5.236 для вневписанного круга, противолежащего вершине прямого угла. На основании формул решения задачи 5.215 для длин касательных найдем: $r = p - a$, $\rho_a = p$, $\rho_b = p - c$, $\rho_c = p - b$, где

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c), \quad a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB.$$

Те же формулы можно получить из общих формул решения задачи 5.191. Например:

$$\begin{aligned} \rho_a &= \frac{S}{p - a} = \frac{\frac{1}{2}bc}{\frac{1}{2}(b + c - a)} = \frac{bc}{b + c - a} = \frac{bc}{b + c - \sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{bc(b + c + \sqrt{b^2 + c^2})}{(b + c)^2 - (b^2 + c^2)} = \\ &= \frac{bc(b + c + \sqrt{b^2 + c^2})}{2bc} = \frac{1}{2}(b + c + \sqrt{b^2 + c^2}) = \frac{1}{2}(a + b + c) = p. \end{aligned}$$

Ответ: $p - a, p, p - c, p - b$, где p — полупериметр данного треугольника.

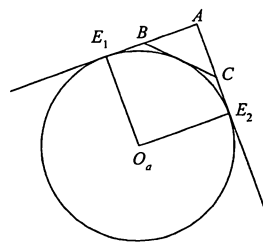


Рис. 5.236

5.217. По сторонам a, b, c треугольника определить расстояния ортоцентра от вершин.

Решение.

Из подобия треугольников ADK, BCK (рис. 5.237) следует пропорция $\frac{AD}{BC} = \frac{AK}{BK} \Leftrightarrow \frac{AD}{a} = \frac{AK}{h_b}$. Отрезок AK определим из

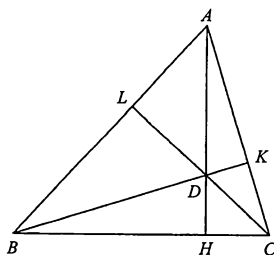


Рис. 5.237

соотношения $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2b \cdot AK$, которое дает: $AK = \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$. Под-

ставляя это выражение в найденную пропорцию, получим: $\frac{AD}{a} = \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bh_b}$.

Отсюда $AD = \pm \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bh_b} = \pm \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{4S}$ (площадь S можно опреде-

лить по формулам Герона). Аналогично получим еще две формулы:

$BD = \pm \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{4S}$, $CD = \pm \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4S}$. Знак плюс относится к рас-

стояниям ортоцентра от вершин острых углов, а знак минус — к расстояниям от вершин тупых углов.

Ответ: $\pm \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{4S}$, $\pm \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{4S}$, $\pm \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4S}$.

5.218. В круг радиусом R вписаны три равных круга, касательных друг к другу. Вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной этими тремя кругами.

Решение.

Согласно решению задачи 5.208 (см. рис. 5.229), радиус вписанных кругов будет $x = R(2\sqrt{3} - 3)$. Искомая площадь S есть разность площади треугольника ABC , образуемого центрами этих кругов, и площадей трех секторов этих кругов с углами 60° . Отсюда найдем: $S = x^2\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{6}\pi x^2 = x^2(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi) = R^2(21 - 12\sqrt{3})(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi)$ (кв. ед.).

Ответ: $R^2(21 - 12\sqrt{3})(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi)$ кв. ед.

5.219. Вычислить сторону и все диагонали правильного вписанного десятиугольника.

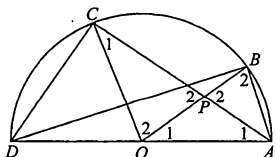


Рис. 5.238

Решение.

Обозначим для однородности сторону и диагонали правильного вписанного десятиугольника через d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 по числу десятых полной окружности, содержащихся в стягиваемых ими дугах. На рис. 5.238 $AB = d_1, AC = d_2, BD = d_3, CD = d_4, AD = d_5$. Для упрощения вычислений примем радиус за единицу длины и десятую часть полной окружности за единицу дуги или угла. Проведем радиусы OB, OC и отметим точку пересечения P прямых OB, AC . В выбранной единице угла найдем непосредственно: $\angle AOB = 1, \angle BOC = 2, \angle AOC = 3$. Так как в той же единице сумма углов треугольника

равна 5, то из равнобедренных треугольников AOB, AOC найдем: $\angle ABO = 2, \angle ACO = \angle CAO = 1$, и по теореме о внешнем угле для треугольника APC : $\angle APB = \angle OPC = 2$.

Из равенства углов при соответствующих основаниях заключаем, что треугольники APB, CPO, PAO равнобедренные. Имеем: $OP = PA = AB = d_1, PC = OC = 1$. На основании первого из этих равенств и подобия треугольников OAB, APB

обычно и вычисляют d_1 : $\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{BP}$; $\frac{1}{d_1} = \frac{d_1}{1 - d_1}$; $d_1^2 + d_1 - 1 = 0$; $d_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Таким же образом можно

на основании второго равенства вычислить d_2 : $d_3^2 - d_3 - 1 = 0$; $d_3 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow d_3 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Но если считать d_1 известным,

то d_3 можно вычислить так: $d_3 = AC = AP + PC = d_1 + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Проще же всего вычислить d_3, d_4 одновременно:

$AC - AP = PC; d_3 - d_1 = 1$ и $\frac{AC}{AO} = \frac{AO}{AP}; AC \cdot AP = AO^2; d_3 \cdot d_1 = 1$. Найденная система уравнений $d_3 + (-d_1) = 1, d_3 - (-d_1) = -1$

показывает, что $d_3, -d_1$ есть корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, которое дает $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. За $-d_1$ нужно принять отрицательный

корень, а за d_3 — положительный корень, откуда и получим: $d_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, d_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Из прямоугольных треугольников ABD, ACD найдем: $d_4 = BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{4 - d_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$

$d_2 = CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{4 - d_3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Наконец, $d_5 = AD = 2$. При произвольном выборе единицы длины те же

формулы дают отношения сторон и диагоналей к радиусу и принимают вид: $a_{10} = d_1 = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}, d_2 = R \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$

$d_3 = R \frac{\sqrt{5}+1}{2}, d_4 = R \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}, d_5 = 2R.$

Ответ: $R \frac{\sqrt{5}-1}{2}, R \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}, R \frac{\sqrt{5}+1}{2}, R \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}, 2R.$

5.220. По стороне правильного десятиугольника определить его площадь.

Решение.

Обозначим сторону правильного десятиугольника через a , апофему — через h , радиус описанного круга — через R ,

площадь — через S . Тогда $S = 5ah = 5a\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. Из соотношения $a = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (см. решение задачи 5.219) находим:

$$R = \frac{2a}{\sqrt{5}-1} = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}. \text{ Отсюда } S = 5a\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = 5a\sqrt{\frac{a^2(\sqrt{5}+1)^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = a^2 \frac{5\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Ответ: $a^2 \frac{5\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$, где a — сторона данного десятиугольника.

ТЕМА: ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

5.221. Через данную точку P провести прямую, параллельную данной прямой AB .

Решение.

Произвольным раствором циркуля проведем окружность (рис. 5.239) с центром P так, чтобы она пересекла AB . Тем же раствором циркуля от одной из точек пересечения M откладываем на AB в любую ее сторону отрезок MN . Снова тем же раствором зашаем из точки N дугу ab . Точку R пересечения дуги ab с окружностью соединяем с данной точкой P . PR — искомая прямая.

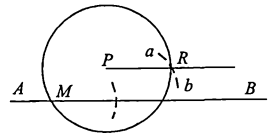


Рис. 5.239

5.222. Разделить данный отрезок AB на данное число равных частей.

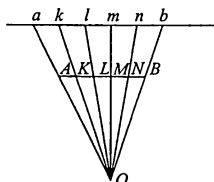


Рис. 5.240

Решение.

Проводим (рис. 5.240) прямую ab , параллельную AB ; на ней откладываем равные отрезки произвольной длины в нужном числе, например $ak = kl = lm = mn = nb$. Проводим прямые Aa, Bb . В пересечении их находим точку O . Проводим прямые Ok, Ol, Om, On . Эти прямые пересекут AB в точках K, L, M, N , делящих AB на нужное число (в нашем примере на 5) равных частей.

5.223. Опустить перпендикуляр из данной точки P на прямую MN .

Решение.

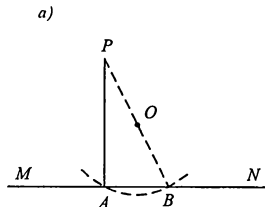
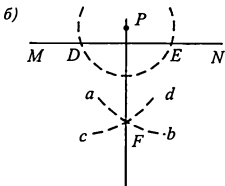


Рис. 5.241



Из точки P проводим произвольную наклонную PB (рис. 5.241, а); находим ее середину O и из нее описываем окружность радиусом OB . Окружность пересекает MN еще в точке A . Проведя AP , получим искомый перпендикуляр.

В случае, когда точка P лежит близко к прямой MN , этот способ может дать большую погрешность. Тогда лучше пользоваться следующим построением. Из точки P как из центра (рис. 5.241, б) проводим дугу DE произвольного радиуса, пересекающую MN в точках D, E . Из точек D, E как из центров проводим одним и тем же произвольным радиусом две дуги cd, ab , пересекающиеся в точке F . Проведя прямую через точки F и P , получим искомый перпендикуляр.

5.224. Построить углы $60^\circ, 30^\circ$ и 45° .

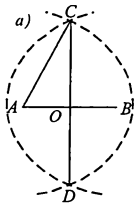
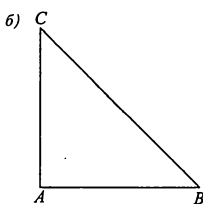


Рис. 5.242



Решение.

Из концов A и B (рис. 5.242, а) произвольного отрезка AB описываем дуги радиусом AB . Точки их пересечения C и D соединяем прямой, которая пересечет отрезок AB в его середине O . Точку A соединяем отрезком прямой с точкой C . $\angle CAO = 60^\circ, \angle ACO = 30^\circ$.

На сторонах прямого угла BAC (рис. 5.242, б) откладываем равные отрезки AB и AC и соединяем их концы отрезком прямой BC . Прямая BC образует с AC и AB углы по 45° .

5.225. Разделить данный угол BAC на три равные части.

Решение.

Простой линейкой и циркулем точно выполнить это построение нельзя. С помощью циркуля и сантиметровой линейки построение можно выполнить так (рис. 5.243): произвольным радиусом AC описываем из точки A окружность. Продолжаем AC за точку A . Кладем линейку так, чтобы она проходила через B , и вращаем ее вокруг B до тех пор, пока отрезок ED между окружностью и прямой AK не станет равным радиусу AC . Тогда угол EDF есть треть угла BAC (докажите!).

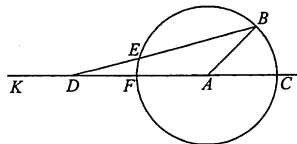


Рис. 5.243

5.226. Через две данные точки A и B провести окружность данным радиусом r .

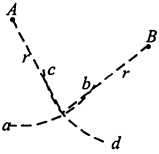


Рис. 5.244

Решение.

Из точек A и B (рис. 5.244) проводим дуги ab и cd радиусом r . Точка их пересечения есть центр искомой окружности.

5.227. Через три данные точки A, B, C (не лежащие на одной прямой) провести окружность.

Решение.

Проводим перпендикуляры ED и KL (рис. 5.245) к отрезкам AC и BC через их середины. Точка пересечения этих перпендикуляров O есть центр искомой окружности.

Аналогичным способом описывается окружность около данного треугольника, т.е. проводится окружность через его вершины.

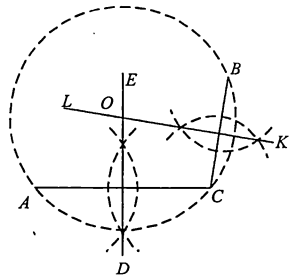


Рис. 5.245

5.228. Найти центр данной дуги окружности.

Решение.

На данной дуге выбираем три точки (по возможности далеко отстоящие друг от друга). Затем поступаем, как в задаче 5.227.

5.229. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α .

Решение.

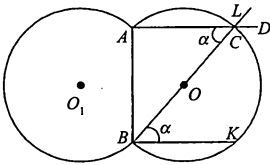


Рис. 5.246

Искомое геометрическое место точек представляет собой две дуги равных окружностей, опирающиеся концами в точках A и B (рис. 5.246) (сами точки A и B не принадлежат геометрическому месту). Центры этих дуг находятся так: проводим перпендикуляры AD и BK в концах отрезка AB . Строим угол $KBL = \alpha$. В пересечении BL и AD получаем точку C . Середина O отрезка BC есть центр одной из искомых дуг. Другая дуга строится аналогично.

5.230. Провести через данную точку A касательную к данной окружности.

Решение.

Если точка A лежит на окружности (рис. 5.247, а), строим BAC перпендикулярно к радиусу OA ; BC — искомая касательная.

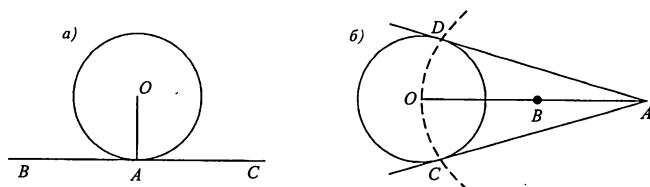


Рис. 5.247

Если A лежит вне круга (рис. 5.247, б), делим AO пополам и из середины B проводим радиусом BO дугу CD . Точки C и D соединяем прямыми с A . Прямые AC и AD — искомые касательные.

5.231. Провести к данным двум окружностям общую внешнюю касательную.

Решение.

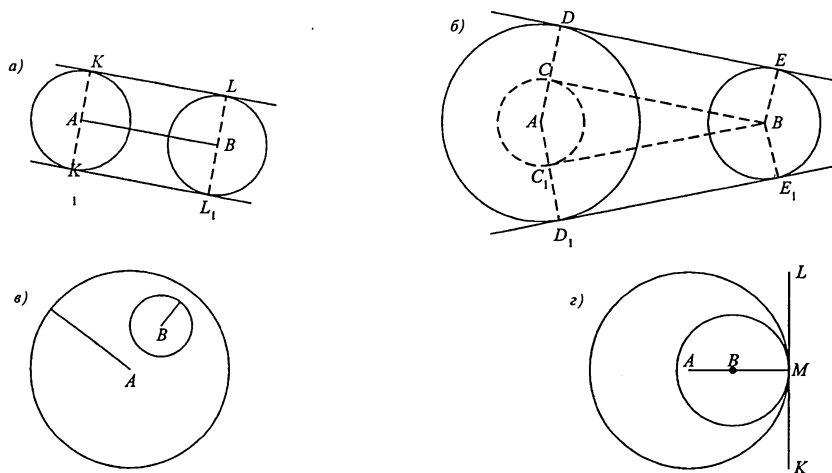


Рис. 5.248

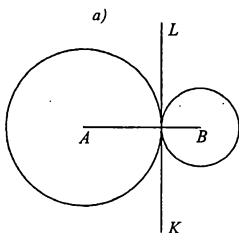
а) Если радиусы данных окружностей равны между собой, задача всегда имеет два решения (рис. 5.248, а). Через центры A и B проводим диаметры KK_1 и LL_1 , перпендикулярные к линии центров AB . Проведя KL и K_1L_1 , получим искомые решения.

б) Пусть радиусы данных окружностей не равны: $R > r$; из центра большего круга проводим окружность радиусом $AC = R - r$ (рис. 5.248, б). К ней проводим касательную BC из центра B меньшего круга (см. задачу 5.230). Центр A соединяем с точкой касания C прямой. Продолжаем ее и получаем на большей окружности точку D . Проводим BE перпендикулярно к BC до пересечения в точке E с меньшей окружностью. Через точки D и E проводим прямую. Прямая DE — искомая касательная. Задача допускает два решения (DE и D_1E_1), если меньший круг не лежит целиком внутри большего. Если меньший круг целиком лежит внутри большего (рис. 5.248, в), задача не имеет решений. В промежуточном случае, когда окружности имеют внутреннее касание (рис. 5.248, г), задача имеет одно решение: через точку внутреннего касания M проводим $KL \perp AM$.

5.232. Провести к двум данным окружностям общую внутреннюю касательную.

Решение.

Задача не имеет решения, если один из кругов лежит внутри другого, а также если данные круги пересекаются. В случае внешнего касания (рис. 5.249, а) задача имеет одно решение: через точку M проводим $KL \perp AB$.



В остальных случаях имеем два решения (DE и D_1E_1) (рис. 5.249, б).

Из центра A проводим окружность радиусом, равным сумме радиусов данных окружностей. Из центра B проводим касательную BC к построенной окружности (см. задачу 5.230). Точку касания C и центр A соединяем отрезком AC , который пересечет окружность с центром A в точке D . Из B проводим радиус $BE \perp BC$. Конец его E соединяем с D ; ED — искомая касательная. Аналогично строится и другая касательная E_1D_1 .

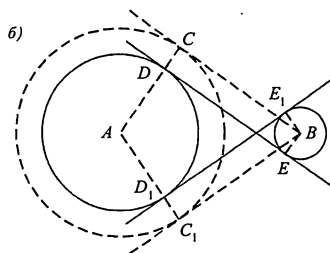


Рис. 5.249

5.233. Вписать окружность в данный треугольник ABC .

Решение.

Делим пополам два угла треугольника (рис. 5.250), например A и B . Из точки O пересечения бисектрис проводим $OD \perp AB$. Радиусом OD описываем искомую окружность.

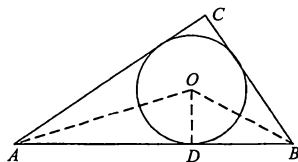


Рис. 5.250

5.234. Описать окружность около данного правильного многоугольника.

Решение.

Если число сторон четно (рис. 5.251, а), соединяем прямыми AB и CD две любые пары противоположных вершин. Из точки их пересечения O радиусом OA описываем окружность.

Если число сторон нечетно (рис. 5.251, б), опускаем из двух любых вершин K и M перпендикуляры KL и MN на противоположные стороны. Из точки их пересечения O радиусом OK описываем окружность.

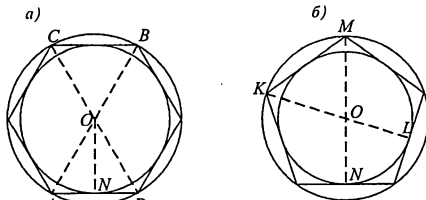


Рис. 5.251

5.235. Вписать окружность в данный правильный многоугольник.

Решение.

Центр окружности находится, как в задаче 5.234. Из центра опускаем перпендикуляр ON на одну из сторон (см. рис. 5.251, а). Радиусом ON (или OL , см. рис. 5.251, б) описываем окружность.

5.236. Построить параллелограмм по данным сторонам a и b и одному из углов α .

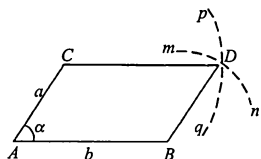


Рис. 5.252

Решение.

Строим $\angle A = \alpha$, на его сторонах откладываем отрезки $AC = a$, $AB = b$ (рис. 5.252). Проводим из B дугу mn радиусом a и из C — дугу pq радиусом b . Точку пересечения этих дуг D соединяем с C и B ; $ABCD$ — искомый параллелограмм.

5.237. Построить квадрат по данной его диагонали AB .

Решение.

Через середину AB (рис. 5.253) проводим к AB перпендикуляр MN . От точки O его пересечения с AB откладываем на MN отрезки OC и OD , равные OA ; соединяем точки C и D с точками A и B ; $ABCD$ — искомый квадрат.

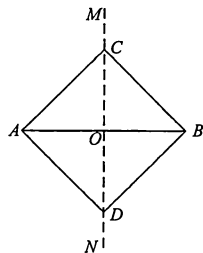


Рис. 5.253

5.238. Вписать квадрат в данный круг. Описать квадрат около данного круга.

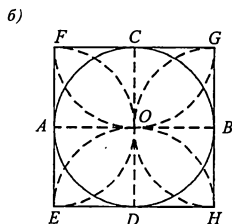
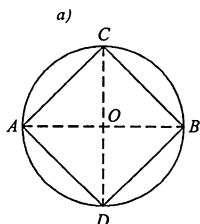


Рис. 5.254

Решение.

а) Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (рис. 5.254, а); $ABCD$ — искомый квадрат.

б) Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (рис. 5.254, б). Из их концов как из центров описываем четыре полуокружности радиусами, равными OA . Точки F , G , H и E их пересечения — вершины искомого квадрата.

5.239. Вписать правильный пятиугольник в данный круг.

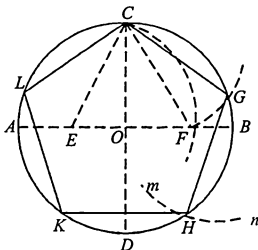


Рис. 5.255

Решение.

Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (рис. 5.255). Делим пополам радиус AO точкой E . Из точки E радиусом EC проводим дугу CF , пересекая ею диаметр AB в точке F . Из C радиусом CF проводим дугу FG , пересекая ею данную окружность в точке G ; $CG (= CF)$ есть одна сторона искомой фигуры. Проводим тем же радиусом дугу mn из точки G как из центра, получаем еще одну вершину H искомой фигуры и т. д.

5.240. Вписать в данный круг правильные шестиугольник и треугольник.

Решение.

Раствором циркуля, равным радиусу круга, делаем на окружности засечки в точках A, B, C, D, E, F (рис. 5.256). Соединяя точки A, B, C, D, E, F подряд, получим правильный шестиугольник. Соединяя их через одну, получим правильный (равносторонний) треугольник.

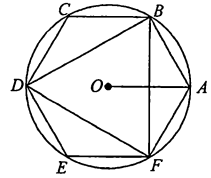


Рис. 5.256

5.241. Вписать правильный десятиугольник в данный круг. Вписать правильный восьмиугольник в данный круг.

Решение.

Построим точку F (см. рис. 5.255), как в задаче 5.239. OF есть сторона искомой фигуры. Раствором циркуля, равным OF , сделаем на окружности десять последовательных засечек. Получим вершины искомого десятиугольника.

Проведим два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (рис. 5.257). Разделив пополам дуги AD (соединив точки A и D отрезком и проведя перпендикуляр через середину отрезка AD , который и разделит дугу AD пополам), DB, BC, CA точками E, F, G, H , последовательно соединяем полученные восемь точек.

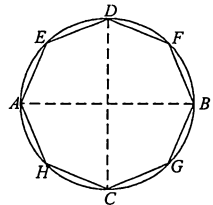


Рис. 5.257

Заметим, что правильные многоугольники, имеющие семь и девять сторон, нельзя вписать в круг только с помощью циркуля и линейки.

5.242. Около данного круга описать правильный треугольник, пятиугольник, шестиугольник, восьмиугольник, десятиугольник.

Решение.

Отметим на окружности (рис. 5.258) вершины A, B, \dots, F правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон (см. задачи 5.239 — 5.241). Проведем радиусы OA, OB, \dots, OF и продолжим их. Дугу AB разделим пополам точкой G . Через точку G проведем $HP \perp OE$. Отрезок HP , заключенный между продолжениями соседних радиусов, есть сторона искомой фигуры. На продолжении остальных радиусов откладываем отрезки OK, OL, \dots, ON , равные OP . Точки H, K, L, \dots, N, P последовательно соединяем. Многоугольник $HKLM \dots NP$ — искомый.

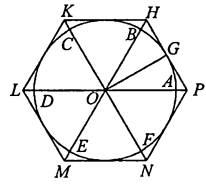


Рис. 5.258

5.243. Построить правильный n -угольник по данной его стороне a .

Решение.

На отрезке BK , равном $2a$, как на диаметре строим полуокруг (рис. 5.259). Этот полуокруг делим на n равных частей точками C, D, E, F, G (вершинами правильного вписанного $2n$ -угольника; на нашем рисунке $n = 6$). Центр A соединяем лучами со всеми полученными точками, кроме двух последних (K и G). Из точки B радиусом AB проводим дугу ab , пересекая на луче AC точку L . Из точки L тем же радиусом проводим дугу cd , пересекая на луче AD точку M и т. д. Точки B, L, M, N и т. д. последовательно соединяем прямыми. Многоугольник $ABLMNF$ — искомый.

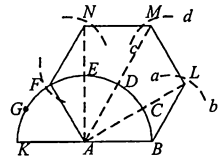


Рис. 5.259

Заметим, что решить эту задачу с помощью циркуля и линейки можно не всегда; например, при $n = 7, n = 9$ этого сделать нельзя, так как полуокруг с помощью циркуля и линейки на 7 или 9 частей точно не делится.

5.244. Построить отрезок с концами, лежащими на данных прямых a и b , и серединой в данной точке O .

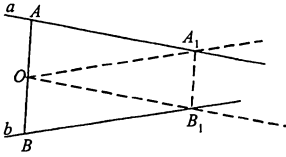


Рис. 5.260

Решение.

Через точку O проводим прямые, параллельные данным прямым a и b (рис. 5.260); A_1 и B_1 — точки пересечения соответствующих прямых. Через точку O проводим прямую, параллельную A_1B_1 . Получаем, что AB — искомый отрезок (случай, когда прямые a и b параллельные, предлагаем читателю исследовать самостоятельно).

5.245. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длиной $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ по данному отрезку длиной 1.

Решение.

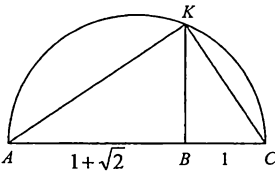


Рис. 5.261

Порядок построения следующий:

- 1) построим прямой угол и на его сторонах отложим от вершины отрезки длиной 1. Отрезок, соединяющий их концы, имеет длину $\sqrt{2}$;
- 2) отложим на прямой отрезок AB длиной $1 + \sqrt{2}$, а затем отрезок BC длиной 1 (рис. 5.261);
- 3) построим на отрезке AC как на диаметре окружность;
- 4) проведем через точку B прямую, перпендикулярную к диаметру AC . Пусть K —

одна из точек пересечения этой прямой с окружностью. Докажем, что $BK = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Действительно, треугольник AKC прямоугольный, так как $\angle AKC$ — угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, равен произведению отрезков, на которые эта высота делит гипотенузу, т.е. $(1 + \sqrt{2}) \cdot 1$.

5.246. Построить отрезок, равный и параллельный данному, концы которого лежали бы на данной прямой и данной окружности.

Решение.

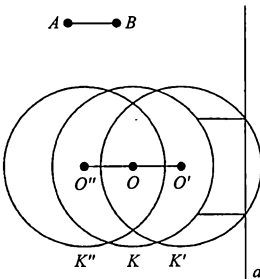


Рис. 5.262

Пусть AB — данный отрезок (рис. 5.262), a — данная прямая, K — данная окружность, O — ее центр. Искомый отрезок должен быть равен и параллелен отрезку AB и опираться своими концами на окружность K и прямую a . Представим себе, что из всех точек окружности K проведены в обоих направлениях отрезки, равные и параллельные отрезку AB . Концы этих отрезков заполняют пару окружностей K', K'' , получающихся из окружности K смещением ее в обоих направлениях на отрезок, равный и параллельный отрезку AB . Условия задачи удовлетворяют те из этих отрезков, концы которых одновременно лежат и на прямой a . Отсюда ясно, как следует вести построение. Проводим через точку O прямую параллельно прямой AB , откладываем на ней отрезки OO', OO'' , равные отрезку AB , и описываем около точек O', O'' окружности K', K'' радиусом, равным радиусу окружности K . Затем из каждой общей точки окружностей K', K'' с прямой a проводим прямую, параллельную прямой AB , до такой точки пересечения с окружностью K , чтобы получился отрезок, равный AB . Число решений может достигать четырех. Можно было бы вместо окружностей K смещать параллельно прямую a , но такое построение было бы несколько сложнее.

5.247. Через данную точку внутри круга провести хорду, равную данному отрезку.

Решение.

Требуется через точку A (рис. 5.263) внутри круга K с центром O провести хорду, равную отрезку a . Построим какую-нибудь хорду $B'C'$, равную отрезку a , что легко сделать. Если бы хорда BC была дана, то мы могли бы совместить ее с хордой $B'C'$, вращая ее в каком-нибудь направлении около точки O . При этом точка A хорды BC совпала бы с некоторой точкой A' хорды $B'C'$, которую мы могли построить и не зная положения хорды BC , прямо по данным задачи. Действительно, при таком вращении точка A описала бы окружность K' с центром O и радиусом OA . Следовательно, точка A' должна быть общей точкой окружности K' с хордой $B'C'$. Если этих точек две, то

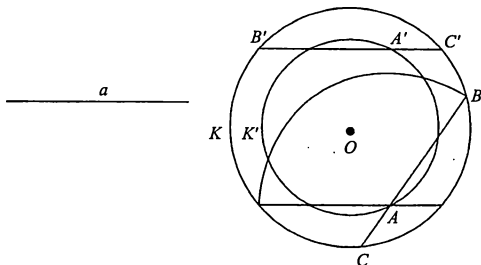


Рис. 5.263

за точку A' можно принять любую. Из дальнейших рассуждений увидим, что это безразлично. Точка A должна делить хорду BC на такие же отрезки, на какие точка A' делит хорду $B'C'$. Поэтому конец B хорды BC должен находиться от точки A на расстоянии, равном $A'B'$. Описав около точки A окружность радиусом, равным $A'B'$, получим в пересечении с окружностью K искомые концы B хорды BC , после чего остается только соединить их с точкой A и продолжить прямые BA до пересечения C с окружностью K . Для этого построения существенно только то, на какие отрезки точка A' делит хорду $B'C'$. Если окружность K' имеет с хордой $B'C'$ две общие точки, то они делят хорду на одинаковые отрезки, только в различном порядке. Поэтому и можно было бы за точку A' принять любую из этих точек.

5.248. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне a и высоте h , проведенной на боковую сторону.

Решение.

Через точку D проведем две взаимно перпендикулярные прямые m и n (рис. 5.264). От точки D на одной из прямых, например n , отложим отрезок DC , равный высоте h , проведенной на боковую сторону. Раствором циркуля, равным боковой стороне a треугольника, проведем дугу окружности с центром в точке C , которая пересечет прямую m в точке B . Соединим точки B и C на прямой m от точки B отложим отрезок $BA = BC = a$. Соединив точку A с точкой C , получим искомый треугольник ABC с заданными боковой стороной и высотой, проведенной на эту сторону. Задача имеет решение только в том случае, когда отрезок a больше отрезка h .

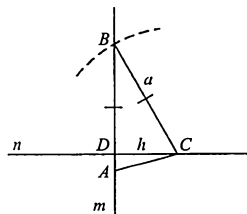


Рис. 5.264

5.249. Построить треугольник наименьшего периметра, две вершины которого лежали бы на сторонах данного угла, а третья в данной точке внутри угла.

Решение.

Пусть будет M_1OM_2 (рис. 5.265) данный угол и A данная точка. Построим точки A_1, A_2 , симметричные точке A , относительно осей OM_1, OM_2 , проведем прямую A_1A_2 и соединим с точкой A точки пересечения ее B, C с прямыми OM_1, OM_2 . Треугольник ABC и есть искомый. Действительно, всякий другой треугольник $AB'C'$, расположенный согласно требованиям задачи, имеет по сравнению с треугольником ABC больший периметр, так как периметр треугольника ABC равен отрезку прямой $A_1B + BC + CA_2$, а периметр треугольника $AB'C'$ равен периметру ломаной $A_1B' + B'C' + CA_2$.

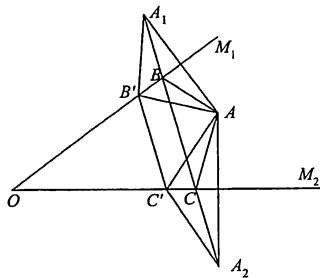


Рис. 5.265

5.250. Построить треугольник по двум сторонам b, c и медиане m_a .

Решение.

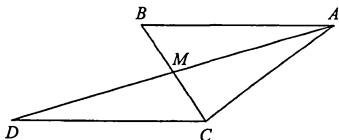


Рис. 5.266

Пусть ABC — искомый треугольник и M середина стороны BC (рис. 5.266). Проведем удвоенную медиану AMD и отрезок CD . В треугольнике ACD имеем $AC = b$, $CD = c$, $AD = 2m_a$. Следовательно, этот треугольник можно построить по данным b, c, m_a . Чтобы построить искомый треугольник ABC , остается провести удвоенную медиану CMB треугольника ACD и отрезок AB .

Разумеется, для возможности построения треугольника ACD необходимо, чтобы наибольший из отрезков $b, c, 2m_a$ был меньше суммы остальных.

5.251. Построить треугольник по стороне a и медианам m_a, m_b .

Решение.

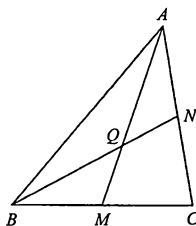


Рис. 5.267

В искомом треугольнике ABC заранее известны сторона $BC = a$, медиана $AM = m_a$ и медиана $BN = m_b$ (рис. 5.267). Это дает возможность построить треугольник BMQ , в котором $BQ = \frac{1}{2}a$,

$MQ = \frac{1}{3}m_a$, $BQ = \frac{2}{3}m_b$. Для этого нужно уметь разделить данные отрезки m_a, m_b на три части (см. задачу 5.222), что не относится к основным построениям.

Но это построение легко выполняется, если пристроить к отрезкам m_a, m_b какие-нибудь треугольники, в которых они были бы медианами, и провести еще по одной медиане этих треугольников. Когда треугольник BMQ будет построен, остается продолжить BM на равный отрезок MC и MQ на вдвое больший отрезок QA и провести отрезки AB, AC .

5.252. Построить треугольник по трем медианам m_a, m_b, m_c .

Решение.

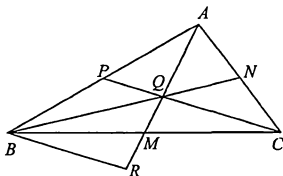


Рис. 5.268

Пусть ABC — искомый треугольник, AM, BN, CP — его медианы, Q — точка их пересечения (рис. 5.268). Продолжим отрезок QM на равный отрезок MR и про-

ведем отрезок BR . В треугольнике BQR имеем: $BQ = \frac{2}{3}m_b$, $QR = 2QM = \frac{2}{3}m_a$,

$$BR = CQ = \frac{2}{3}m_c.$$

Следовательно, треугольник BQR можно построить по данным отрезкам m_a, m_b, m_c , а после этого легко построить и треугольник ABC .

5.253. Построить треугольник по двум сторонам b, c и высоте h_a .

Решение.

Для возможности построения треугольника необходимо, чтобы обе боковые стороны b, c были больше высоты h_a или только одна из них равна высоте h_a . Поэтому мы примем $h_a \leq b < c$. Проведем какую-нибудь прямую a и восстановим к

ней какой-нибудь перпендикуляр p . Так как положение искомого треугольника ничем не ограничено, то мы можем мысленно положить его на плоскость так, чтобы основание BC пошло по прямой a , а высота h_a — по перпендикуляру p (рис. 5.269). Отложив на перпендикуляре p отрезок, равный отрезку h_a , найдем вершину A . Конец основания B должен лежать на прямой a на расстоянии от вершины A , равном отрезку c . Иначе говоря, точка B должна быть общей точкой

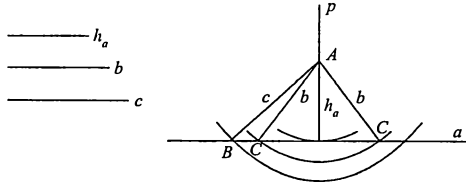


Рис. 5.269

прямой a и окружности, описанной около точки A радиусом c . Таких точек две, так как $c > h_a$, но мы можем считать за точку B одну из них. Действительно, мы можем представить себе треугольник ABC наложенным на плоскость так, что конец основания B совпадает с любой из этих точек, так как он переходит из одной точки в другую при повороте треугольника вокруг оси p на 180° . Теперь положение треугольника ABC вполне определено, и различным возможным положениям конца основания C соответствуют различные решения задачи. Точка C должна быть общей точкой прямой a и окружности, описанной около точки A радиусом b . Если $b > h_a$, то таких точек будет две, и мы получим два треугольника ABC . Если $b = h_a$, то такой точкой будет только основание высоты h_a , и мы получим один треугольник ABC .

5.254. Построить треугольник по стороне a и двум высотам h_b, h_c .

Решение.

Пусть будут K, L основаниями высот h_b, h_c (рис. 5.270). Так как углы BKC, BLC прямые, то точки K, L должны находиться на окружности ρ , описанной на отрезке BC как на диаметре. Точка K находится, кроме того, на окружности, описанной около точки B радиусом h_b . Если эта окружность имеет с окружностью ρ две общие точки, то за точку K можно принять одну из них, потому что этим определяется только положение треугольника ABC . За точку L следует уже принять по очереди все общие точки окружности, описанной около C радиусом h_c с окружностью ρ . После этого остается провести секущие BL, CK окружности ρ до пересечения в точке A . Число решений может достигать двух.

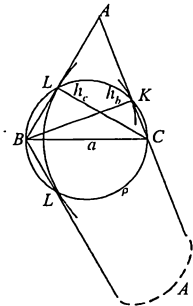


Рис. 5.270

5.255. Построить треугольник по стороне a , медиане m_a и высоте h_a .

Решение.

Пусть будет $BC = a$ основанием искомого треугольника и M — его середина (рис. 5.271). Вершина A должна находиться на расстоянии m_a от M и на расстоянии h_a от BC . Следовательно, вершина A есть общая точка окружности, описанной около точки M радиусом m_a , и прямой, проведенной параллельно прямой BC на расстоянии h_a от нее. Безразлично, с какой стороны от прямой BC проводить параллельную и которую из общих точек ее с окружностью принять за точку A , если этих точек две, так как все полученные таким образом треугольники отличаются только положением на плоскости. Поэтому решений не может быть более одного.

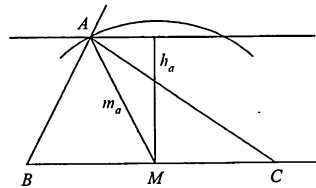


Рис. 5.271

5.260. Построить треугольник по стороне a , разности сторон $c - b$ и углу C .

Решение.

Пусть ABC — искомый треугольник. Отложим на продолженной стороне $AC = b$ отрезок $AD = c$ (рис. 5.276). Треугольник CBD можно построить, так как в нем известны стороны $CB = a$, $CD = c - b$ и угол между ними $BCD = 180^\circ - C$. По треугольнику BCD можно построить треугольник ABC , проведя перпендикуляр в середине стороны BD до пересечения с продолжением стороны DC в точке A .

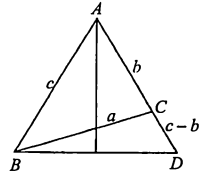


Рис. 5.276

5.261. Построить треугольник по двум сторонам b, c и разности углов $C - B$.

Решение.

Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 5.277). Перевернем его на другую сторону и наложим на плоскость в положении $A'BC$. Треугольник $BA'A$ можно построить по сторонам $BA = c$, $BA' = b$ и углу между ними $ABA' = C - B$. Чтобы построить затем искомый треугольник ABC , проведем полупрямую BD , параллельную и одинаково направленную с отрезком $A'A$, и найдем на ней точку C , находящуюся на расстоянии $A'C = c$ от точки A' .

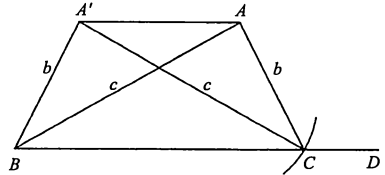


Рис. 5.277

5.262. Построить треугольник по стороне a , разности сторон $c - b$ и разности углов $C - B$.

Решение.

Воспользуемся решением задачи 5.259. В искомом треугольнике ABC (рис. 5.278) проведем биссектрису AD , отложим $AE = AC$ и соединим D, E . В треугольнике BDE известны сторона $BE = c - b$, противолежащий угол $BDE = C - B$ и сумма двух других сторон $BD + DE = BD + DC = BC = a$. По этим данным его можно построить, как показано в решении задачи 5.257. Чтобы построить треугольник ABC , нужно будет на продолжении BD отложить $DC = DE$ и провести биссектрису угла CDE до пересечения с продолжением BE в точке A .

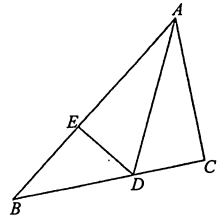


Рис. 5.278

5.263. На данной прямой построить точку, сумма расстояний которой от двух данных точек наименьшая.

Решение.

Дана прямая a и точки A, B (рис. 5.279). Требуется найти на прямой a такую точку M , чтобы сумма $AM + MB$ была наименьшей. Если точки A, B расположены по разные стороны от прямой a , то отрезок AB пересекает прямую a . Точка пересечения и есть искомая точка M . Действительно, если M' есть какая-нибудь другая точка прямой a , то прямая AMB короче ломаной $AM'B$. Если точки A, B расположены по одну сторону от прямой a , то можно заменить точку B точкой B' , симметричной ей относительно оси a , так как расстояния всякой точки M' прямой a от точек B, B' равны. Искомая точка M есть точка пересечения прямой a с прямой AB' .

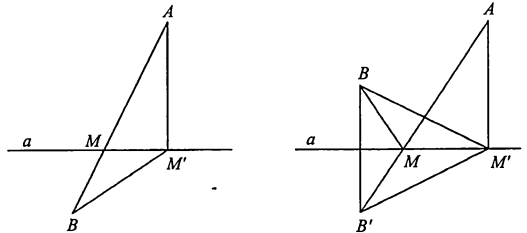


Рис. 5.279

5.264. На данной прямой построить точку, разность расстояний которой от двух данных точек наибольшая.

Решение.

Если точки A, B расположены по одну сторону от прямой a , то точка M прямой a , для которой разность расстояний от точек A, B наибольшая, есть точка пересечения прямой a с прямой AB . Если точки A, B расположены по разные стороны от прямой a , то точка M прямой a , для которой разность расстояний от точек A, B наибольшая, есть точка пересечения прямой a с прямой, соединяющей точку A с точкой B' , симметричной точке B относительно оси a .

5.265. Построить прямую, равноудаленную от трех данных точек.

Решение.

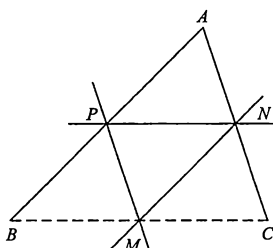


Рис. 5.280

Обозначим данные точки через A, B, C (рис. 5.280). Прямая, равноудаленная от точек A, B , или проходит через середину P отрезка AB , или параллельна прямой AB . Прямая, равноудаленная от точек A, C , или параллельна прямой AC , или проходит через середину N отрезка AC . Прямая, равноудаленная от всех трех точек A, B, C , или проходит через P и N — это будет прямая PN , или проходит через P и параллельна AC — это будет прямая PM , или проходит через N и параллельна AB — это будет прямая NM , или параллельна AB и AC — таких прямых не может быть, если точки A, B, C не лежат на одной прямой. Таким образом, если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то искомые прямые есть средние линии треугольника ABC . Но если точки A, B, C лежат на одной прямой, то прямые PN, PM, NM сливаются с этой прямой и, кроме того, от точек A, B, C равноудалены все прямые, параллельные этой прямой. Итак, в первом случае имеем три решения, а во втором — бесчисленное множество.

5.266. Через точку вне круга провести секущую, внешняя часть которой была бы равна внутренней.

Решение.

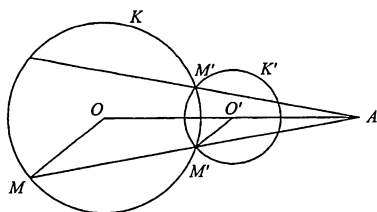


Рис. 5.281

Пусть A — данная точка, K — данный круг, O — его центр (рис. 5.281). Чтобы разобраться в задаче предположим, что она решена и что AMM' есть одна из искоемых секущих, так что M' — середина AM . Пусть будет O' середина AO . Прямая $O'M'$ есть средняя линия треугольника AOM и, следовательно, $O'M'$ равна половине OM , т.е. половине радиуса круга K . Таким образом, для M' имеем два геометрических места — окружность K и окружность K' вдвое меньшего радиуса с центром в середине O' отрезка AO ; это позволяет найти M' . Для экономии места мы сделали анализ на том же рис. 5.281, на котором находятся данные и должно быть выполнено построение. Но на практике следует, конечно, производить анализ на отдельном наброске. Чтобы решить теперь нашу задачу, нужно разделить пополам отрезок AO и какой-нибудь радиус круга K и радиусом, равным половине

радиуса круга K , описать окружность K' около середины O' отрезка AO . Соединив затем точку A с общими точками M' окружностей K, K' , получим искомые секущие. Чтобы исследовать задачу, обозначим радиус круга K через R и расстояние AO — через d . Тогда радиус круга K' будет $\frac{1}{2}R$ и расстояние OO' будет $\frac{1}{2}d$. Сумма радиусов кругов K, K' равна $\frac{3}{2}R$, а разность — $\frac{1}{2}R$. Окружности K, K' не имеют общих точек и, следовательно, задача не имеет решений, если $\frac{1}{2}d > \frac{3}{2}R$, т.е. если $d > 3R$. Задача имеет одно решение, если $\frac{1}{2}d = \frac{3}{2}R$, т.е. если $d = 3R$. Задача имеет два решения, если $\frac{1}{2}d < \frac{3}{2}R$,

т.е. $d < 3R$. Этим исчерпываются возможные случаи, потому что $\frac{1}{2}d$ не может быть равно или меньше $\frac{1}{2}R$, так как тогда d было бы равно или меньше R и точка A не лежала бы вне круга K , вопреки условию задачи.

5.267. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую, часть которой внутри кругов делилась бы в этой точке пополам.

Решение.

Пусть K, K' — данные круги (рис. 5.282), O, O' — их центры, A — точка их пересечения, через которую требуется провести секущую, делящуюся в этой точке пополам. Обозначим конец искомой секущей на окружности K через B , а конец на окружности K' — через C . Точка C должна быть симметрична точке B относительно центра A . Следовательно, точка C должна лежать на окружности K_1 , симметричной окружности K относительно центра A . Кроме того, она должна лежать на окружности K' . Таким образом, точка C есть общая точка окружностей K', K_1 , отличная от точки A . Задача всегда имеет одно решение. Действительно, окружность K' имеет с окружностью K_1 общую точку A , но не может касаться ее в этой точке, потому что тогда она касалась бы и симметричной окружности K , между тем как она по условию пересекает окружность K . Следовательно, окружности K', K_1 имеют еще одну общую точку C .

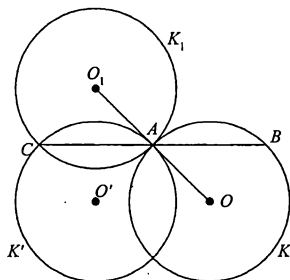


Рис. 5.282

5.268. Через точку вне круга провести секущую, внешняя часть которой была бы вдвое больше внутренней.

Решение.

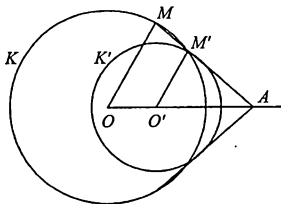


Рис. 5.283

Пусть A — данная точка, K — данный круг, O — его центр (рис. 5.283). Требуется провести секущую AMM' так, чтобы было $AM' = 2MM'$.

Эта задача есть обобщение задачи 5.266 и может быть решена сходным образом.

Проведем $M'O'$ параллельно MO . Из условия находим $AM' = \frac{2}{3}AM$, а затем из подобия треугольников $AM'O', AMO$ получаем $M'O' = \frac{2}{3}MO$. Для точки M' имеем

два геометрических места: окружность K и окружность K' , описанную около точки O' , находящейся на отрезке AO на расстоянии двух третей его от точки A , радиусом, равным двум третям радиуса окружности K . Точка M' есть общая точка этих геометрических мест. Но можно прийти к тому же решению и более

общим рассуждением. От точки M требуется, чтобы она лежала на окружности K , а от точки M' — чтобы она лежала на отрезке AM на расстоянии $\frac{2}{3}AM$ от его начала A и, кроме того, на окружности K . Если отбросим последнее условие, то первые два условия дадут в качестве геометрического места для точки M' окружность, подобно расположенную с окружностью K относительно центра подобия A с отношением подобия $\frac{2}{3}$, т.е. уже найденную нами окружность K' . Этот метод применим, конечно, и к задаче 5.266.

5.269. Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы одна из сторон квадрата лежала на основании треугольника.

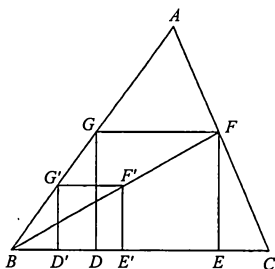


Рис. 5.284

Решение.

Дан треугольник ABC (рис. 5.284). Требуется построить квадрат $DEFG$ со стороной DE на основании BC , вершиной G на стороне AB и вершиной F на стороне AC . Отбросив последнее требование, получим бесчисленное множество квадратов вида $D'E'F'G'$, к числу которых должен принадлежать и искомый квадрат $DEFG$. Всякие два таких квадрата подобно расположены, потому что они подобны, как всякие вообще квадраты, и сходственные стороны их параллельны в силу условий задачи. Так как сходственные вершины вида D' лежат на прямой BC , а сходственные вершины вида G' лежат на прямой AB , то центр подобия есть точка пересечения B прямых BC , BA и, следовательно, сходственные вершины вида F' также лежат на прямой, проходящей через точку B . Отсюда вытекает следующее построение: строим какой-нибудь квадрат вида $D'E'F'G'$; проводим прямую BF' до пересечения со стороной AC в точке F ; строим искомый квадрат $DEFG$. Задача всегда имеет одно решение.

5.270. Вписать квадрат в данный сектор так, чтобы одна сторона стягивала часть дуги.

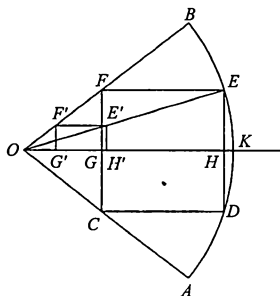


Рис. 5.285

Решение.

Пусть AOB — данный сектор (рис. 5.285). Докажем, что искомый квадрат $CDEF$ должен быть симметричен относительно биссектрисы угла AOB . Перпендикуляр OH к хорде DE делит ее пополам. Следовательно, OH разбивает квадрат $CDEF$ на два симметричных прямоугольника $GHDC$, $GHEF$. Остается доказать, что OH есть биссектриса угла AOB . Но это видно из того, что в треугольнике OCF линия OG есть одновременно медиана и высота; следовательно, он равнобедренный и OG есть также и биссектриса. Теперь задача сводится к тому, чтобы вписать в половину KOB сектора AOB прямоугольник $GHEF$ с отношением сторон $GH:GF = 2$ так, чтобы сторона GH лежала на радиусе OK , вершина F — на радиусе OB и вершина E — на дуге KB . Для этого строим какой-нибудь прямоугольник $G'HE'F'$, удовлетворяющий всем этим условиям, кроме последнего, проводим прямую OE' до пересечения с дугой KB в точке E и строим искомый прямоугольник $GHEF$. Впрочем, найдя точку E , можно сразу построить квадрат $CDEF$. Решение всегда одно.

5.271. Построить параллелограмм по углу и диагоналям.

Решение.

Даны диагонали d, d' параллелограмма и угол A , противолежащий диагонали d' (рис. 5.286). Чтобы построить параллелограмм, проводим сначала отрезок BD , равный диагонали d' , и находим его середину M . Для вершины A имеем два

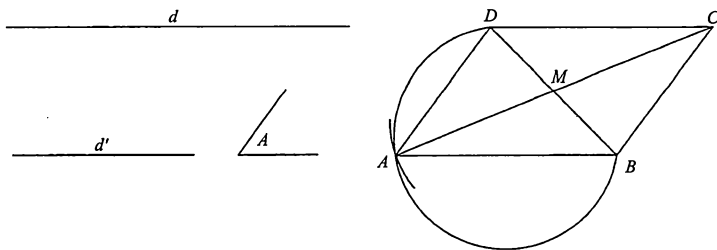


Рис. 5.286

геометрических места: дугу BD , вписывающую угол A , и окружность, описанную около M радиусом $\frac{1}{2}d$. Эти два геометрических места имеют не более двух общих точек; если этих точек две, то безразлично, которую из них принять за вершину A . Чтобы найти четвертую вершину C , проще всего продолжить AM на равное расстояние.

5.272. Вписать в четырехугольник параллелограмм с заданными направлениями сторон.

Решение.

Требуется вписать в четырехугольник $ABCD$ (рис. 5.287) параллелограмм, в котором стороны, отсекающие углы A, C , были бы параллельны направлению a , а стороны, отсекающие углы B, D , были бы параллельны направлению b . Указанным требованиям нельзя удовлетворить, если какая-либо из прямых, проведенных через A, C , параллельно a , или через B, D параллельно b , не проходит вся снаружи четырехугольника $ABCD$. Предположим поэтому, что направления a, b выбраны в согласии с последним требованием. Мы можем построить сколько угодно параллелограммов с требуемыми направлениями сторон и с тремя вершинами на требуемых сторонах четырехугольника или их продолжениях. Для этого из произвольной точки K' прямой AB проводим прямую в направлении b до пересечения с прямой BC в точке L' и другую

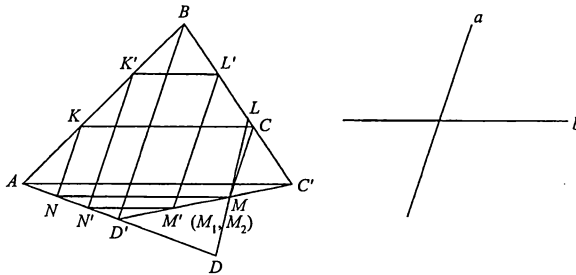


Рис. 5.287

прямую в направлении a до пересечения с прямой AD в точке N' ; затем проводим из точек L', N' прямые в направлениях a, b до пересечения в точке M' . Все параллелограммы $K'L'M'N'$ имеют указанные свойства. Если среди них имеются такие $KLMN$, у которых вершина M лежит на стороне CD , то это и будут искомые. Иначе говоря, искомые вершины M есть общие точки стороны CD и геометрического места вершины M' , когда вершина K' описывает прямую AB . Чтобы найти это геометрическое место, проведем через вершину A прямую в направлении b до пересечения с прямой BC в точке C' и через точку B прямую в направлении a до пересечения с прямой AD в точке D' . Мы докажем, что прямая $C'D'$ есть искомое геометрическое место вершины M' . Для этого достаточно доказать, что точки пересечения прямой $C'D'$ со сторонами $L'M', N'M'$ совпадают. Обозначим эти точки через M_1, M_2 . Из рис. 5.287 легко найдем, следя за произведенным выше

построением параллелограмма $K'L'M'N'$: $\frac{AK'}{K'B} = \frac{C'L'}{L'B} = \frac{C'M_1}{M_1D'}$, $\frac{AK'}{K'B} = \frac{AN'}{N'D'} = \frac{C'M_2}{M_2D'}$. Отсюда находим $\frac{C'M_1}{D'M_1} = \frac{C'M_2}{D'M_2}$,

т.е. точки M_1, M_2 делят отрезок $C'D'$ в одинаковых отношениях. Из того же хода рассуждений, который дает равенство всех этих отношений, видно, что точки M_1, M_2 делят отрезок $C'D'$ не только в одинаковых отношениях, но и одинаковым образом. Следовательно, точки M_1, M_2 совпадают и сливаются с точкой M' . Когда точка K' описывает прямую BA , точка M' описывает прямую $D'C'$. Если прямая $D'C'$ пересекает сторону DC в некоторой точке M , то от этой точки можно построить параллелограмм $KLMN$, который удовлетворит всем требованиям задачи, так что в этом случае получится одно решение. Если прямая $D'C'$ параллельна стороне BC или пересекает только ее продолжение, то задача не имеет решения.

5.273. Построить трапецию по четырем сторонам.

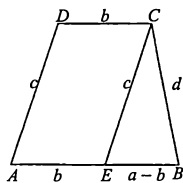


Рис. 5.288

Решение.

Пусть a, b, c, d — данные стороны и $a > b$ — основания искомой трапеции; требуется построить ее по этим данным. Пусть будет $ABCD$ (рис. 5.288) искомая трапеция. Проведем CE параллельно DA . Треугольник CEB можно построить по трем сторонам $CE = c, CB = d, EB = a - b$. После этого остается отложить отрезок $EA = b$ и построить на EA, EC параллелограмм $AECD$.

5.274. Построить трапецию по основаниям и диагоналям.

Решение.

Эта задача близка к задаче 5.273. Нужно только сделать параллельный перенос диагонали, а не боковой стороны.

5.275. Построить четырехугольник по трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой.

Решение.

В искомом четырехугольнике даны углы A, B и стороны b, c, d , по которым можно последовательно перейти от B к A (рис. 5.289). Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник. Непосредственному построению его мешает то, что углы между известными сторонами неизвестны, и стороны, прилежащие к известным углам, неизвестны. Чтобы сблизить известные части фигуры между собой, сделаем параллельный перенос стороны AD в положение BD' ; при этом точка D опишет отрезок DD' . Теперь построение можно вести так: проводим произвольную прямую ABE ; откладываем углы $ABF = B, EBG = A$; откладываем отрезки $BC = b, BD' = d$; проводим из точки D' полупрямую $D'H$, параллельную и одинаково направленную с полупрямой BA ; находим на полупрямой $D'H$ точку D на расстоянии c от точки C ; проводим из точки D параллельную прямую $D'B$ до пересечения с полупрямой BA в точке A .

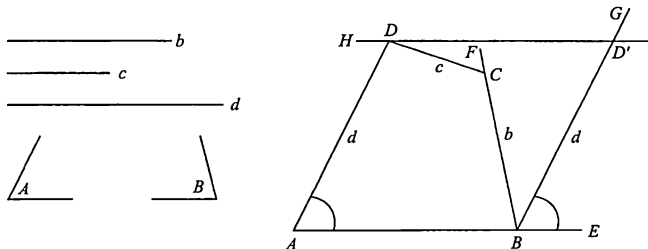


Рис. 5.289

5.276. Построить четырехугольник по сторонам и углу между двумя противоположными сторонами.

Решение.

Требуется построить четырехугольник по четырем последовательным сторонам a, b, c, d и углу α между направлениями сторон b, d от стороны a к стороне c . Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник (рис. 5.290); через A, B, C, D обозначим начальные точки сторон a, b, c, d при последовательном обходе их по контуру четырехугольника. Чтобы сблизить стороны b, d , между которыми известен угол, перенесем параллельно сторону AD в положение BD' . Мы можем построить четырех-

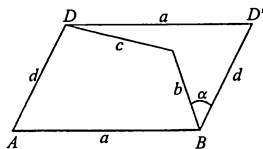


Рис. 5.290

угольник $CB'DD'$, так как в нем известны стороны и один из углов. При произвольной точке B строим угол, равный α ; на сторонах его откладываем отрезки $BC = b$, $BD' = d$; строим точку D , находящуюся на расстоянии c от точки C и на расстоянии a от точки D' . Чтобы получить искомый четырехугольник, остается провести из точек B, D параллельные прямым $D'D, D'B$ до пересечения в точке A .

5.277. Построить четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум каким-нибудь сторонам.

Решение.

Предположим, что в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 5.291) известны стороны $AB = a$, $CD = c$, диагонали $AC = m$, $BD = n$ и угол между диагоналями α . Сделаем параллельный перенос треугольника ABD , при котором вершина A описывает дугу AC ; при этом вершины B, D опишут отрезки B', DD' , равные и параллельные диагонали AC . Параллелограмм $DB'D'$ можно построить по сторонам $DD' = m$, $DB = n$ и углу $D'DB = \alpha$. После этого можно построить точку C по расстояниям a, c от вершин B', D этого параллелограмма. После этого остается провести через точку D параллельную $D'C$ и через точку B параллельную $B'C$ до пересечения в точке A .

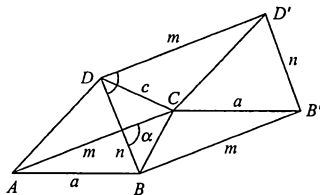


Рис. 5.291

5.278. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касательную к данной прямой.

Решение.

Искомый круг должен удовлетворять трем условиям: его радиус должен быть равен данному отрезку R , он должен проходить через данную точку A и касаться данной прямой a (рис. 5.292). Отбросим третье условие и найдем геометрическое место центров кругов, удовлетворяющих первым двум условиям. Центры таких кругов должны находиться на расстоянии R от точки A , и наоборот, всякая точка на расстоянии R от точки A есть центр такого круга. Следовательно, искомое геометрическое место есть окружность K с центром A и радиусом R . Отбросим второе условие и найдем геометрическое место центров кругов, удовлетворяющих первому и третьему условиям. Центры таких кругов должны находиться на расстоянии R от прямой

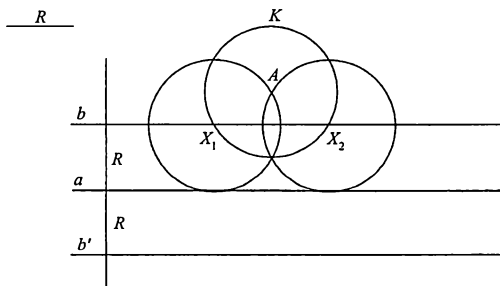


Рис. 5.292

a , и наоборот, всякая точка на расстоянии R от прямой есть центр такого круга. Следовательно, искомое геометрическое место есть пара прямых b, b' , параллельных прямой a и находящихся от нее на расстоянии R . Центры X искомых кругов должны удовлетворять всем трем условиям и, следовательно, лежат на обоих найденных геометрических местах. Если эти геометрические места имеют общие точки, то, описав около каждой из них круг радиусом R , получим все круги, удовлетворяющие условиям задачи. На рис. 5.292 окружность K пересекает прямую b в точках X_1, X_2 и не имеет общих точек с прямой b' . Следовательно, задача имеет два решения. Но возможны и другие случаи. Если расстояние точки A от прямой a больше $2R$, то окружность K не имеет общих точек с прямыми b, b' : задача не имеет решений. Если расстояние точки A от прямой a равно $2R$, то окружность K касается одной из прямых b, b' и не имеет общих точек с другой: задача имеет одно решение. Если расстояние точки A от прямой a меньше $2R$, но больше нуля, то окружность K пересекает одну из прямых b, b' и не имеет общих точек с другой: задача имеет два решения. Если расстояние точки A от прямой a равно нулю, то окружность K касается обеих прямых b, b' : задача имеет два решения. Таким образом, задача может иметь 0, 1 и 2 решения в зависимости от величины R и относительного положения A и a .

5.279. Построить окружность, касательную к данной прямой в данной точке и к другой данной прямой.

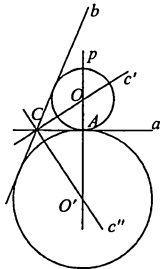


Рис. 5.293

Решение.

Требуется построить круг, касательный к прямой a в точке A и к другой прямой b (рис. 5.293). Одно геометрическое место для центра искомого круга есть перпендикуляр p к прямой a в точке A . Другое геометрическое место есть геометрическое место точек, равноудаленных от прямых a, b . В случае, изображенном на рис. 5.293, когда прямые a, b пересекаются в некоторой точке C , это геометрическое место есть пара биссектрис c', c'' углов между a и b . Мы получим два пересечения, если точка A не совпадает с точкой C , и одно пересечение, если точка A совпадает с точкой C . В последнем случае искомые круги обращаются в точку C . В случае, когда прямые a, b параллельны, второе геометрическое место есть прямая, параллельная им и делящая расстояние между ними пополам. Получим одно решение. Впрочем, легко видеть, что для построения искомого круга вовсе нет необходимости строить эту прямую.

5.280. Построить окружность, касательную к трем данным прямым.

Решение.

Относительно взаимного расположения данных прямых можно сделать только три предположения: или среди них нет параллельных, или две из них параллельны, а третья пересекает их, или все три параллельны. Если среди данных прямых нет параллельных, то они пересекаются или в трех различных точках, или в одной точке. Таким образом, возможны четыре случая. Рассмотрим их отдельно.

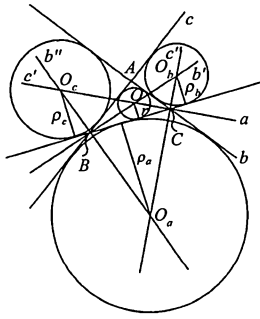


Рис. 5.294

Пусть прямые b, c пересекают прямую a в различных точках C, B и сами пересекаются в точке A (рис. 5.294). Центры искомых кругов должны быть равноудалены от всех трех прямых a, b, c . Геометрическое место точек, равноудаленных от прямых a, c , есть пара биссектрис b', b'' двух пар вертикальных углов между прямыми a, c . Геометрическое место точек, равноудаленных от прямых a, b , есть пара биссектрис c', c'' двух пар вертикальных углов между прямыми a, b . Точки, равноудаленные от всех трех прямых a, b, c , должны принадлежать обоим геометрическим местам. Так как прямые a, b, c ограничивают в данном случае треугольник, то каждая из биссектрис b', b'' пересекает каждую из биссектрис c', c'' . Всего получим четыре точки пересечения O, O_a, O_b, O_c . Чтобы найти радиусы искомых кругов, придется еще опустить из этих точек перпендикуляры $r, \rho_a, \rho_b, \rho_c$ на одну из сторон. После этого остается описать около точек O, O_a, O_b, O_c окружности радиусами $r, \rho_a, \rho_b, \rho_c$. Это будут вписанные и невписанные круги треугольника ABC .

Пусть прямые b, c пересекают прямую a в различных точках C, B , но параллельны между собой (рис. 5.295). Как и раньше, центры искомых кругов должны лежать в точках пересечения биссектрис b', b'' при точке B с биссектрисами c', c'' при точке C . Но теперь биссектрисы b', b'' параллельны биссектрисам c', c'' и пересекаются только с биссектрисами c', c'' в точках O, O' . Таким образом, в этом случае решений только два.

Если все три прямые пересекаются в одной точке, то решений не будет совсем, так как из одной точки нельзя провести три касательные и окружность. Точно так же решений совсем не будет, если все три прямые параллельны, так как к окружности нельзя провести три параллельные касательные.

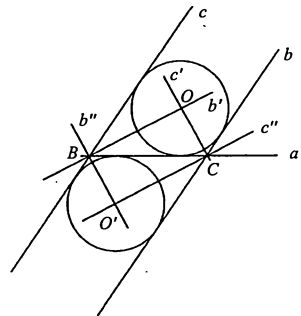


Рис. 5.295

6. СТЕРЕОМЕТРИЯ

6.1. Прямая и плоскость в пространстве

6.1.1. Параллельность прямой и плоскости.

Признак параллельности прямой и плоскости

Прямая a и плоскость α называются параллельными, если они не имеют общих точек. Любая прямая a , лежащая в плоскости α , считается параллельной этой плоскости.

Признак параллельности прямой и плоскости: если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой в этой плоскости, то данная прямая и плоскость параллельны.

Доказательство. Пусть прямая $a \parallel b$, где $b \subset \alpha$, $a \not\subset \alpha$. Проведем плоскость β через прямые a и b (рис. 6.1), тогда $b = \alpha \cap \beta$. Если предположить, что $M \in a \cap \alpha$, то $M \in \alpha \cap \beta = b$, т.е. параллельные прямые a и b пересекаются, что невозможно. Таким образом $a \cap \alpha = \emptyset$. **QED.**

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 6.1. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Теорема 6.2. Если через каждую из двух данных параллельных прямых проведена плоскость и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения будет параллельной каждой из данных прямых.

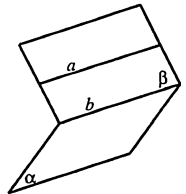


Рис. 6.1

6.1.2. Параллельные плоскости.

Признак параллельности плоскостей

Две плоскости α и β называются параллельными, если они не имеют общей точки или совпадают.

Признак параллельности двух плоскостей: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. От противного: пусть $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$, $a_1, a_2 \subset \alpha$, $b_1, b_2 \subset \beta$ и плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 6.2).

По признаку параллельности прямой и плоскости $a_1 \parallel \beta$ и $a_2 \parallel \beta$, следовательно, $a_1 \parallel c$ и $a_2 \parallel c$, т.е. через точку A в плоскости α проведены две прямые a_1 и a_2 , параллельные прямой c , что противоречит аксиоме параллельности. Полученное противоречие и доказывает теорему. **QED.**

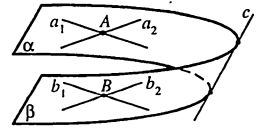


Рис. 6.2

6.1.3. Свойства параллельных плоскостей

Известны следующие свойства параллельных плоскостей:

- 1) каждая плоскость параллельна самой себе;
- 2) если плоскость α параллельна плоскости β , то плоскость β параллельна плоскости α ;
- 3) если плоскость α параллельна плоскости β , а плоскость

β параллельна плоскости γ , то плоскость α параллельна плоскости γ ;

4) если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны;

5) через точку, не лежащую в плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной.

6.1.4. Угол между прямой и плоскостью.

Перпендикуляр к плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются взаимно перпендикулярными, если прямая перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости. Прямая, перпендикулярная к плоскости, называется *перпендикуляром* к этой плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не являющаяся перпендикуляром к ней, называется *наклонной* к этой плоскости.

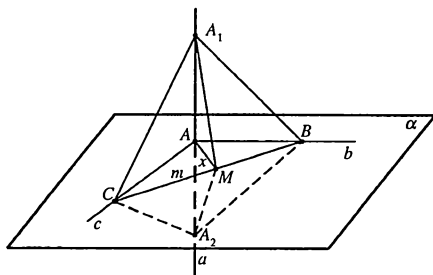


Рис. 6.3

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна к каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Предположим, что прямая a перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых b, c , лежащих в плоскости α (рис. 6.3). Проведем произвольную прямую m , не проходящую через A , которая пересечет прямые b, c в точках B, M, C соответственно. Рассмотрим равные отрезки AA_1 и AA_2 на прямой a .

$\triangle AA_1C = \triangle AA_2C$ ($AA_1 = AA_2$, AC — общая высота) и $\triangle AA_1B = \triangle AA_2B$ ($AA_1 = AA_2$, AB — общая высота), следовательно, $\angle A_1CA = \angle A_2CA$, $\angle A_1CB = \angle A_2CB$ и $\triangle BCA_1 = \triangle BCA_2$ (BC — общая высота). Следовательно $\angle A_1CM = \angle A_2CM$ и $\triangle A_1CM = \triangle A_2CM$ (CM — общая высота), т.е. $AM = A_2M$. В $\triangle A_1MA_2$ AM — медиана, а значит, и высота, т.е. $a \perp m$, где m — произвольная прямая, проходящая через точку A . Таким образом, по определению $a \perp \alpha$. QED.

Свойства перпендикуляра к плоскости:

- 1) два различных перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны;
- 2) если одна из параллельных прямых перпендикулярна к некоторой плоскости, то и другая будет перпендикуляром к этой плоскости;
- 3) если прямая перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей, то она будет перпендикулярна и к другой;
- 4) плоскости, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны.

6.1.5. Двугранные и линейные углы.

Перпендикулярность двух плоскостей. Признак перпендикулярности двух плоскостей

Каждая плоскость разбивает пространство на два *полупространства*, являясь их общей границей.

Пересечение двух полупространств, границами которых служат непараллельные плоскости, называется *двугранным углом*, а линия пересечения граничных полуплоскостей — *ребром* двугранного угла (рис. 6.4).

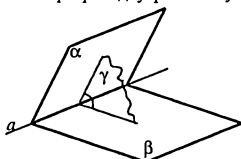


Рис. 6.4

Пересечение двугранного угла и плоскости, перпендикулярной к его ребру, называется *линейным углом* двугранного ребра (рис. 6.4), при этом двугранный угол измеряется величиной своего линейного угла.

Две пересекающиеся плоскости определяют в пространстве две пары равных двугранных углов, причем сумма двух прилегающих углов равна 180° . Меньший из этих углов называется *углом между плоскостями*. Угол между параллельными плоскостями полагается равным 0° .

Если угол между двумя плоскостями равен 90° , то плоскости называются *перпендикулярными*.

Признак перпендикулярности двух плоскостей: если плоскость содержит прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Доказательство. Предположим, что прямая $a \subset \alpha$ и $a \perp \beta$, $M = a \cap \beta$, b — линия пересечения плоскостей α и β . Через точку M в плоскости β проведем прямую c перпенди-

лярно к b , тогда угол между a и c будет линейным углом соответствующего двугранного угла (рис. 6.5).

Так как $a \perp \beta$, то $a \perp c$, следовательно, этот угол равен 90° и по определению плоскости α и β перпендикулярны. QED.

Обратно имеет место следующая *теорема*: если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно к линии пересечения плоскостей, перпендикулярна к другой плоскости.

6.1.6. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Пусть даны плоскость α и точка $A \notin \alpha$. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α , до ее пересечения с α в точке A_1 . Отрезок AA_1 называется *перпендикуляром*, опущенным из точки A на плоскость α , точка A_1 — *основанием перпендикуляра*, длина отрезка AA_1 — *расстоянием* от точки A до плоскости α (рис. 6.6).

Отрезок AB , соединяющий точку A с любой точкой $B \in \alpha$ ($B \neq A_1$), называется *наклонной*, точку B — *основанием наклонной*, отрезок A_1B — *проекцией наклонной AB на плоскость α* .

Теорема 6.3 (теорема о трех перпендикулярах). Для того чтобы прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, была перпендикулярна к наклонной, пе-

обходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна к проекции наклонной.

Доказательство. Рассмотрим перпендикуляр AA_1 к плоскости α , наклонную AB и ее проекцию A_1B , плоскость β , проведенную через точки A, B, A_1 (рис. 6.7).

Достаточность. Если прямая b , лежащая в плоскости α , перпендикулярна к BA_1 , то $b \perp \beta$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости ($b \perp AA_1$, так как AA_1 — перпендикуляр к плоскости α), следовательно, $b \perp AB$.

Необходимость. Если $b \subset \alpha$ и $b \perp AB$, то $(b \perp AB, b \perp AA_1) \Rightarrow b \perp \beta \Rightarrow b \perp BA_1$. QED

6.1.7. СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ. РАССТОЯНИЕ

Две прямые в пространстве называются *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не параллельны.

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

Отрезок, один конец которого принадлежит первой прямой, а другой — второй, перпендикулярный к обеим скрещивающимся прямым, называется *общим перпендикуляром* этих скрещивающихся прямых.

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Напомним, что расстоянием от точки A до плоскости α называется длина перпендикуляра AA_1 , опущенного из точки A на плоскость α .

Если прямая b (плоскость β) параллельна плоскости α , то расстоянием от прямой b (плоскости β) до плоскости α называется расстояние от любой точки прямой b (плоскости β) до плоскости α .

Пусть даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 . Проведем плоскость α через прямую l_1 параллельно прямой l_2 и плоскость β через l_2 параллельно l_1 . Тогда расстояние между l_1 и l_2 будет равно расстоянию между плоскостями α и β .

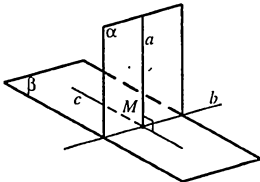


Рис. 6.5

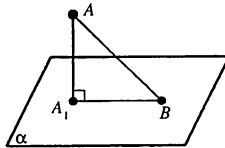


Рис. 6.6

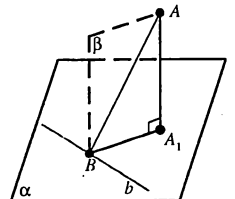


Рис. 6.7

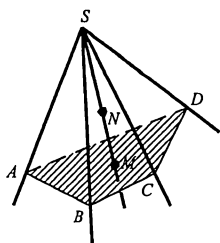


Рис. 6.8

называются *гранями* (плоскими углами) многогранного угла. Величина каждого плоского угла находится в промежутке $(0; 180^\circ)$. Многогранные углы именуются по количеству граней: углы трехгранные, четырехгранные и т. д. Любые две грани многогранного угла, имеющие общее ребро, образуют двугранный угол.

Пусть даны плоский многоугольник $\Phi = ABC\dots$ и точка S , не принадлежащая его плоскости. Множество точек пространства, лежащих на лучах SM , где $M \in \Phi$, называется *многогранным углом* (рис. 6.8).

Точка S называется *вершиной* многогранного угла, лучи SA, SB, \dots — его *ребрами*. Углы ASB, BSC, CSD, \dots

Если точка M является внутренней точкой многоугольника Φ (не лежит на его сторонах), то любая точка N луча SM ($N \neq S$) называется *внутренней* точкой многогранного угла. Множество всех внутренних точек многогранного угла называется его *внутренней областью*. Многогранный угол будет *выпуклым*, если многоугольник Φ — выпуклый.

Свойства плоских углов многогранного угла:

- 1) каждый плоский угол многогранного угла меньше суммы остальных его плоских углов;
- 2) в выпуклом многогранном угле сумма плоских углов меньше 360° .

Самый простой из многогранных углов — трехгранный угол. Необходимым и достаточным условием существования трехгранного угла с заданными плоскими углами α, β, γ является выполнение неравенств

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma, \quad \alpha + \beta + \gamma < 360^\circ.$$

6.2. МНОГОГРАННИКИ

6.2.1. Многогранник

Простой многогранной поверхностью называется объединение конечного числа многоугольников, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) для любых двух вершин этих многоугольников существует ломаная, составленная из этих сторон, с концами в данных вершинах;
- 2) каждая точка этой поверхности или является точкой только одного из заданных многоугольников, или лежит на общей стороне двух и только двух многоугольников, или является вершиной в точности одного многогранного угла, плоскими углами которого являются углы заданных многоугольников.

Многоугольники, образующие многогранную поверхность, называются ее *гранями*, стороны этих многоугольников — *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранной поверхности.

Если каждое ребро многогранной поверхности лежит в

точности в двух ее гранях, то эта поверхность называется *замкнутой*.

Многогранная поверхность разбивает пространство на две части — *внутреннюю* и *внешнюю* области, при этом внешней областью является та, в которой существует прямая, целиком лежащая в этой области.

Определение 6.1. Объединение замкнутой многогранной поверхности и ее внутренней области называется *многогранником*.

Грани, ребра, вершины поверхности многогранника называются соответственно *гранями*, *ребрами* и *вершинами* многогранника.

Многогранник называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости любой его грани.

Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* многогранника.

6.2.2. Призма

Многогранник, две грани которого — равные n -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней — параллелограммы, называется n -угольной призмой.

Эти равные n -угольники называются *основаниями* призмы. Остальные грани называются *боковыми гранями* призмы, а их объединение — *боковой поверхностью* призмы.

Призма, боковые ребра которой перпендикулярны к плоскостям оснований, называется *прямой* (рис. 6.9), в противном случае — *наклонной* (рис. 6.10).

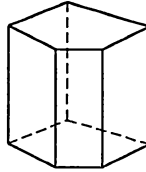


Рис. 6.9

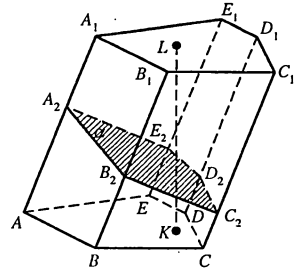


Рис. 6.10

Отрезок KL перпендикулярен к плоскостям оснований призмы, концы которого принадлежат этим плоскостям, называется *высотой* призмы (см. рис. 6.10).

Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной призмой*.

Проведем через точку A_2 , лежащую на одном из боковых ребер некоторой призмы, плоскость α , перпендикулярную к этому ребру (а следовательно, ко всем остальным).

Плоскость α пересекает боковые ребра призмы (или их продолжения) в некоторых точках, соединяя которые, получаем некоторый многоугольник, называемый *перпендикулярным сечением* призмы (рис. 6.10, $A_2B_2C_2D_2E_2$).

Пусть p_\perp — периметр перпендикулярного сечения призмы, а S_\perp — площадь этого сечения.

Объем наклонной призмы находится по формулам:

$$V = S_\perp \cdot A_1A_2, \text{ или } V = S_{\text{осн}} \cdot H,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, H — высота.

Площадь боковой поверхности призмы находится по формуле $S_b = P_\perp \cdot A_1A_2$.

Площадь полной поверхности призмы равна сумме площадей боковой поверхности и двух ее оснований.

6.2.3. Параллелепипед. Куб

Параллелепипедом называется призма, основанием которой является параллелограмм. Таким образом, все шесть граней параллелепипеда — параллелограммы (рис. 6.11).

Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.

Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке C , которая является серединой каждой из них, а также центром симметрии параллелепипеда (см. рис. 6.11).

Если боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны к плоскости основания, то параллелепипед называется *прямым*.

Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники (рис. 6.12).

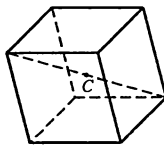


Рис. 6.11

Длины трех ребер a, b, c прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются измерениями этого параллелепипеда.

Длина любой диагонали d прямоугольного параллелепипеда находится по формуле

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Так как параллелепипед есть частный случай призмы, то площадь поверхности и объем параллелепипеда находятся по формулам для площади поверхности и объема призмы.

Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле

$$V = abc.$$

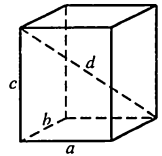


Рис. 6.12

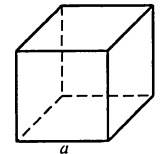


Рис. 6.13

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется **кубом**. Все грани куба — равные квадраты (рис. 6.13). Объем куба равен

$$V = a^3,$$

а площадь полной поверхности

$$S = 6a^2,$$

где a — длина ребра куба.

6.2.4. ПИРАМИДЫ

Многогранник, одна из граней которого — произвольный многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину, называется **пирамидой**.

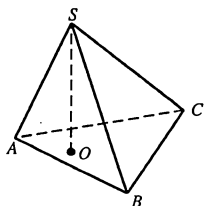


Рис. 6.14

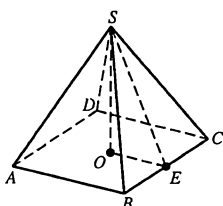


Рис. 6.15

Указанный многоугольник называется **основанием** пирамиды, остальные же грани (необходимо треугольники) — **боковыми гранями** пирамиды.

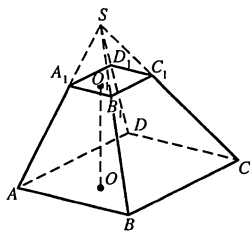


Рис. 6.16

Пирамиды именуются по виду многоугольника, лежащего в основании. Треугольная пирамида также называется **тетраэдром** (рис. 6.14).

Стороны граней пирамиды называются **ребрами** пирамиды, при этом различают **ребра** (стороны) **основания** и **боковые ребра** (остальные ребра). Об-

щая точка всех боковых граней называется **вершиной** пирамиды (см. рис. 6.14, 6.15, точка S — вершина пирамиды; SA, SB, SC, SD — боковые ребра; AB, BC, CD, AD — ребра основания).

Высотой пирамиды называется отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины пирамиды к плоскости основания (см. рис. 6.14, 6.15, SO).

Пирамида называется **правильной**, если в ее основании лежит правильный многоугольник с центром O , где SO — высота пирамиды (см. рис. 6.15, $ABCD$ — квадрат с центром O).

У правильной пирамиды все боковые ребра, а следовательно, и боковые грани, равны между собой.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой** этой пирамиды (см. рис. 6.15, SE).

Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей боковых граней, а **площадь полной поверхности** пирамиды — сумме площадей всех граней.

Объем пирамиды находится по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды; H — ее высота.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} ph,$$

где p — периметр основания пирамиды; h — ее апофема.

Рассмотрим построения усеченной пирамиды

Через внутреннюю точку A_1 некоторого бокового ребра SA произвольной пирамиды $SABCD$ проведем плоскость, параллельную плоскости основания (рис. 6.16). Эта плоскость отсечет пирамиду $SA_1B_1C_1D_1$, лежащую над плоскостью сечения (см. рис. 6.16).

Многогранник, вершинами которого являются вершины основания пирамиды A, B, C, D , а также вершины основания отсекаемой пирамиды A_1, B_1, C_1, D_1 , называется **усеченной пирамидой** (см. рис. 6.16).

Перпендикуляр OO_1 к плоскостям оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 6.16) с концами O и O_1 , лежащими на этих основаниях, называется **высотой** усеченной пирамиды.

Усеченная пирамида называется **правильной**, если она получается из правильной пирамиды. Боковыми гранями правильной усеченной пирамиды являются равные равнобедренные трапеции, высоты которых называются **апофемами** правильной усеченной пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, равная сумме площадей боковых граней, находит-ся по формуле

$$S = \frac{1}{2}(p + p')h,$$

где p, p' — периметры оснований этой пирамиды; h — ее апофема.

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей всех ее граней, т.е. сумме площадей оснований и площади боковой поверхности.

Объем усеченной пирамиды находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})H,$$

где S_1, S_2 — площади оснований этой пирамиды; H — ее высота.

6.2.5. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник называется *правильным*, если все его грани являются равными правильными многоугольниками, а все многогранные углы имеют одинаковое количество граней.

Все ребра правильного многогранника равны; также равны между собой все плоские углы правильного многогранника.

Существуют, с точностью до подобия, в точности пять видов правильных выпуклых многогранников.

Введем обозначения: V — объем многогранника; S — площадь поверхности; R — радиус описанной сферы; r — радиус вписанной сферы; a — ребро многогранника.

Рассмотрим типы правильных многогранников.

1) *Куб*. Имеет шесть граней — равных квадратов, восемь вершин и двенадцать ребер (рис. 6.17):

$$V = a^3, S = 6a^2, R = \frac{\sqrt{3}}{2}a, r = \frac{a}{2}.$$

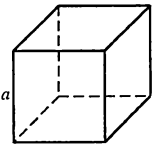


Рис. 6.17

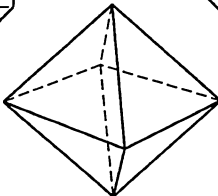


Рис. 6.19

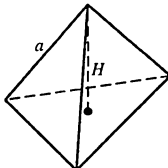


Рис. 6.18

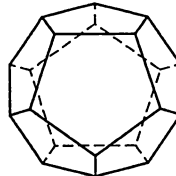


Рис. 6.20

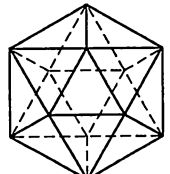


Рис. 6.21

2) *Правильный тетраэдр (правильная пирамида)*. Имеет четыре грани — равносторонние равные треугольники, четыре вершины и шесть ребер (рис. 6.18):

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3, S = \sqrt{3}a^2, R = \frac{\sqrt{6}}{4}a, r = \frac{\sqrt{6}}{12}a, H = \frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

где H — высота пирамиды.

3) *Правильный октаэдр (правильный восьмигранник)*. Имеет восемь граней — равных равносторонних треугольников, шесть вершин и двенадцать ребер (рис. 6.19):

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3, S = 2\sqrt{3}a^2, R = \frac{\sqrt{2}}{2}a, r = \frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

4) *Правильный додекаэдр (правильный двенадцатигранник)*. Имеет двенадцать граней — равных правильных пятиугольников, двадцать вершин и тридцать ребер (рис. 6.20):

$$V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})a^3, S = 3\sqrt{5}(5 + 2\sqrt{5})a^2,$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{5})a, \quad r = \frac{1}{20}\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}a.$$

$$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3, \quad S = 5\sqrt{3}a^2, \quad R = \frac{1}{4}\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}a,$$

5) *Правильный икосаэдр (правильный двадцатигранник).* Имеет двадцать граней — равных равносторонних треугольников, двенадцать вершин и тридцать ребер (рис. 6.21):

$$r = \frac{\sqrt{3}}{12}(3 + \sqrt{5})a.$$

6.3. ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

6.3.1. Основные понятия

Пусть в пространстве фиксирована прямая l и выбрана произвольная точка $M \notin l$. Через точку M проводится плоскость $\alpha \perp l$, и в этой плоскости рассматривается окружность с центром $O = \alpha \cap l$ и радиусом OM . Говорят, что эта окружность получена при вращении точки M вокруг оси l (рис. 6.22).

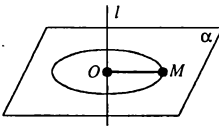


Рис. 6.22

Пусть в плоскости β , содержащей прямую l , задана некоторая фигура Φ_0 . Для любой точки $M \in \Phi_0, M \notin l$, рассмотрим окружность, полученную при вращении точки M вокруг оси l .

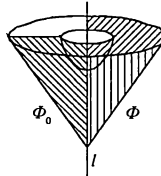


Рис. 6.23

Объединение всех таких окружностей, а также точек фигуры Φ_0 , лежащих на прямой l , называется *фигурой вращения*, полученной при вращении фигуры Φ_0 вокруг прямой l , являющейся *осью вращения* (рис. 6.23).

Сечением фигуры вращения называется непустое пересечение этой фигуры и плоскости; сечение фигуры называется *осевым*, если указанная плоскость содержит ось вращения фигуры.

6.3.2. Цилиндр

Фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон, называется *прямым круговым цилиндром* (или просто *цилиндром*).

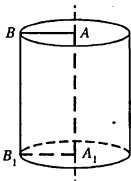


Рис. 6.24

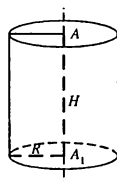


Рис. 6.25

Круги, полученные в результате вращения сторон, имеющих с осью вращения общие точки (рис. 6.24, AB и A_1B_1), называются *основаниями цилиндра*; радиус этих кругов $AB = A_1B_1$ называется *радиусом* основания цилиндра и обозначается R . Перпендикуляр к плоскостям оснований цилиндра, концы которого совпадают с центрами оснований цилиндра, называется *высотой* цилиндра и обозначается H (рис. 6.25, AA_1).

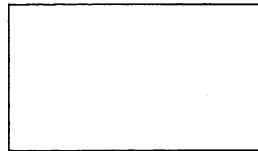


Рис. 6.26

Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник со сторонами H и $2\pi R$ (длина окружности основания цилиндра) (рис. 6.26).

При вращении вокруг той же оси ломаной, составленной из сторон прямоугольника, не лежащих на оси вращения, получается фигура, называемая *поверхностью цилиндра* (рис. 6.24).

Фигура, полученная в результате вращения стороны прямоугольника, не имеющей с осью вращения общих точек (рис. 6.24, BB_1), называется *боковой поверхностью* цилиндра.

Объем цилиндра находится по формуле

$$V = \pi R^2 H,$$

где R — радиус основания цилиндра; H — высота цилиндра.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается производная объема цилиндра как функции радиуса R :

$$S_{\text{бок}} = V'(R) = 2\pi RH.$$

Площадь полной поверхности цилиндра равна

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

6.3.3. Конусы

Фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, проходящей через один из его катетов, называется *прямым круговым конусом* (или просто конусом).

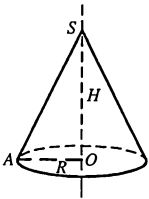


Рис. 6.27

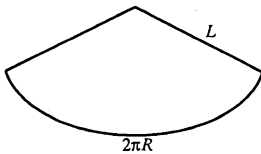


Рис. 6.28

При вращении вокруг той же оси ломаной, составленной из гипотенузы и катета этого треугольника, не лежащего на оси вращения, получается фигура, называемая *поверхностью конуса* (рис. 6.27).

Фигура, полученная в результате вращения гипотенузы, называется *боковой поверхностью* конуса. Круг, полученный в результате вращения катета, не лежащего на оси вращения, называется *основанием* конуса; сам катет (см. рис. 6.27, OA) называется *радиусом* R основания конуса.

Катет, лежащий на оси вращения, называется *высотой* конуса H (см. рис. 6.27, OS). Гипотенуза этого прямоугольного треугольника называется *образующей* L конуса (см. рис. 6.27, AS).

Развертка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор радиуса L и длины дуги $2\pi R$ (рис. 6.28).

Объем конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

где R — радиус основания конуса; H — высота конуса.

Площадь боковой поверхности конуса равна

$$S_{\text{бок}} = \pi RL,$$

а площадь полной поверхности

$$S = \pi RL + \pi R^2.$$

Часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания, называется *усеченным конусом* (рис. 6.29).

Фигура, полученная в результате вращения равнобедрен-

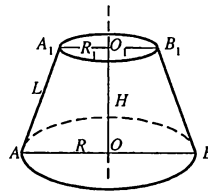


Рис. 6.29

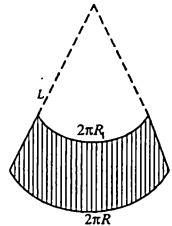


Рис. 6.30

ной трапеции вокруг ее оси симметрии, также является усеченным конусом; фигура, полученная при вращении боковых сторон этой трапеции вокруг ее оси симметрии, называется *боковой поверхностью*; при вращении же всех сторон трапеции вокруг этой же оси получается *поверхность усеченного конуса*, а при вращении оснований трапеции — *основания усеченного конуса* (см. рис. 6.29).

Боковая сторона трапеции называется *образующей* L , а высота этой трапеции — *высотой* H усеченного конуса (см. рис. 6.29).

Разверткой боковой поверхности усеченного конуса является часть кругового кольца (рис. 6.30).

Объем усеченного конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + RR_1 + R_1^2),$$

а площадь боковой поверхности усеченного конуса — по формуле

$$S_{\text{бок}} = \pi L(R + R_1),$$

где соответственно H — высота; $R = OA$, $R_1 = O_1A_1$ — радиусы оснований; L — образующая.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса можно также найти как разность боковых поверхностей полного конуса и конуса, отсекаемого сечением, параллельным плоскости основания исходного полного конуса.

6.3.4. СФЕРА И ШАР

Сфера — это множество всех точек пространства, равноудаленных от фиксированной точки C , называемой **центром** (рис. 6.31).

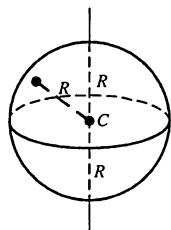


Рис. 6.31

Шаром называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки C на расстоянии, не большем данного числа R (см. рис. 6.31).

Отрезок, соединяющий любые две точки сферы, называется **хордой**. Хорда, проходящая через центр C сферы (шара), называется **диаметром** $2R$.

Шар получается при вращении полукруга вокруг оси, проходящей через его диаметр, а сфера получается при вращении полукружности вокруг той же оси. Сфера есть поверхность шара (см. рис. 6.31).

Объем шара находится по формуле

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

а **площадь** его поверхности (сферы) — по формуле,

$$S = V'_{\text{ш}}(R) = 4\pi R^2,$$

где R — радиус шара (сферы).

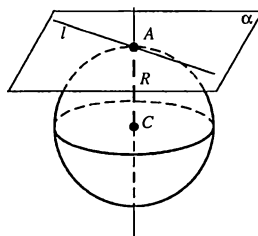


Рис. 6.32

Всякое сечение шара плоскостью есть круг или точка; наибольшие, так называемые **большие круги**? получаются при пересечении шара плоскостями, проходящими через его центр. **Касательная плоскость** —

это плоскость, имеющая с шаром одну общую точку; радиус, проведенный в эту точку, перпендикулярен к касательной плоскости. Если две точки сферы не являются **противоположными** (не лежат на концах одного диаметра), то через них можно провести только один большой круг; через противоположные точки можно провести бесконечно много больших кругов (радиуса R). Прямая l , лежащая в касательной плоскости α к шару и проходящая через точку касания A этой плоскости и шара, называется **прямой, касательной к шару** (рис. 6.32).

6.3.5. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТИ ШАРА

Часть поверхности шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями, называется **шаровым поясом**; расстояние между этими плоскостями называется **высотой** H пояса. Если одна из указанных секущих плоскостей является касательной к шару, то получается так называемая **сегментная поверхность**.

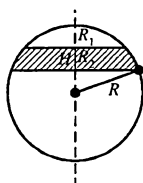


Рис. 6.33

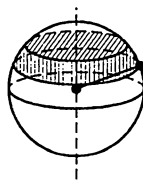


Рис. 6.34

Площадь шарового пояса (сегментной поверхности) находится по формуле

$$S = 2\pi RH,$$

где R — радиус шара; H — высота шарового пояса (рис. 6.33, 6.34).

При вращении части круга, заключенной между параллельными хордами, вокруг оси, перпендикулярной к этим хордам и содержащей диаметр, получается фигура, которая называется **шаровым слоем** (см. рис. 6.33, 6.34). **Высотой** шарового слоя H , называется высота соответствующего шарового пояса (см. рис. 6.33).

Объем шарового слоя находится по формуле

$$V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(R_1^2 + R_2^2)H,$$

где H — высота шарового слоя; R_1, R_2 — радиусы *верхнего* и *нижнего оснований* (кругов) шарового слоя.

При вращении кругового сегмента вокруг оси, перпендикулярной к его хорде и содержащей диаметр круга, получается так называемый *шаровой сегмент* (рис. 6.35, 6.36).

Высотой сегмента H называется высота соответствующей сегментной поверхности (см. рис. 6.35).

Объем шарового сегмента находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H),$$

где H — высота сегмента; R — радиус шара.

При вращении кругового сектора вокруг оси, содержащей один из радиусов этого сектора, получается фигура, которая называется *шаровым сектором* (рис. 6.37, 6.38).

Шаровой сектор можно представить как объединение шарового сегмента и кругового конуса, имеющих общее основание (рис. 6.37, 6.38, круг радиуса BD).

Объем шарового сектора находится по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

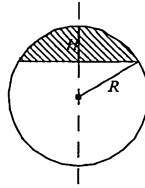


Рис. 6.35

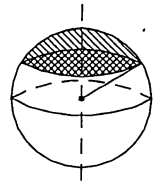


Рис. 6.36

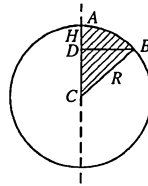


Рис. 6.37

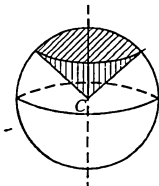


Рис. 6.38

где R — радиус шара; H — высота шарового сегмента (рис. 6.37, $AD = H$).

Площадь полной поверхности шарового сектора получается как сумма площади поверхности шарового сегмента и площади боковой поверхности конуса, составляющих этот шаровой сектор, и равна

$$S_{\text{ш.с}} = 2\pi RH + \pi R\sqrt{2RH - H^2}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ТЕМА: ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПОСТРОЕНИЕ

6.001. Доказать, что если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Решение.

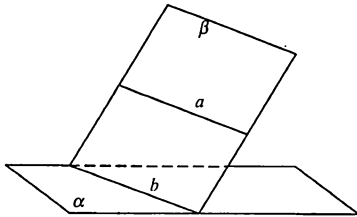


Рис. 6.39

Предположим, что плоскость β проходит через прямую a и $a \parallel \alpha$, причем $b = \alpha \cap \beta$ (рис. 6.39). Если $a \subset \alpha$, то прямые a и b совпадают. Если же $a \not\subset \alpha$, то a и b лежат в плоскости β и не пересекаются (если $M = a \cap b$, то $M \in \alpha$, т.е. $a \cap \alpha \neq \emptyset$, что противоречит условию), т.е. $a \parallel b$. **QED.**

6.002. Построить прямую, проходящую через данную точку A пространства и пересекающую две данные прямые a и b пространства.

Решение.

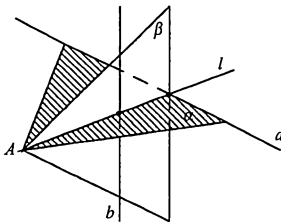


Рис. 6.40

Проводим через точку A и прямую a плоскость α , а затем через точку A и прямую b — плоскость β . Так как $A \in \alpha$ и $A \in \beta$, то $A \in \alpha \cap \beta$. Возможны случаи:

- 1) $\alpha \cap \beta = \alpha$, т.е. a и b лежат в одной плоскости. Если $A \in \alpha$, то задача имеет множество решений; если $A \notin \alpha$, то задача не имеет решения при $a \parallel b$, имеет единственное решение, если прямые a и b пересекаются (прямая l , проходящая через точку A и точку $B = a \cap b$);
- 2) $\alpha \cap \beta = l$, т.е. плоскости пересекаются по прямой l , которая и будет искомой, если l пересекает a и b ; если же $l \parallel a$ или $l \parallel b$, то задача решений не имеет (рис. 6.40).

6.003. Доказать, что если несколько прямых обладают свойством, что любые две из них пересекаются, то либо все эти прямые проходят через одну точку, либо они все лежат в одной плоскости.

Решение.

Предположим, не все данные прямые лежат в одной плоскости, тогда возьмем три прямые a, b, c , не лежащие в одной плоскости. Прямая c пересекает прямые a и b и не лежит с ними в одной плоскости, следовательно, c проходит через

точку пересечения a и b (см. 6.002). Каждая следующая прямая l пересекает все три прямые a, b, c . Если бы она не проходила через их общую точку, то прямые a, b, c necessarily лежали бы в одной плоскости, что противоречит их выбору. Таким образом, любая прямая l проходит через точку пересечения прямых a, b, c , следовательно, если все данные прямые не лежат в одной плоскости, то все они проходят через одну точку. **QED.**

6.004. Построить прямую, которая была бы параллельна данной прямой a пространства и пересекала бы заданные прямые b и c , не лежащие в одной плоскости.

Решение.

Проведем через любую точку B прямой b прямую $a_1 \parallel a$, а через какую-то точку $C \in c$ — прямую $a_2 \parallel a$. Прямые a_1 и b определяют плоскость β , а a_2 и c — плоскость γ (рис. 6.41). Если плоскости β и γ пересекаются, то их линия пересечения и будет, очевидно, искомой прямой l , если же β и γ — параллельны, то задача решений не имеет.

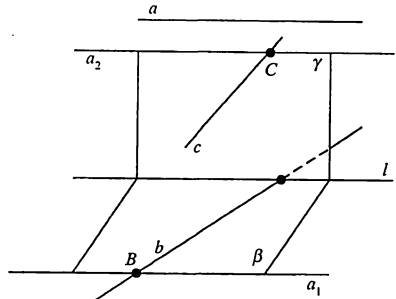


Рис. 6.41

6.005. Построить прямую, лежащую в данной плоскости α и проходящую через данную точку $A \in \alpha$, перпендикулярную к некоторой данной прямой l .

Решение.

Проведем через данную точку $A \in \alpha$ плоскость $\beta \perp l$ (что всегда возможно). Плоскости α и β пересекаются, так как $A \in \alpha \cap \beta$. Если $\alpha \cap \beta = m$, то прямая m и будет искомой, так как $m \subset \beta$, а $l \perp \beta$. Если же $\alpha \cap \beta = \alpha$, т.е. $l \perp \alpha$, то прямая, проходящая через точку A в плоскости α , и будет искомой (рис. 6.42).

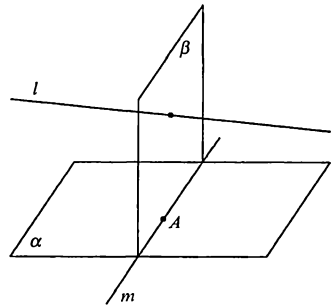


Рис. 6.42

6.006. Построить множество точек пространства, равноудаленных от трех вершин данного треугольника.

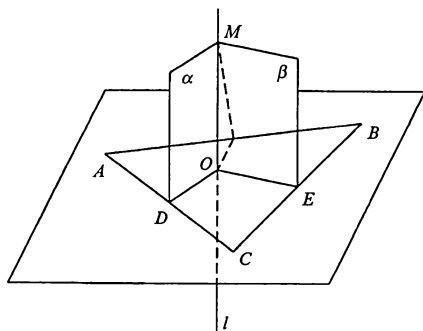


Рис. 6.43

Решение.

Множество точек, равноудаленных от точек A и C , есть плоскость α , проходящая через середину D отрезка AC перпендикулярно к нему; а множество точек, равноудаленных от точек B и C , есть плоскость β , проходящая через середину E отрезка BC перпендикулярно к нему (рис. 6.43). $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, так как центр описанной около $\triangle ABC$ окружности точка $O \in \alpha \cap \beta$. Пусть $l = \alpha \cap \beta$ (α и β очевидно не могут совпадать), тогда l — искомая прямая (нетрудно видеть, что любая точка M прямой l равноудалена также и от точек A и B).

6.007. Доказать, что множество прямых, проходящих через данную точку O и образующих равные углы с двумя данными лучами $[OA)$ и $[OB)$, выходящими из этой точки, есть плоскость, проходящая через биссектрису угла, образованного лучами $[OA)$ и $[OB)$, а также через перпендикуляр к плоскости α , проведенной через эти лучи (рис. 6.44).

Решение.

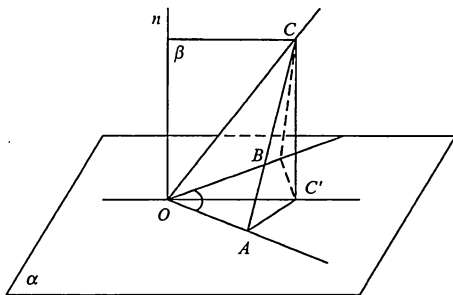


Рис. 6.44

Пусть точка C — произвольная точка искомого множества, C' — ее проекция на плоскость α . По условию $\angle COA = \angle COB$. Отложив на данных лучах равные отрезки $OA = OB$, получаем, что $\triangle OAC = \triangle OBC$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $AC = BC \Rightarrow \triangle AC'C = \triangle BC'C \Rightarrow AC' = BC'$ и $\triangle OAC' = \triangle OBC' \Rightarrow \angle AOC' = \angle BOC'$ и C' лежит на биссектрисе угла AOB , т.е. C лежит в плоскости β , проходящей через эту биссектрису и перпендикуляр n к плоскости α (рис. 6.44).

Если точка C — произвольная точка плоскости β , то C' лежит на биссектрисе, следовательно, $\triangle AOC' = \triangle BOC'$ (по двум сторонам и углу между ними), $AC' = BC' \Rightarrow \triangle ACC' = \triangle BCC' \Rightarrow AC = BC$ и $\triangle OAC = \triangle OBC$ (по трем сторонам), следовательно, $\angle AOC = \angle BOC$ (рис. 6.44). QED.

6.008. Построить множество прямых, проходящих через данную точку и образующих равные углы с двумя данными прямыми, не лежащими в одной плоскости.

Решение.

Проведем через данную точку O прямые l и m , соответственно параллельные данным прямым l и m . Искомые прямые должны образовывать такие же равные углы с прямыми l и m , какие они образуют с прямыми l и m . Проведем плоскость α через пересекающиеся прямые l и m , а также биссектрисы вертикальных углов, образованных этими прямыми, и перпендикуляр n к плоскости α через точку O (см. рис. 6.44).

Используя решение 6.007, получаем, что искомое множество — это множество точек двух плоскостей, которые проходят через перпендикуляр n к плоскости α и соответственно через биссектрисы вертикальных углов, образованных прямыми l и m .

6.009. Доказать, что если луч образует равные углы с тремя лучами, лежащими в одной плоскости, то он перпендикулярен к этой плоскости.

Решение.

Если луч $[OD]$ образует равные углы с лучами $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$, лежащими в одной плоскости α , то он лежит, с одной стороны, в плоскости β , проходящей через перпендикуляр n к плоскости α и через биссектрису угла AOB (см. 6.007, рис. 6.44), а с другой стороны, в плоскости γ , проходящей через тот же перпендикуляр n и через биссектрису угла BOC . Так как $\beta \cap \gamma = n$, то луч $[OD]$ необходимо лежит на n , т.е. перпендикулярен к плоскости α . **QED.**

6.010. Построить множество точек пространства, каждая из которых является проекцией данной точки A на плоскость, проходящую через данную точку O .

Решение.

Пусть α — некоторая плоскость, проходящая через фиксированную точку O , обозначим A_1 — проекцию данной точки A на эту плоскость, B — середину данного отрезка OA . Точка B есть центр описанной около прямоугольного $\triangle OAA_1$ окружности, следовательно, $A_1B = \frac{1}{2} AB$. Таким образом, все точки искомого множества находятся от точки B на одном и том же расстоянии $R = \frac{1}{2} AB$, т.е. лежат на сфере радиуса R с центром в точке B .

Если же точка A_1 — произвольная точка указанной сферы, то проводим плоскость α через точку O перпендикулярно A_1A и легко убеждаемся, что точка A_1 есть проекция точки A на эту плоскость (рис. 6.45).

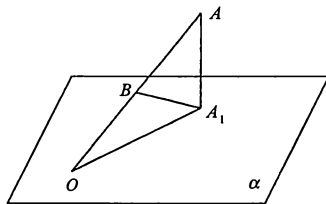


Рис. 6.45

6.011. Доказать, что множество точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей, состоит из биссекториальных плоскостей двугранных углов (т.е. плоскости, проходящей через ребро двугранного угла и делящей его на две равные части), образованных этими плоскостями.

Решение.

Проведем из некоторой точки M перпендикуляры MA и MB на грани двугранного угла α и β соответственно, тогда плоскость MAB перпендикулярна к плоскостям α и β , следовательно, перпендикулярна к ребру двугранного угла и определяет его линейный $\angle ACB$ (рис. 6.46). Таким образом, перпендикуляры MA и MB будут равны тогда и только тогда, когда CM есть биссектриса этого линейного угла, т.е. если и только если точка M принадлежит биссекториальной плоскости двугранного угла. **QED.**

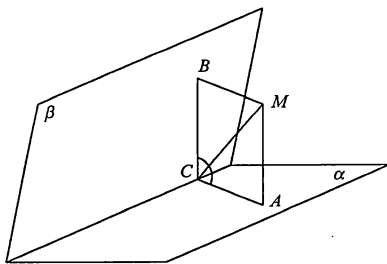


Рис. 6.46

6.012. Пусть даны двугранный угол и прямая l , пересекающая его ребро. Построить плоскость, проходящую через l , которая пересекалась бы с гранями двугранного угла по двум прямым таким образом, чтобы прямая l была биссектрисой плоского угла, получающегося в сечении.

Решение.

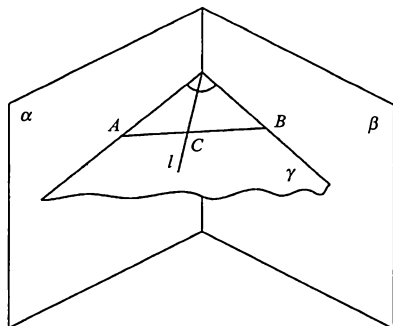


Рис. 6.47

Если γ — искомая плоскость, то проведем через некоторую точку C прямой l прямую AB в плоскости γ перпендикулярно к l (A и B — точки пересечения этой прямой с гранями α и β двугранного угла) (рис. 6.47). Тогда очевидно, что $AC = CB$. Таким образом, для построения плоскости γ необходимо построить отрезок $AB \perp l$ так, чтобы $AC = CB$.

Если провести через точку C плоскость δ , перпендикулярную к прямой l , то искомый отрезок должен лежать в этой плоскости δ . Если прямая l не перпендикулярна к ребру двугранного угла, то плоскость δ пересекает это ребро, т.е. δ пересекает грани двугранного угла по двум пересекающимися прямыми, и получается следующая планиметрическая задача: через данную точку C провести прямую таким образом, чтобы ее отрезок, заключенный между двумя данными пересекающимися прямыми, делился бы в точке C пополам. Эта задача имеет единственное решение.

Если же прямая l перпендикулярна к ребру двугранного угла, то плоскость δ будет параллельной этому ребру и в сечении с гранями будут две параллельные прямые. В этом случае получаются два варианта:

- 1) если точка C лежит в биссекторной плоскости двугранного угла, то задача имеет бесчисленное множество решений;
- 2) если точка C не лежит в биссекторной плоскости, то задача решений не имеет.

6.013. Построить множество точек, которые являются основаниями перпендикуляров, опущенных из данной точки пространства на прямые, лежащие в заданной плоскости и пересекающиеся в одной точке.

Решение.

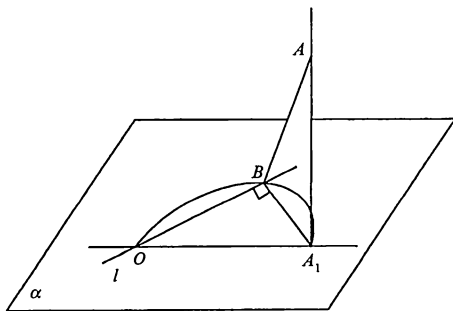


Рис. 6.48

Предположим, что прямые, лежащие в данной плоскости α , пересекаются в точке O , A — заданная точка пространства, A_1 — ее проекция на плоскость α . Для любой прямой l , проходящей через точку O в плоскости α , пусть B — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l . По теореме о трех перпендикулярах $BA \perp l$, следовательно, B лежит на окружности диаметра OA , в плоскости α .

Нетрудно убедиться, что любая точка B указанной окружности является основанием перпендикуляра, проведенного из точки A на некоторую прямую заданного множества.

Таким образом, искомое множество точек есть окружность диаметра OA_1 в плоскости α (рис. 6.48).

6.014. Доказать, что прямая, одинаково наклоненная к двум граням двугранного угла, пересекает эти грани в двух точках, одинаково удаленных от ребра.

Решение.

Пусть прямая l пересекает грани двугранного угла в точках A и B (рис. 6.49). Проведем $AA_1 \perp \beta$ и $BB_1 \perp \alpha$, AA_0 и BB_0 перпендикулярно к ребру двугранного угла. По теореме о трех перпендикулярах, A_1A_0 и B_1B_0 — также перпендикулярны к ребру, следовательно, $\angle AA_1A_0 = \angle BB_1B_0$ как линейные углы двугранного угла. По условию $\angle BAB_1 = \angle ABA_1$ как углы между прямой l и гранями, следовательно, $\triangle BAA_1 = \triangle ABA_1$ (AB — общая гипотенуза) $\Rightarrow AA_1 = BB_1$, $\triangle AA_0A_1 = \triangle BB_0B_1$ (по катету и острому углу), поэтому $AA_0 = BB_0$. QED.

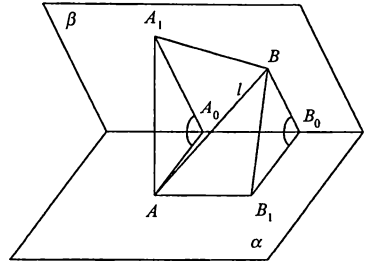


Рис. 6.49

6.015. Построить плоскость, проходящую через данную прямую и образующую данный угол с данной плоскостью.

Решение.

Через данную прямую l , пересекающую данную плоскость α в точке O , требуется провести плоскость β , пересекающую плоскость α под углом φ . Возьмем точку $A \in l$ и проведем перпендикуляр $AA_1 \perp \alpha$ и $AB \perp m$, где $m = \alpha \cap \beta$. Задача будет решена, если будет построена точка B ($\angle ABA_1 = \varphi$ как линейный угол двугранного угла). Так как $\angle OBA_1 = 90^\circ$, то B лежит на окружности диаметром OA_1 , проведенной в плоскости α . Отрезок A_1B равен катету прямоугольного треугольника с заданным катетом AA_1 и данным углом φ , т.е. полностью определен.

Если $A_1B < A_1O$ ($\varphi > \angle AOA_1$), то задача имеет два решения; если $A_1B = A_1O$ ($\varphi = \angle AOA_1$), то задача имеет одно решение; если же $A_1B > A_1O$ ($\varphi < \angle AOA_1$), то задача решений не имеет (рис. 6.50).

В случае, когда прямая $l \parallel \alpha$, через точку $A \in l$ проводим плоскость $\gamma \perp l$, а затем в этой плоскости γ строим прямую, проходящую через точку A и наклоненную под углом φ к линии пересечения плоскостей α и γ . Через полученную прямую и прямую l проводим искомую плоскость β . Задача имеет два решения.

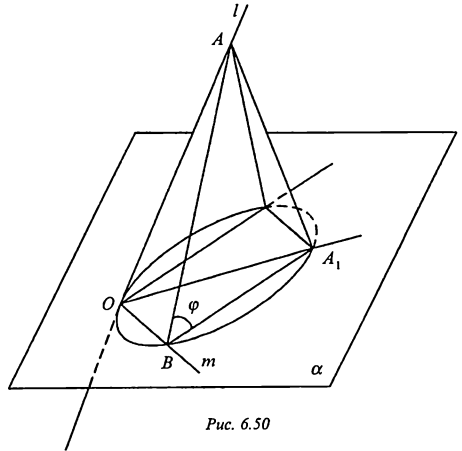


Рис. 6.50

6.016. Доказать, что если спроектировать угол AOB на плоскость, параллельную его биссектрисе OC , то проекция будет являться углом, биссектриса которого параллельна OC .

Решение.

Если отложить на сторонах угла AOB равные отрезки $OA = OB$, то $\triangle AOB$ — равнобедренный и биссектриса OC этого треугольника есть медиана и высота (рис. 6.51). Так как $AA_1 \parallel BB_1$, то $A_1C = C_1B_1$. Далее, $OC \parallel O_1C_1 \Rightarrow OO_1C_1$ прямоугольник, $OC \perp AB$, $O_1C_1 \perp CC_1 \Rightarrow O_1C_1 \perp A_1B_1$ и $\triangle O_1C_1B_1 = \triangle O_1C_1A_1$ (по двум катетам), следовательно, O_1C_1 — биссектриса $\angle A_1O_1B_1$. QED.

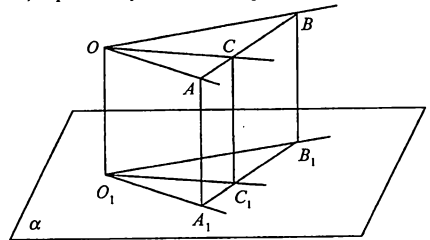


Рис. 6.51

6.017. Доказать, что если спроектировать прямой угол на плоскость, которая пересекает стороны угла, или на плоскость, которая пересекает продолжения обеих сторон, то проекция представляет собой тупой угол; если же плоскость проекций пересекает одну из сторон угла и продолжение другой его стороны, то угол будет острым.

Решение.

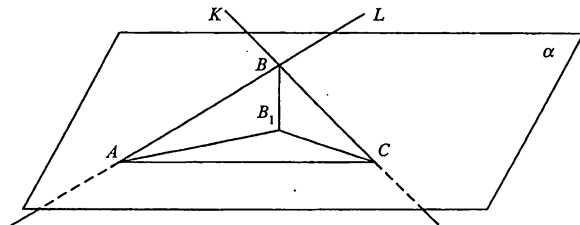


Рис. 6.52

Предположим, что стороны прямого угла ABC пересекают плоскость α в точках A и C , $\angle ABC$ проектируется на эту плоскость в угол AB_1C (рис. 6.52). Далее, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AB_1 < AB$, $CB_1 < CB \Rightarrow AC^2 > AB_1^2 + CB_1^2$ и $\angle AB_1C$ — тупой по теореме косинусов. При тех же условиях проекция $\angle KBL$ также будет тупым углом, а проекции каждого из углов KBA и LBC — острыми углами. **QED.**

6.018. Доказать, что если спроектировать данный угол на плоскость, параллельную одной из его сторон, то данный угол и угол, полученный в проекции, будут одновременно оба острыми или оба тупыми.

Решение.

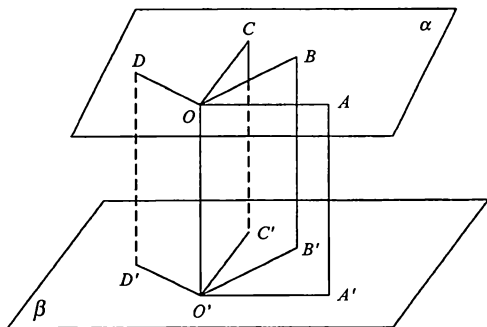


Рис. 6.53

Предположим, что даны $\angle AOB$ (острый), $\angle AOC$ (прямой), $\angle AOD$ (тупой), лежащие в плоскости α . Эти углы проектируются на плоскость β , параллельную лучу OA , соответственно в углы $\angle A'O'B'$, $\angle A'O'C'$, $\angle A'O'D'$ (рис. 6.53). Так как $O'A' \parallel OA$ и $OA \perp OCC'O'$, то $\angle A'O'C'$ — прямой. Проекция $O'B'$ луча OB должна лежать внутри $\angle A'O'C'$, следовательно, $\angle A'O'B'$ — острый. Аналогично, проекция $O'D'$ луча OD должна лежать вне $\angle A'O'C'$, поэтому $\angle A'O'D'$ — тупой. **QED.**

6.019. Доказать, что все биссекториальные плоскости всех трех двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

Решение.

Прямая пересечения двух из биссекториальных плоскостей есть множество точек, равноудаленных от первой и второй, а также от первой и третьей граней трехгранного угла, т.е. от второй и третьей. Но все точки, равноудаленные от второй и третьей граней, лежат в третьей биссекториальной плоскости, следовательно, эта плоскость проходит через прямую пересечения первых двух. QED.

6.020. Пусть даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 . Доказать, что расстояние какой-либо точки M_1 прямой l_1 до прямой l_2 будет тем больше, чем дальше эта точка отстоит от основания общего перпендикуляра к обеим прямым.

Решение.

При удалении точки M_1 по прямой l_1 от точки O_1 в прямоугольном $\Delta M_1 M_2 K$ катет $M_1 M_2 = O_1 O_2$ не меняет своей величины (рис. 6.54). В прямоугольном $\Delta O_2 M_2 K$ гипотенуза $O_2 M_2 = O_1 M_1$ увеличивается, следовательно, увеличивается и катет $M_2 K$ (угол φ — постоянный). Таким образом, в $\Delta M_1 M_2 K$ гипотенуза $M_1 K = d$ возрастает (по теореме Пифагора). QED.

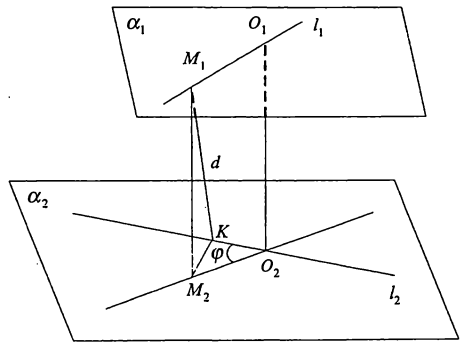


Рис. 6.54

6.021. Доказать, что во всяком двугранном угле любой плоский угол меньше суммы двух других и больше их разности.

Решение.

Докажем сначала второе утверждение, т.е. $\angle ASC - \angle ASB < \angle BSC$ (рис. 6.55). Построим $\angle ASB' = \angle ASB$ в плоскости ASC , тогда $\angle B'SC = \angle ASC - \angle ASB$ и требуется доказать, что $\angle B'SC < \angle BSC$. Откладываем отрезок SB' , равный SB , и проводим через точки B и B' плоскость, которая пересекает ребро AS в точке A' , а ребро SC — в точке C' . $\Delta SAB = \Delta S A'B'$ (по двум сторонам и углу между ними, $\angle ASB' = \angle ASB \Rightarrow AB = A'B'$ и $B'C = AC - AB < BC$). Если рассмотреть ΔBSC и $\Delta B'SC$, то $B'S = BS$, SC — общая, $B'C < BC \Rightarrow \angle B'SC < \angle BSC$. Из доказанного неравенства следует, что $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$, если $\angle ASC > \angle ASB$, при $\angle ASC \leq \angle ASB$. Это неравенство очевидно и первое утверждение истинно. QED.

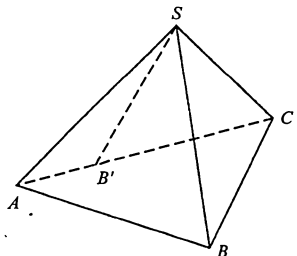


Рис. 6.55

6.022. Доказать, что плоскости, проходящие через биссектрисы граней трехгранного угла, перпендикулярно к этим граням, все три пересекаются по одной прямой.

Решение.

Прямая пересечения двух из указанных плоскостей есть множество точек, равноудаленных от первого и второго и от первого и третьего ребра трехгранного угла, т.е. это множество точек, равноудаленных от всех трех ребер трехгранного угла, в частности от второго и третьего. Но все точки, равноудаленные от второго и третьего ребра, лежат в третьей из указанных плоскостей, следовательно, эта плоскость проходит через прямую пересечения первых двух. QED.

6.023. Доказать, что плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и через биссектрисы его противоположных граней, все три пересекаются по одной прямой.

Решение.

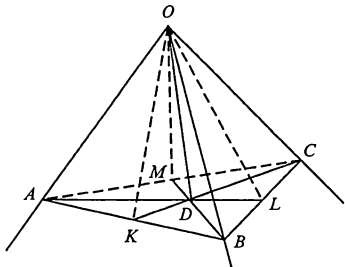


Рис. 6.56

Отложим на всех трех ребрах трехгранного угла от вершины O равные отрезки OA, OB, OC (рис. 6.56). Имеем $\triangle ABC$. Биссектрисы OK, OL, OM граней трехгранного угла делят каждую из сторон AB, BC, AC пополам, так как $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle AOC$ — равнобедренные. Рассматриваемые в задаче плоскости KOC, LOA, MOB пересекают $\triangle ABC$ по медианам KC, AL, BM . Пусть D — точка пересечения этих медиан. Все три рассматриваемые плоскости имеют две общие точки O и D , следовательно, они пересекаются по одной прямой OD . QED.

6.024. Доказать, что любой четырехгранный угол можно пересечь так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

Решение.

Пусть $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ — грани четырехгранного угла, причем грань α противоположна грани α' , а β — противоположна β' . Предположим, что при своем продолжении грани α и α' пересекутся по прямой a , а грани β и β' — по прямой b (прямые a и b проходят через вершину угла). Любая плоскость, параллельная обоим прямым a и b , пересекет четырехгранный угол по параллелограмму, так как она пересекает грани α и α' , а также грани β и β' по параллельным прямым. QED.

6.025. Доказать, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке, совпадающей с серединой каждой из них.

Решение.

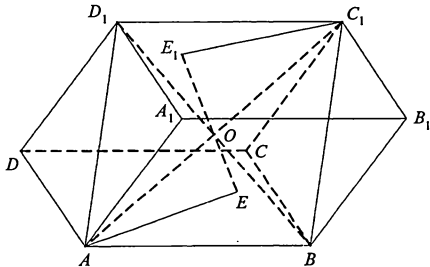


Рис. 6.57

Параллелепипед $ABCD, B, C, D_1$ имеет четыре диагонали AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 (рис. 6.57). Достаточно показать, что любые две из них, например BD_1 и AC_1 , пересекаются в точкой пересечения O делятся пополам. Проведем плоскость через параллельные прямые AB и D_1C_1 . В плоском четырехугольнике ABC_1D_1 $AB = D_1C_1$ и $AB \parallel D_1C_1$, следовательно, ABC_1D_1 — параллелограмм, диагонали которого AC_1 и BD_1 своей точкой пересечения O делятся пополам. QED.

6.026. Доказать, что отрезок любой прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, заключенный между его гранями, делится в этой точке пополам.

Решение.

Если $ABCD, B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед (см. рис. 6.57), а EE_1 — данный отрезок, то требуется доказать, что $OE = OE_1$. Проведем плоскость через две пересекающиеся прямые AC_1 и EE_1 и рассмотрим в этой плоскости $\triangle AEO$ и $\triangle C_1E_1O$. Эти треугольники равны, так как $\angle AOE = \angle E_1OC_1$ (как вертикальные), $\angle OAE = \angle OC_1E_1$ ($AE \parallel E_1C_1$) и $AO = OC_1$ (см. решение 6.025), следовательно, $OE = OE_1$. QED.

6.027. Доказать, что если все диагонали данного параллелепипеда равны между собой, то этот параллелепипед прямоугольный.

Решение.

Пусть $ABCD, B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед (рис. 6.58). Достаточно показать, что три ребра, выходящие из произвольной вершины, например точки A , взаимно перпендикулярны. В параллелограмме AD, C_1B $AC_1 = BD_1$, следовательно, это прямоугольник и $AB \perp AD_1$. Аналогично, рассматривая прямоугольник A, DCB_1 , получаем $CD \perp A_1D$. Так как $AB \parallel CD$, то $AB \perp AD_1$ и $AB \perp A_1D \Rightarrow AB \perp$ плоскости AA_1D, D_1 , т.е. $AB \perp AA_1$ и $AB \perp AD$. Рассматривая прямоугольники ADC, B_1 и A_1D_1CB , получаем, что $AD \perp$ плоскости AA_1B, B_1 , т.е. $AD \perp AA_1$. QED.

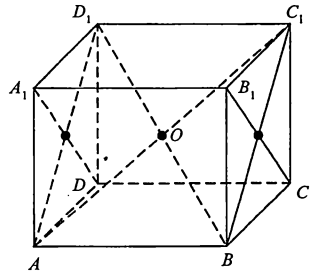


Рис. 6.58

6.028. Доказать, что если через прямую, соединяющую середины противоположных ребер треугольной пирамиды (тетраэдра), провести плоскость, пересекающую два других противоположных ребра тетраэдра, то отрезок, соединяющий точки пересечения, делится первой прямой пополам.

Решение.

Рассмотрим плоскость $MENF$, проходящую через середины E и F ребер CD и AB пирамиды $ABCD$ и пересекающую ребра AD и BC в точках M и N соответственно (рис. 6.58). Если рассмотреть середину ребра AC — точку K , то FK — средняя линия $\triangle ABC$, а KE — средняя линия $\triangle ADC$, следовательно, плоскость FKE параллельна ребрам BC и AD тетраэдра. Отрезок LO лежит в плоскостях FKE и AMN , поэтому $LO \parallel AM$. Так как FK — средняя линия $\triangle ABC$, то $AL = LN$ и LO — средняя линия $\triangle AMN$ и точка O делит отрезок MN пополам. QED.

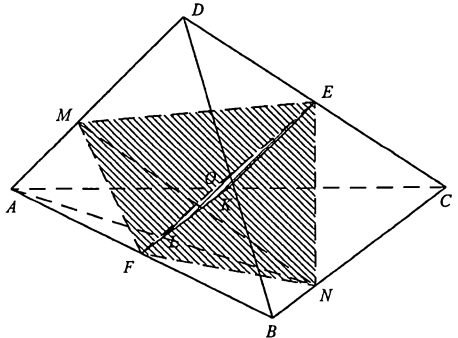


Рис. 6.59

6.029. Доказать, что около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания пирамиды можно описать окружность. Если около пирамиды можно описать сферу, то центр O этой сферы является точкой пересечения плоскости, проведенной перпендикулярно к боковому ребру пирамиды A_1B через его середину — точку E , и перпендикуляра DC к плоскости основания, восстановленного в центре D описанной около основания окружности.

Решение.

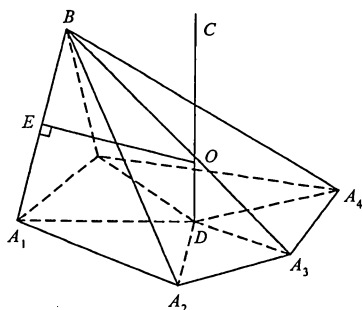


Рис. 6.60

а) Пусть около пирамиды можно описать сферу (рис. 6.60), тогда проекция D центра этой сферы, точки O , на плоскость основания, является центром описанной около основания окружности: $A_1O = A_2O = \dots = A_nO \Rightarrow \Delta A_1OD = \Delta A_2OD = \dots = \Delta A_nOD \Rightarrow A_1D = A_2D = \dots = A_nD$.
 б) Обратно, если около основания пирамиды можно описать окружность с центром в точке D , то любая точка C перпендикулярна CD к плоскости основания будет равноудалена от точек A_1, A_2, \dots, A_n (это следует из того, что $A_1D = A_2D = \dots = A_nD$), а каждая точка плоскости α , проведенной через середину E ребра A_1B перпендикулярно к нему, равноудалена от A_1 и B , следовательно, точка O пересечения CD и α есть центр описанной сферы. QED.

6.030. Доказать, что если около основания пирамиды можно описать окружность, то плоскости, проведенные перпендикулярно к ребрам пирамиды через их середины, пересекаются в одной точке. В частности, для тетраэдра такие плоскости всегда пересекаются в одной точке.

Решение.

Если около основания пирамиды можно описать окружность с центром D , то около пирамиды можно описать сферу с центром O (см. решение 6.029, рис. 6.60), и точка O — точка пересечения перпендикуляра CD и плоскости α , проведенной через середину E ребра A_1B перпендикулярно к нему. Проведем через точку O плоскость α_k перпендикулярно к боковому ребру BA_k и пусть $E_k = \alpha_k \cap BA_k$. Так как $OB = OA_k$, то $BE_k = E_kA_k$, т.е. α_k пересекает ребро BA_k в его середине E_k для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Проведем через прямую CD плоскость β_k перпендикулярно к ребру основания A_kA_{k+1} , и пусть $F_k = \beta_k \cap A_kA_{k+1}$. Так как ΔA_kDA_{k+1} — равнобедренный ($A_kD = A_{k+1}D$), то высота DF_k этого треугольника является его медианой, следовательно, F_k — середина ребра A_kA_{k+1} . Таким образом, точка O лежит на всех плоскостях вида α_k и β_k . Так как вокруг основания тетраэдра (треугольника) всегда можно описать окружность, то для него все плоскости такого вида пересекаются в точке O — центре описанной около тетраэдра сферы. QED.

6.031. Доказать, что во всякий тетраэдр можно вписать сферу, центр которой совпадает с точкой пересечения биссекториальных плоскостей всех внутренних двугранных углов (они пересекаются в одной точке).

Решение.

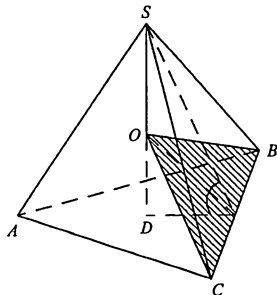


Рис. 6.61

Пусть SD — линия пересечения биссекториальных плоскостей двугранных углов при ребрах AS, CS, BS тетраэдра $ABCS$ (рис. 6.61) (см. решение 6.019). Проведем биссекториальную плоскость COB двугрannого угла при ребре BC до пересечения с SD в точке O . Так как точки биссекториальной плоскости двугрannого угла равноудалены от его граней, то точка O , будучи общей точкой четырех биссекториальных плоскостей, будет находиться на одинаковом расстоянии от граней ASC, ASB, BSC, ABC тетраэдра, в частности принадлежать биссекториальным плоскостям двугранных углов при ребрах AB и AC . Таким образом, все шесть биссекториальных плоскостей пересекаются в одной точке O , которая и является центром вписанной в данный тетраэдр сферы. QED.

6.032. Доказать, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади какой-либо ее боковой грани на расстояние от этой грани до противоположного бокового ребра.

Решение.

Объем треугольной призмы $ABCA, B_1C_1A_1$ равен произведению площади перпендикулярного сечения KMN на ребро AA_1 (рис. 6.62), следовательно,

$$V = S_{\Delta KMN} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} NL \cdot MK \cdot AA_1 = \frac{1}{2} NL \cdot S_{A_1C_1CA},$$

где NL — высота ΔKMN , т.е. $NL \perp MK$.

Так как $AA_1 \perp$ плоскости KMN , то $NL \perp AA_1$, $NL \perp MK \Rightarrow$

$\Rightarrow NL \perp$ плоскости A_1C_1CA , поэтому NL — это расстояние от BB_1 до плоскости A_1C_1CA .

QED.

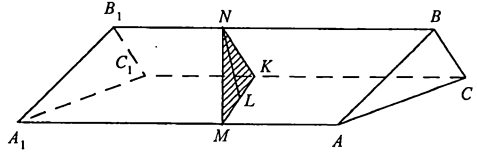


Рис. 6.62

6.033. Доказать, что объемы двух тетраэдров, имеющих по равному трехгранному углу, относятся как произведение ребер, образующих эти углы.

Решение.

Разместим два тетраэдра, имеющих по равному трехгранному углу, так, чтобы эти трехгранные углы совпали, как в тетраэдрах $OA_1B_1C_1$ и $OA_2B_2C_2$ на рис. 6.63. Опустим высоты A_1D_1

и A_2D_2 этих тетраэдров, тогда $\frac{A_1D_1}{A_2D_2} = \frac{OA_1}{OA_2}$. Далее, имеем:

$$\frac{S_{\Delta OB_1C_1}}{S_{\Delta OB_2C_2}} = \frac{\frac{1}{2} OB_1 \cdot OC_1 \sin \alpha}{\frac{1}{2} OB_2 \cdot OC_2 \sin \alpha} = \frac{OB_1 \cdot OC_1}{OB_2 \cdot OC_2},$$

$$\frac{V_{OA_1B_1C_1}}{V_{OA_2B_2C_2}} = \frac{\frac{1}{3} S_{\Delta OB_1C_1} \cdot A_1D_1}{\frac{1}{3} S_{\Delta OB_2C_2} \cdot A_2D_2} = \frac{OB_1 \cdot OC_1}{OB_2 \cdot OC_2} \cdot \frac{A_1D_1}{A_2D_2} = \frac{OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1}{OA_2 \cdot OB_2 \cdot OC_2}.$$

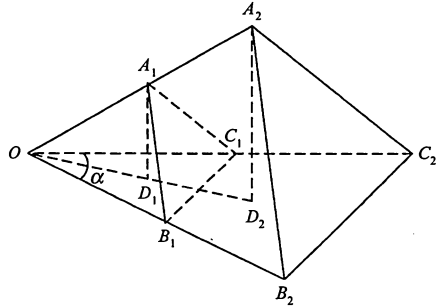


Рис. 6.63

QED.

6.034. Доказать, что объемы двух тетраэдров, имеющих общее ребро и равные двугранные углы при этом ребре, относятся как произведения площадей граней, образующих этот двугранный угол.

Решение.

Разместим два тетраэдра, имеющих по равному ребру и по равному двугранный угол при этих ребрах, так, чтобы эти ребра и углы совпали, как в тетраэдрах $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ на рис. 6.64. Опустим в этих тетраэдрах высоты DE и D_1E_1 и рассмотрим подобные ΔEFD и $\Delta E_1F_1D_1$, где $EF \perp BC$, $E_1F_1 \perp B_1C_1$ ($\angle DEF = \angle D_1E_1F_1 = 90^\circ$, $\angle E_1F_1D_1 = \angle EFD$ — линейные углы общего двугранный угол этих тетраэдров). Отсюда имеем:

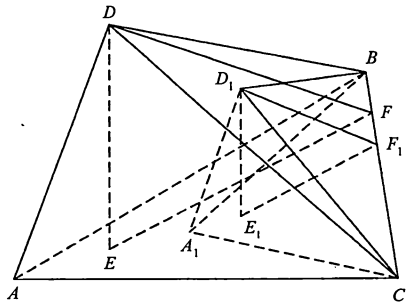


Рис. 6.64

$$\frac{DE}{D_1E_1} = \frac{DF}{D_1F_1} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot DF}{\frac{1}{2}BC \cdot D_1F_1} = \frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle D_1BC}}, \quad \frac{V_{ABCD}}{V_{A_1BCD_1}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot DE}{\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC} \cdot D_1E_1} = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle A_1BC} \cdot S_{\triangle D_1BC}}. \quad \text{QED.}$$

6.035. Пересечь тетраэдр плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

Решение.

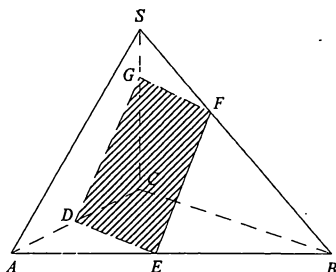


Рис. 6.65

Предположим, что сечение тетраэдра $ABCS$ некоторой плоскостью есть параллелограмм $DEFG$ (рис. 6.65). Так как $FG \parallel DE$, то FG параллельна плоскости основания ABC , следовательно, $FG \parallel BC$ не пересекаются, т.е. $FG \parallel BC$ (они лежат в одной грани BCS). Отсюда $BC \parallel DEFG$. Рассуждая аналогично, получаем $AS \parallel DEFG$. Обратно, легко видеть, что любая плоскость, параллельная двум противоположным ребрам тетраэдра и пересекающая его остальные ребра, дает в сечении параллелограмм. Так как тетраэдр имеет три пары противоположных ребер, то существует три направления, которые может иметь плоскость, пересекающая тетраэдр по параллелограмму. QED.

6.036. Доказать, что в пространственном четырехугольнике с непараллельными сторонами середины диагоналей и середины двух противоположных сторон являются вершинами некоторого параллелограмма.

Решение.

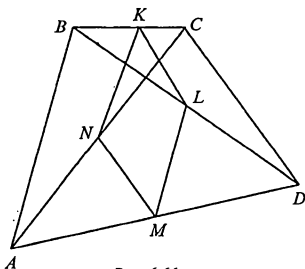


Рис. 6.66

В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 6.66) K и M — середины сторон BC и AD , а N и L — середины диагоналей AC и BD , следовательно, KN — средняя линия $\triangle ABC$, LM — средняя линия $\triangle ABD$, поэтому $KN \parallel AB \parallel LM$ и

$KN = \frac{1}{2}AB = LM$. Таким образом, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. QED.

6.037. Если в правильном тетраэдре соединить его три вершины с серединой высоты, проведенной из четвертой вершины, то получаются три попарно перпендикулярные прямые (доказать).

Решение.

Пусть $ABCS$ — правильный тетраэдр, у которого все ребра равны a , E — середина высоты SD , опущенной из вершины S на грань ABC (рис. 6.67). Так как AD — радиус окружности, описанной около правильного $\triangle ABC$,

то $AD = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $SD = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (по теореме Пифагора),

$ED = \frac{1}{2}SD = \frac{a}{\sqrt{6}}$, $AE = CE = BE = \sqrt{AD^2 + ED^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. В $\triangle ABE$ по теореме

косинусов $AB^2 = 2AE^2 - 2AE^2 \cos \angle AEB \Rightarrow a^2 = a^2 - a^2 \cos \angle AEB$, $\cos \angle AEB = 0 \Leftrightarrow \angle AEB = 90^\circ$. Аналогичными рассуждениями получаем, что $\angle AEC = \angle BEC = 90^\circ$. QED.

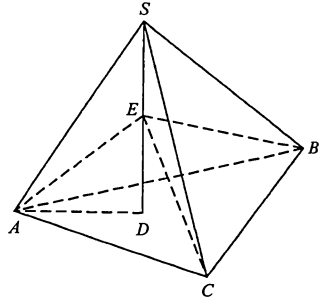


Рис. 6.67

6.038. Доказать, что если из точки O , лежащей в основании ABC тетраэдра $SABC$, провести прямые OA' , OB' , OC' , параллельные ребрам SA , SB , SC , до пересечения их с гранями соответственно SBC , SCA , SAB в точках A' , B' , C' , то имеет место равенство $\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = 1$.

Решение.

Рассмотрим два тетраэдра $SABC$ и $SOBC$ с общим основанием — гранью SBC (рис. 6.68). Если из вершин A и O этих тетраэдров опустить на основание высоты, то эти высоты, а следовательно, и объемы этих тетраэдров будут относиться как

$AS:OA'$, т.е. $\frac{V_{ABCS}}{V_{SOBC}} = \frac{AS}{OA'}$. Аналогично получаем, что

$\frac{V_{ABCS}}{V_{SOAB}} = \frac{SC}{OC'}$, $\frac{V_{ABCS}}{V_{SOAC}} = \frac{SB}{OB'}$. Таким образом, имеем

$$\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = \frac{V_{SOBC} + V_{SOAC} + V_{SOAB}}{V_{ABCS}} = \frac{V_{ABCS}}{V_{ABCS}} = 1.$$

QED.

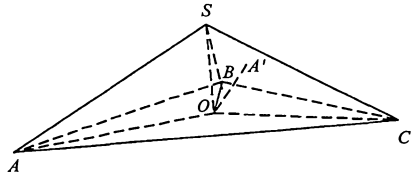


Рис. 6.68

6.039. Доказать, что биссекториальная плоскость двугранного угла тетраэдра делит его противоположное ребро в отношении, равном отношению площадей граней, образующих этот двугранный угол.

Решение.

Пусть ASD — биссекториальная плоскость двугранного угла при ребре AS тетраэдра $ABCS$ (рис. 6.69), рассмотрим тетраэдр $ABDS$ с основанием — гранью ABS и тетраэдр $ACDS$ с основанием — гранью ACS . Из общей вершины D этих тетраэдров опустим в каждой из тетраэдров на основание высоту. Так как точка D лежит на биссекториаль-

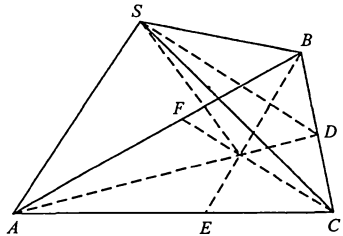


Рис. 6.69

ной плоскости, то она равноудалена от граней ABS и ACS , следовательно, эти высоты равны. Получаем $\frac{V_{ABDS}}{V_{ACDS}} = \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}}$.

Если же за общее основание этих тетраэдров принять ASD , то высоты этих тетраэдров, опущенных на это основание,

будут относиться как $BD : DC$, следовательно, $\frac{V_{ABDS}}{V_{ACDS}} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}}$. QED.

6.040. Построить сечение куба плоскостью, представляющее собой правильный шестиугольник.

Решение.

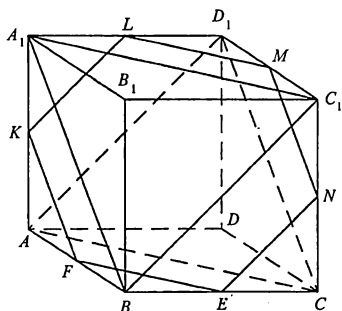


Рис. 6.70

Рассмотрим сечения ACD_1 и BA_1C_1 куба, которые представляют собой равносторонние треугольники, плоскости которых параллельны (рис. 6.70). Через среднюю линию LM $\Delta A_1D_1C_1$ проведем плоскость, параллельную этим сечениям; тогда в сечении куба этой плоскостью получается шестиугольник $EFKLMN$. Каждая из сторон полученного шестиугольника равна половине диагонали грани куба (как средняя линия

соответствующего треугольника), например $\frac{1}{2} AC$. Все углы этого шестиугольника по 120° , так как их стороны параллельны сторонам равностороннего треугольника BA_1C_1 . Таким образом, шестиугольник $EFKLMN$ — правильный. QED.

6.041. Доказать, что в правильном тетраэдре противоположные ребра перпендикулярны.

Решение.

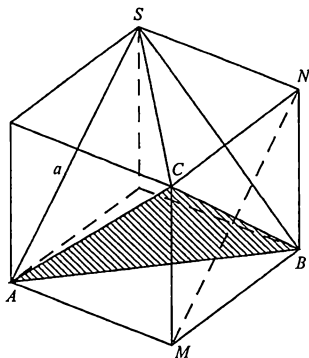


Рис. 6.71

Любой правильный тетраэдр $ABCS$ с ребром a можно достроить до куба так, чтобы вершины тетраэдра находились в вершинах куба, а ребра тетраэдра являлись диагоналями этого куба (рис. 6.71). Тогда $AS \parallel MN$, а $MN \perp BC$ как диагонали квадрата $MCNB$, следовательно, $AS \perp BC$. QED.

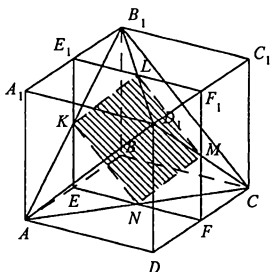


Рис. 6.72

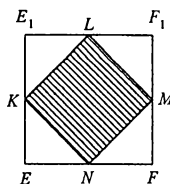


Рис. 6.73

6.042. Доказать, что правильный тетраэдр можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился квадрат.

Решение.

Достроим правильный тетраэдр ACD, B_1 до куба (рис. 6.72), как это делалось в задании 6.041, затем через середину F ребра куба CD проведем плоскость FEE_1F_1 параллельно грани куба AA_1D_1D . Эта плоскость будет пересекаться с ребрами тетраэдра в их серединах, т.е. $AK = KB_1$, $B_1L = LD_1$, $CM = MD_1$, $AN = NC$. Но тогда $E_1K = KE$, $E_1L = LF_1$, $F_1M = MF$, $FN = NE$ и $KLMN$ — квадрат (6.73). QED.

6.043. Доказать, что в правильном тетраэдре сумма расстояний от любой его внутренней точки до всех его четырех граней имеет постоянную величину, равную его высоте.

Решение.

Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр, O — его внутренняя точка, $DK = h$ — высота, а длины перпендикуляров, опущенных на грани соответственно ABD, BDC, ADC, ABC , равны s, a, b, d (рис. 6.74). Требуется доказать, что $a + b + c + d = h$. Проведем через точку O плоскость $A_1B_1C_1 \parallel ABC$, тогда $d = OL = K_1K$ и остается доказать, что $a + b + c = h_1$, где $h_1 = DK_1$ — высота пирамиды $A_1B_1C_1D$. Проведем через точку O плоскость $B_2D_2C_2 \parallel B_1C_1D$, тогда точка O окажется на ребре B_2C_2 нового тетраэдра $A_1B_2C_2D_2$ и остается доказать, что $b + c = h_2$, где h_2 — высота этого нового тетраэдра. Далее, проведем через точку O плоскость $A_3OD_3 \parallel A_1B_2D_2$, тогда точка O является вершиной оставшегося тетраэдра $A_3OD_3C_2$ и остается доказать, что $b = h_3$, где h_3 — высота последнего тетраэдра. Равенство $b = h_3$ — очевидно. QED.

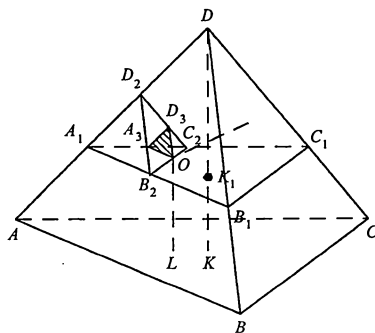


Рис. 6.74

6.044. Доказать, что если три ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, образуют правильный тетраэдр, то найдется такое сечение этого параллелепипеда плоскостью, что в сечении получится правильный шестиугольник.

Решение.

Пусть $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, о котором говорится в условии задачи (рис. 6.75). Так как $AD_1 \parallel BC_1$, $D_1C_1 \parallel A_1B_1$, то $AD_1C_1 \parallel BA_1C_1$. Проведем через середину ребра AB параллелепипеда, точку N плоскость $NEFKLM$, параллельную плоскости

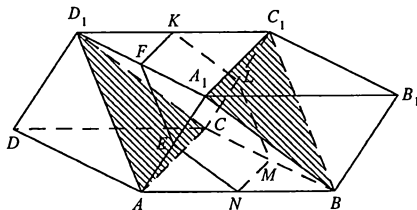


Рис. 6.75

AD_1C . Тогда легко видеть, что NE, EF, FK, KL, LM, MN — средние линии в $\triangle AA_1B, \triangle AD_1A_1, \triangle D_1C_1A_1, \triangle D_1C_1C, \triangle CC_1B, \triangle BAC$ соответственно, равные половине длины ребра правильного тетраэдра, например AD . Все углы шестиугольника $NEFKLM$ равны 120° , так как, например, стороны угла KFE параллельны сторонам равностороннего $\triangle C_1A_1B$. Таким образом, полученный шестиугольник $NEFKLM$ — правильный. **QED.**

6.045. Через три вершины параллелепипеда, которые являются концами ребер, выходящих из одной вершины, проведена плоскость. Доказать, что треугольник, получающийся в пересечении параллелепипеда этой плоскостью, пересекается диагональю параллелепипеда, выходящей из той же точки, в точке пересечения медиан.

Решение.

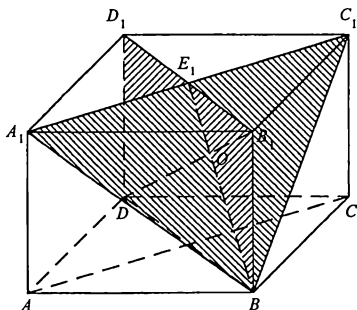


Рис. 6.76

Пусть A_1BC — треугольник, о котором говорится в условии задачи, B_1D — диагональ параллелепипеда (рис. 6.76). Точка E_1 — середина A_1C_1 , следовательно, BE_1 — медиана и диагональ B_1D пересекает $\triangle A_1BC_1$ в точке O , лежащей на медиане BE_1 . Далее, $\triangle BDO$ подобен $\triangle E_1B_1O$ (по трем углам), следовательно, $OE_1 : OB = E_1B_1 : BD = 1 : 2 \Rightarrow BO = 2OE_1$, т.е. точка O — точка пересечения медиан $\triangle BA_1C_1$. **QED.**

6.046. В правильном тетраэдре $SABC$ через ребро AC проведена плоскость, пересекающая ребро SB в точке E . Доказать, что проекция вершины B на плоскость сечения лежит на высоте сечения, проведенной к стороне AC . При каком условии эта проекция совпадает с точкой E ?

Решение.

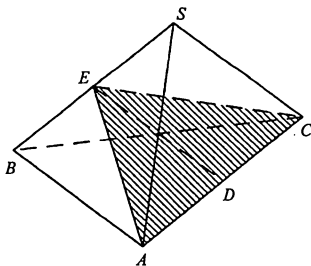


Рис. 6.77

Из условия имеем $\triangle ABE = \triangle CBE$ ($AB = BC$, BE — общая, $\angle ABE = \angle CBE = 60^\circ$) $\Rightarrow \angle BEA = \angle CBE$ и вершина B проектируется на биссектрису угла AEC . Далее, $AE = EC \Rightarrow ED$ — биссектриса и высота $\triangle AEC$, следовательно, точка B проектируется на ED (или на ее продолжение). Очевидно, что проекция точки B совпадает с точкой E тогда и только тогда, когда сечение $EAC \perp BS$. **QED.**

6.047. Доказать, что плоскости, проходящие через концы ребер куба, выходящих из двух противоположных вершин куба, делят диагональ куба, соединяющую эти вершины, на три равные части.

Решение.

Требуется доказать, что диагональ A_1C куба $AB_1CDA_1B_1C_1D_1$ делится плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 на три равные части, т.е. $A_1K = KL = LC$ (рис. 6.78). Проведем $B_1M \parallel A_1C$ до пересечения с плоскостью BDC_1 в точке M . Так как $B_1M \parallel CL$ и расстояния от точек B_1 и C до плоскости BDC_1 равны, то $B_1M = CL$. Далее, $B_1M = KL$ как параллельные отрезки между параллельными плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 , следовательно, $CL = KL$. Аналогично доказывается, что $A_1K = KL$. QED.

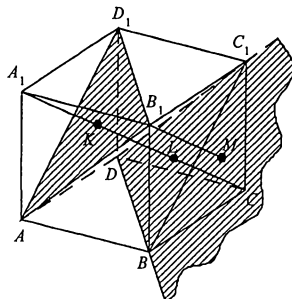


Рис. 6.78

6.048. Доказать, что сумма объемов пирамид, имеющих своими основаниями боковые грани призмы, а вершиной — некоторую точку внутри призмы, постоянна. Найти отношение суммы объемов этих пирамид к объему призмы.

Решение.

Пусть M — некоторая точка, лежащая внутри призмы, для определенности $AB_1CDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.79). Проведем $MN \parallel CC_1$ до пересечения с $A_1B_1C_1D_1$ в точке N . Расстояние от точки N до грани AA_1B_1B равно расстоянию от точки M до этой же грани, следовательно, объемы пирамид MAA_1B_1B и NAA_1B_1B (эта пирамида не показана на рисунке) равны. Аналогично будут равновелики пирамиды MAA_1D_1D и NAA_1D_1D , MDD_1C_1C и NDD_1C_1C , MCC_1B_1B и NCC_1B_1B . Далее, обозначая через h высоту призмы, получаем

$$\begin{aligned} V_{MAA_1D_1D} + V_{MDD_1C_1C} + V_{MCC_1B_1B} + V_{MAA_1B_1B} &= V_{NAA_1D_1D} + V_{NDD_1C_1C} + \\ &+ V_{NCC_1B_1B} + V_{NAA_1B_1B} = V_{\text{пр.}} - V_{MABCD} - V_{MA_1B_1C_1D_1} = V_{\text{пр.}} - V_{NABCD} = \\ &= S_{ABCD} \cdot h - \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = \frac{2}{3} S_{ABCD} \cdot h = \frac{2}{3} V_{\text{пр.}} \end{aligned}$$

Отметим, что доказательство не зависит от числа сторон основания призмы. QED.

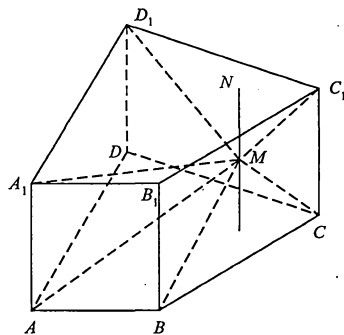


Рис. 6.79

6.049. Доказать, что объем многогранника, ограниченного какими-либо двумя многоугольниками, расположенными в параллельных плоскостях, и треугольниками или трапециями, вершинами которых служат вершины этих многоугольников, равен $V = \frac{1}{6} h (S_1 + S_2 + 4S_3)$, где h — расстояние между плоскостями этих многоугольников, S_1 и S_2 — их площади, S_3 — площадь сечения плоскостью, параллельной двум данным плоскостям и находящейся от них на равных расстояниях.

Решение.

Пусть O — некоторая точка сечения $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ данного многогранника, о котором говорится в условии задачи (рис. 6.80). Соединив точку O со всеми вершинами многогранника, получаем две пирамиды с вершиной O , парал-

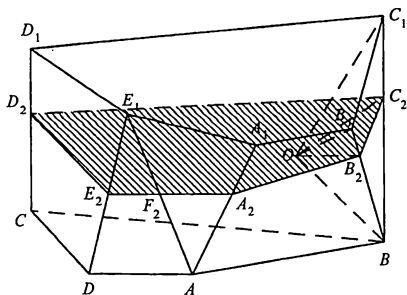


Рис. 6.80

тельными основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ и высотами $\frac{h}{2}$.

объемы которых будут равны: $V_1 = \frac{1}{6} S_1 h$, $V_2 = \frac{1}{6} S_2 h$, а также серию треугольных пирамид с вершинами в точке O и основаниями, лежащими в боковых гранях данного многогранника (например, OBB_1C_1); если боковая грань — трапеция, то ей соответствуют две такие пирамиды (например, грани AA_1B_1B соответствуют пирамиды OAA_1B и OA_1BB_1).

Объем каждой из таких боковых пирамид, например $V_{OBB_1C_1}$, найдем следующим образом:

$$V_{OBB_1C_1} = 4V_{OBB_2C_2} \text{ (так как } S_{BB_1C_1} = \frac{1}{4} S_{BB_2C_2} \text{),}$$

$$V_{OBB_2C_2} = \frac{1}{3} S_{OB_2C_2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{6} S_{OB_2C_2}, \quad V_{OBB_1C_1} = \frac{4}{6} S_{OB_2C_2}.$$

Суммирование объемов всех таких боковых пирамид дает объем $V_3 = \frac{4}{6} S_2 h$. Таким образом, общий объем много-

гранника равен $V = \frac{1}{6} S_1 h + \frac{1}{6} S_2 h + \frac{4}{6} S_3 h = \frac{1}{6} h(S_1 + S_2 + 4S_3)$.

Отметим, что доказательство не зависит от числа сторон оснований многогранника.

QED.

6.050. Доказать, что объем усеченной пирамиды находится по формуле $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})h$, где S_1 и S_2 — площади оснований этой пирамиды, а h — ее высота.

Решение.

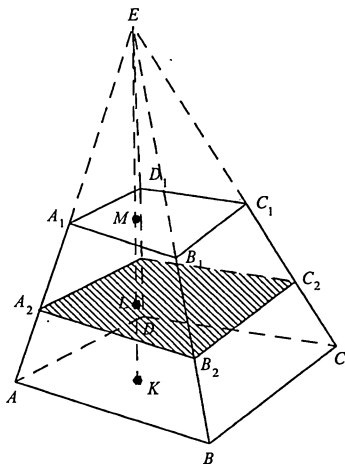


Рис. 6.81

Пусть $ABCD, B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида (дальнейшее доказательство не зависит от числа сторон оснований пирамиды), $h = MK$ — ее высота (рис. 6.81). Продолжим боковые ребра этой пирамиды до пересечения в точке E . Проведем сечение $A_2B_2C_2D_2$ плоскостью, проходящей через середину A_1 ребра AA_1 , параллельно основаниям пирамиды. Используя подобие, имеем:

$$EM : EL : EK = \sqrt{S_2} : \sqrt{S_3} : \sqrt{S_1} \Leftrightarrow x : \left(x + \frac{h}{2}\right) : (x + h) = \sqrt{S_2} : \sqrt{S_3} : \sqrt{S_1},$$

где $x = EM$, $S_3 = S_{A_2B_2C_2D_2}$. Отсюда получаем:

$$(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}) : \sqrt{S_3} = (2x + h) : \left(x + \frac{h}{2}\right) = 2 \Rightarrow 4S_3 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

Используя формулу, доказанную в задании 6.049, находим

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} h(S_1 + S_2 + 4S_3) = \frac{1}{6} h(S_1 + S_2 + S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}) = \\ &= \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}). \end{aligned}$$

QED.

6.051. Доказать, что прямая, имеющая с цилиндрической поверхностью с круговым основанием более двух общих точек, является образующей этой поверхности, т.е. прямой, проходящей через окружность основания и целиком лежащей на боковой поверхности цилиндра.

Решение.

Если прямая l , которая не является образующей данного цилиндра, имеет с боковой поверхностью этого цилиндра общую точку A , то плоскость π , проходящая через l параллельно образующим цилиндра, пересекает плоскость основания цилиндра по прямой l_1 , которая пересекается с окружностью, лежащей в основании цилиндра, в точке A_1 (рис. 6.82). Таким образом, каждой общей точке боковой поверхности и прямой l соответствует общая точка окружности основания и прямой l_1 , и наоборот, каждой общей точке этой окружности и прямой l_1 соответствует точка пересечения прямой l и поверхности. Но прямая l_1 не может иметь с окружностью более двух общих точек, следовательно, и прямая l , отличная от образующих, не может иметь с поверхностью более двух общих точек. QED.

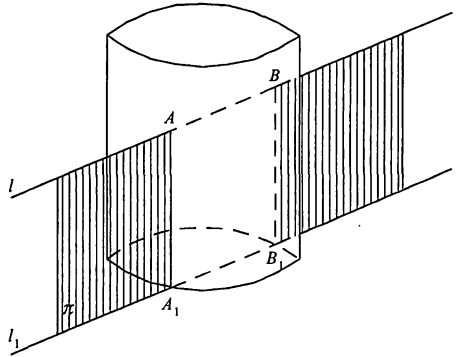


Рис. 6.82

6.052. Через данную точку пространства провести касательную плоскость к данному цилиндру с бесконечными образующими.

Решение.

Через данную точку M проведем плоскость, перпендикулярную к оси цилиндра. Эта плоскость π пересечет боковую поверхность цилиндра по окружности с центром в точке O (рис. 6.83). В плоскости π проведем к этой окружности касательные MA и MB , а через точки A и B — образующие, параллельные оси цилиндра. Плоскости, проходящие через точку M и эти образующие, будут искомыми.

Задача имеет два решения, одно решение или не имеет решений в зависимости от того, лежит ли точка M вне указанной окружности, на окружности или внутри окружности.

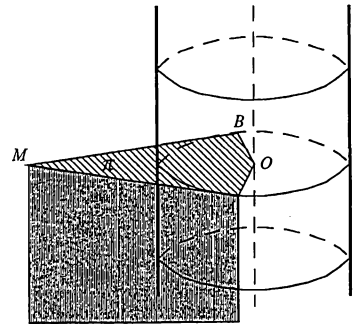


Рис. 6.83

6.053. Доказать, что если боковая поверхность конуса имеет с некоторой прямой более двух общих точек, то эта прямая есть образующая конуса.

Решение.

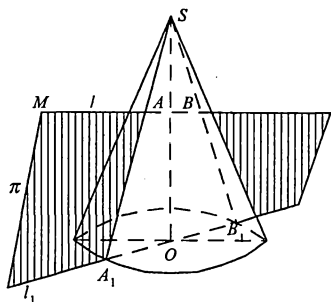


Рис. 6.84

Прямая, проходящая через вершину S конуса, имеет с боковой поверхностью конуса одну общую точку или является образующей этой поверхности.

Пусть прямая l , не проходящая через точку S и не являющаяся образующей, имеет с боковой поверхностью общую точку A (рис. 6.84). Плоскость π , проходящая через прямую l и точку S , пересекает плоскость основания по прямой l_1 . Образующая SA пересекает прямую l_1 в точке A_1 , лежащей на окружности основания. Таким образом, имеем взаимнооднозначное соответствие между точками пересечения прямой l с боковой поверхностью конуса и точками пересечения прямой l_1 с окружностью основания. Но прямая l_1 не может иметь с окружностью более двух общих точек, следовательно, и прямая l не может пересекать поверхность конуса более чем в двух точках.

Таким образом, если прямая имеет с боковой поверхностью конуса более двух общих точек, то, необходимо, она является образующей. QED.

6.054. Через данную точку провести касательную плоскость к данному круговому конусу.

Решение.

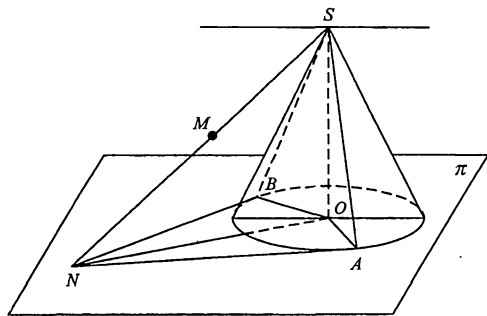


Рис. 6.85

Через данную точку M проведем прямую SM до пересечения с плоскостью π основания в точке N (если она существует), а затем проведем через точку N касательные в плоскости π к окружности основания (рис. 6.85). Если A и B — точки касания, то плоскости SNA и SNB и будут искомыми.

Задача имеет два решения, одно решение или не имеет решений в зависимости от того, лежит ли точка N вне окружности основания, на окружности основания или внутри окружности.

Предположим, что прямая SM параллельна плоскости основания. В этом случае проводим касательные к окружности в плоскости π , параллельные прямой SM . Плоскости, проведенные через вершину конуса и через каждую из этих касательных, и будут искомыми. В этом случае задача имеет два решения.

6.055. Доказать, что если круговой конус касается обеих граней двугранного угла, то:

- 1) образующие, вдоль которых происходит касание, составляют с ребром двугранного угла равные углы;
- 2) плоскость, проходящая через ось конуса и ребро двугранного угла, образует равные углы с его гранями, а также с плоскостями, проходящими через ось конуса и через образующие, вдоль которых происходит касание.

Решение.

Предположим, что конус с вершиной S касается граней двугранного угла с ребром SN вдоль образующих SA и SB (рис. 6.85), точка O — центр основания конуса.

1) $\angle SNA = \angle SNB$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle NSA = \angle NSB$.

2) Треугольные углы $SNOA$ и $SNOB$ симметричны, так как их три плоских угла соответственно равны. Следовательно, равны их соответственные двугранные углы при общем ребре SN . QED.

6.056. Найти множество, состоящее из точек осей конусов, касающихся двух данных плоскостей.

Решение.

Предположим, что SO — ось одного из конусов касающихся двух данных плоскостей NSA и NSB (см. рис. 6.85), тогда плоскость SNO образует с этими двумя плоскостями равные двугранные углы (см. 6.055), следовательно, является биссекториальной плоскостью одного из двугранных углов, образованных данными плоскостями.

Обратно, пусть SO — некоторая прямая, которая лежит в биссекториальной плоскости и пересекает ребро двугранного угла в точке S , O — любая точка на этой прямой. Через точку O проводим плоскость, перпендикулярную к прямой SO , до пересечения с ребром двугранного угла в точке N (если N существует) и рассматриваем линии NA и NB пересечения этой плоскости с гранями угла. Тогда NO — есть биссектриса угла BNA , поэтому найдется окружность с центром в точке O , которая лежит в плоскости BNA и касается прямых NA и NB . Конус, имеющий своим основанием круг, ограниченный этой окружностью и вершиной — точкой S , будет касаться плоскостей SNA и SNB .

Эти рассуждения нужно слегка изменить, если плоскость, проходящая через точку O перпендикулярно к прямой SO , будет параллельна ребру двугранного угла.

Таким образом, искомое множество точек есть пара биссекториальных плоскостей двугранных углов, образованных данными плоскостями.

6.057. Найти множество, состоящее из точек осей конусов, для которых две данные пересекающиеся прямые являются образующими.

Решение.

Ось конуса OS образует равные углы со всеми его образующими, в частности с данными прямыми l_1 и l_2 (рис. 6.86). Обратно, каждую прямую, образующую с l_1 и l_2 равные углы, можно взять за ось конуса, имеющего l_1 и l_2 своими образующими. Таким образом, искомое множество точек есть пара взаимно перпендикулярных плоскостей, которые перпендикулярны к плоскости, в которой лежат l_1 и l_2 , и проходят через биссектрисы углов, образованных l_1 и l_2 .

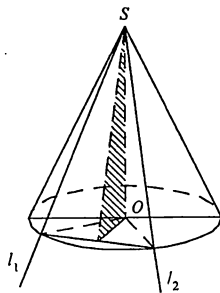


Рис. 6.86

6.058. Найти множество точек, отношение расстояний которых от данной точки и от данной плоскости, проходящей через эту точку, постоянно.

Решение.

Предположим, что A — данная точка, π — данная проходящая через нее плоскость, M_0 — фиксированная точка искомого множества, M — произвольная точка этого множества, M_0P_0 и MP — перпендикуляры, опущенные на плоскость π из точек M_0 и M параллельно l (рис. 6.87). Из условия имеем $MA:MP = M_0A:M_0P_0 \Rightarrow \Delta M_0P_0A \sim \Delta MPA \Rightarrow \angle MAP = \angle M_0AP_0$, следовательно, $\angle MAB = \angle M_0AB$. Обратно, если для некоторой точки M пространства $\angle MAB = \angle M_0AB$, то $MA:MP = M_0A:M_0P_0$.

Таким образом, искомое множество точек есть поверхность конуса (бесконечного), имеющего точку A своей вершиной, прямую l — своей осью и прямую M_0A — своей образующей, где M_0 — некоторая точка, для которой величина $M_0A:M_0P_0$ имеет заданное значение.

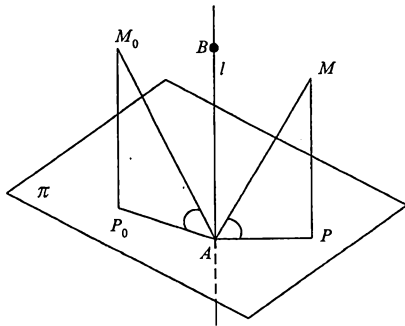


Рис. 6.87

6.059. Доказать, что прямая, по которой пересекаются плоскости оснований конусов, имеющих общую вершину и пересекающиеся высоты, перпендикулярна к плоскости, содержащей высоты конусов.

Решение.

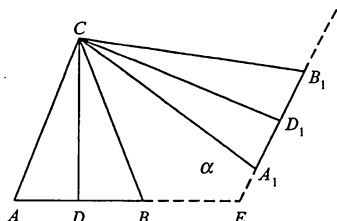


Рис. 6.88

Рассмотрим плоскость α , проходящую через общую вершину C этих конусов и их высоты CD и CD_1 (рис. 6.88). Через центры оснований D и D_1 этих конусов проведем прямые перпендикулярно к плоскости α , а через точку E — прямую $l \perp \alpha$. Так как l будет принадлежать как плоскости основания первого конуса, так и плоскости основания второго, то она и будет той прямой, по которой пересекаются плоскости оснований конусов.

QED.

6.060. Доказать, что угол при вершине конуса больше, чем угол между двумя образующими, не лежащими в одной плоскости с его осью.

Решение.

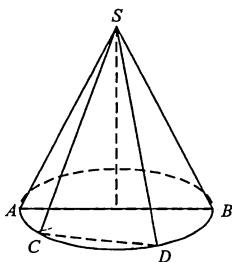


Рис. 6.89

Пусть $\angle ASB$ — угол при вершине конуса (угол в осевом сечении конуса), а $\angle CSD$ — угол между образующими, не лежащими в осевом сечении (рис. 6.89), тогда $AS = SB = SC = SD$ и $AB > CD$. Применяя теорему косинусов к $\triangle ABS$ и $\triangle CDS$, получаем, что $\angle ASB > \angle CSD$.

QED.

6.061. Доказать, что проекция диагонали осевого сечения усеченного конуса на основание равна сумме радиусов окружностей оснований конуса.

Решение.

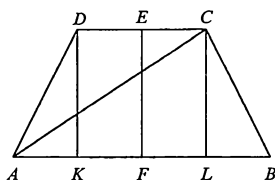


Рис. 6.90

Рассмотрим осевое сечение $ABCD$ усеченного конуса с осью EF (рис. 6.90) и радиусами оснований DE и AF . Проекция AL диагонали AC будет равна: $AL = AF + FL = AF + EC = AF + DE$.

QED.

6.062. Доказать, что из всех образующих конуса наибольший и наименьший углы с данным лучом составляют образующие, лежащие в одной плоскости с этим лучом и с осью конуса.

Решение.

Через ось конуса SO и данный луч SD проведем плоскость π , которая пересекает боковую поверхность конуса по образующим SA и SB (рис. 6.91), где SB лежит с лучом SD по одну сторону от SO (луч SD может находиться и внутри угла OSB). Пусть SC — образующая конуса, не лежащая в плоскости π . Из трехгранного угла SOC получаем $\angle CSD < \angle CSO + \angle OSD = \angle ASO + \angle OSD = \angle ASD$. С другой стороны, имеем $\angle CSD > \angle OSD - \angle CSO = \angle OSD - \angle BSO = \angle BSD$. QED.

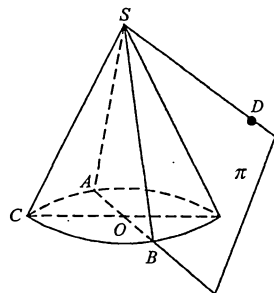


Рис. 6.91

6.063. Через диаметр полукруга длиной 2 см проведена плоскость под углом 45° к плоскости полукруга, который лежит в основании полуцилиндра. Доказать, что в развертке полуцилиндра линия пересечения проведенной плоскости с боковой поверхностью полуцилиндра образует дугу синусоиды.

Решение.

В развертке полуцилиндра дуга OM становится отрезком прямой, которую примем за ось Ox , за ось Oy возьмем прямую ON (рис. 6.92). Так как полуокружность основания имеет единичный радиус, то $\overset{\circ}{OM} = \pi$, т.е. $x \in [0; \pi]$, где $x = \overset{\circ}{OC}$, $\sin x = \sin \angle ODC$. Проведем $CA \perp OM$, тогда $AB \perp OM$ (по теореме о трех перпендикулярах) и $\angle BAC = 45^\circ$, следовательно, $BC = AC =$

$$= \frac{AC}{CD} = \sin x. \text{ Но } BC = y, \text{ т.е. } y = \sin x, x \in [0; \pi].$$

QED.

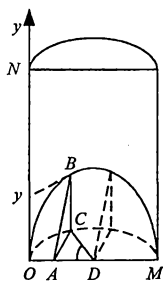


Рис. 6.92

6.064. Построить сферу, проходящую через две окружности, не лежащие в одной плоскости и имеющие две общие точки.

Решение.

Предположим, что две окружности с центрами в точках C_1 и C_2 , не лежащие в одной плоскости, имеют две общие точки A и B (рис. 6.93). Центр всякой сферы, проходящей через окружность, лежит на перпендикуляре к плоскости этой окружности, проведенной через ее центр, и наоборот, всякая сфера, проходящая через точку A , центр которой лежит на этом перпендикуляре, проходит через эту окружность. Прямые l_1 и l_2 лежат в плоскости, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину, они не параллельны и не совпадают (при противном плоскости α_1 и α_2 , перпендикулярные к этим прямым, также были бы параллельны или совпадали, что противоречит условию), следовательно, пересекаются в некоторой точке O .

Сфера с центром в точке O и радиусом OA , и только она, является искомой.

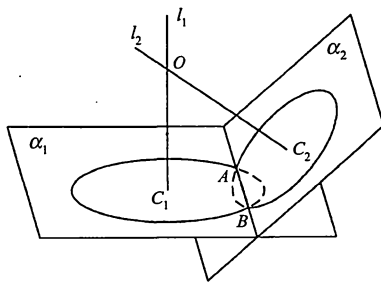


Рис. 6.93

6.065. Доказать, что если окружность, проходящая через произвольные три точки поверхности, принадлежит этой поверхности, то поверхность есть сфера или плоскость.

Решение.

Если A, B, C — три точки данной поверхности, не лежащие на одной прямой, то, по условию, все точки окружности ABC принадлежат поверхности. Пусть D — некоторая точка поверхности, не лежащая на окружности ABC , тогда через точки A, B, C, D можно провести сферу (плоскость) Φ и для любой точки $M \in \Phi$ найдется окружность, лежащая на Φ , которая проходит через точки D и M и пересекает окружность ABC в двух точках. Построенная окружность лежит на данной поверхности, так как она имеет с этой поверхностью три общие точки, а именно: точку D и две точки окружности ABC . Таким образом, Φ есть подмножество множества точек данной поверхности.

Предположим, что найдется точка $N \notin \Phi$, которая лежит на данной поверхности, тогда через точку N и произвольную точку P пространства можно провести окружность, которая пересекает сферу (плоскость) Φ в двух точках. Эта окружность имеет с данной поверхностью три общие точки, а именно: точку N и две точки Φ , следовательно, эта окружность принадлежит данной поверхности. Получили, что произвольная точка P пространства принадлежит этой поверхности, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что точка P не существует, т.е. данная поверхность совпадает с Φ . QED.

6.066. Построить множество точек, каждая из которых является проекцией данной точки пространства на плоскость, проходящих через другую данную точку.

Решение.

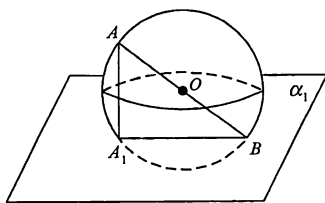


Рис. 6.94

Проекция A данной точки A пространства на какую-либо плоскость α , проходящую через другую данную точку B , является вершиной прямого угла AA_1B , следовательно, лежит на сфере, имеющей AB своим диаметром (рис. 6.94).

Обратно, если M — произвольная точка этой сферы, не совпадающая с точкой A , то $\angle AMB = 90^\circ$ и точка M есть проекция точки A на плоскость, проходящую через точку B перпендикулярно к AM . Точка B есть проекция точки A на плоскость, проходящую через точку B перпендикулярно к AB , а точка A совпадает со своей проекцией на плоскость, проходящую через прямую AB .

Таким образом, искомое множество есть сфера, имеющая AB своим диаметром.

6.067. Доказать, что если какое-то число окружностей обладает тем свойством, что любые две из них пересекаются в двух точках, то:

- либо все эти окружности имеют две общие точки;
- либо они лежат на одной сфере или на одной плоскости.

Решение.

Если A и B — точки пересечения двух из данных окружностей C_1 и C_2 , то через эти окружности можно провести сферу (плоскость) Φ (см. рис. 6.93). Если среди данных окружностей имеется окружность C_3 , не проходящая хотя бы через одну из точек A и B , то эта окружность C_3 лежит на сфере (плоскости) Φ , так как она имеет с Φ более двух общих точек (точки пересечения с окружностями C_1 и C_2). Любая другая данная окружность C пересекает каждую из окружностей C_1, C_2, C_3 в двух точках, следовательно, имеет со сферой (плоскостью) Φ более двух общих точек, так как C_3 не проходит хотя бы через одну из точек A и B , а значит, C принадлежит Φ .

Таким образом, если среди данных окружностей имеется окружность, не проходящая хотя бы через одну из точек A и B , то все данные окружности лежат на сфере (плоскости) Φ . QED.

6.068. Построить множество точек, каждая из которых является центром сечения шара плоскостью, проходящей через данную точку.

Решение.

Так как все секущие плоскости проходят через одну точку, а центр сечения шара плоскостью есть проекция центра шара на эту плоскость, то центры рассматриваемых сечений лежат на сфере S (см. 6.066).

Если данная точка лежит внутри данного шара, то искомым множеством будет сфера S , если же вне, то часть сферы S , расположенная внутри данного шара.

6.069. Построить множество точек окружностей, по которым конусы с вершиной в данной точке касаются сфер, имеющих фиксированный центр и всевозможный радиус.

Решение.

Если точка C — данная общая вершина описанных конусов, а точка O — общий центр рассматриваемых сфер, то $\angle CAO = 90^\circ$, где C — одна из точек касания (рис. 6.95). Таким образом, точка A лежит на сфере, имеющей отрезок OC своим диаметром. Эта сфера и будет искомым множеством точек, так как любая ее точка M удовлетворяет условиям задачи.

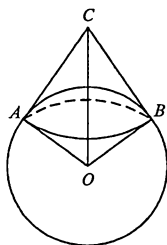


Рис. 6.95

6.070. Построить множество точек, из которых можно провести к данной сфере три касательные плоскости, образующие трехгранный угол с тремя плоскими углами по 90° .

Решение.

Предположим, что через некоторую точку M можно провести три попарно перпендикулярные плоскости к сфере радиуса R с центром в точке C . Проведем через точку C три плоскости, параллельные этим касательным плоскостям, в результате получается куб с ребром R и с одной из вершин, точкой C , MC — диагональ этого куба (рис. 6.96).

Таким образом, $MC = R\sqrt{3}$.

Обратно, если для некоторой точки M : $MC = R\sqrt{3}$, то через эту точку можно провести три взаимно перпендикулярные касательные плоскости к сфере, строя куб на отрезке CM как на диагонали.

Окончательно имеем, что искомое множество точек есть сфера радиусом $R\sqrt{3}$, где R — радиус данной сферы с центром в точке C .

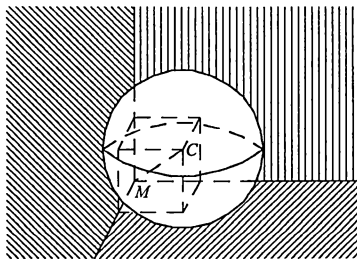


Рис. 6.96

6.071. Построить множество точек, из которых можно провести к данной сфере три касательные прямые, образующие трехгранный угол с тремя плоскими углами по 90° .

Решение.

Предположим, что из некоторой точки M можно провести к данной сфере три касательные MA , MB , MC (рис. 6.97), образующие трехгранный угол с тремя плоскими углами по 90° , а следовательно, с тремя прямыми двугранными углами.

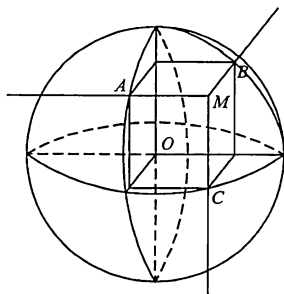


Рис. 6.97

Проведя через центр O сферы три плоскости, параллельные плоскостям граней этого трехгранного угла, получим прямоугольный параллелепипед, который является кубом, так как $OA = OB = OC$. Таким образом, расстояние точки M от центра сферы O равно диагонали куба OM , у которого диаго-

наль грани равна радиусу шара R , т.е. $OM = R\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Обратно, если $OM = R\sqrt{\frac{3}{2}}$ для некоторой точки M , то в кубе, построенном на отрезке OM как на диагонали, диагональ грани будет равна радиусу сферы. Так как диагонали граней OA, OB, OC соответственно перпендикулярны к прямым MA, MB, MC , то эти три попарно перпендикулярные прямые будут касательными к сфере.

Таким образом, искомое множество точек есть сфера радиусом $R\sqrt{\frac{3}{2}}$ с центром в точке O .

6.072. Построить сферу, проходящую через данную окружность и касающуюся данной плоскости.

Решение.

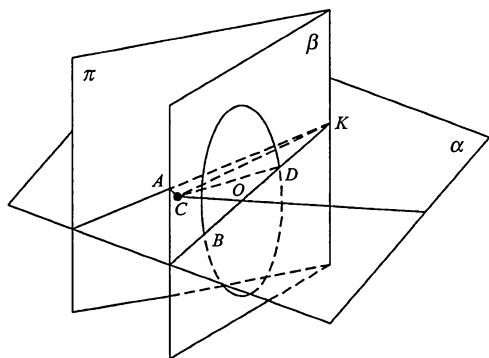


Рис. 6.98

Проведем через центр данной окружности, точку O , плоскость α перпендикулярно к данной плоскости π , а также плоскость β — плоскость данной окружности (рис. 6.98). Пусть K — точка пересечения плоскостей α и π , B и D — точки пересечения плоскостей α и β . На линии пересечения плоскостей π и α откладываем от точки K (в ту или другую сторону) отрезок KA , представляющий собой среднее пропорциональное между отрезками KD и KB . Точка A будет точкой касания искомой сферы с данной плоскостью π . Центр C искомой сферы совпадает с точкой пересечения перпендикуляра, проведенного к плоскости π в точке A , с осью данной окружности, а ее радиус равен отрезку CD . Наибольшее число решений — два.

Если плоскость π параллельна плоскости окружности β , то точкой касания A будет точка пересечения плоскости π с осью данной окружности. Центром искомой сферы будет точка пересечения оси данной окружности с плоскостью, перпендикулярной к отрезку AD и проходящей через его середину. В этом случае задача имеет одно решение.

6.073. Построить сферу, которая проходит через две данные точки A и B и касается данной прямой l , пересекающей прямую AB .

Решение.

Проведем плоскость π через точки A и B и через данную прямую l , пересекающую прямую AB в точке C (рис. 6.99). Тогда любая сфера, проходящая через точки A и B и касающаяся прямой l , будет пересекать плоскость π по окружности, также проходящей через точки A и B и касающейся прямой l . Если $CK_1 = CK_2 = \sqrt{CA \cdot CB}$, то, проведя перпендикуляры K_1O_1 и K_2O_2 до пересечения с серединным перпендикуляром O_1O_2 отрезка AB в точках O_1 и O_2 , получаем две окружности O_1 и O_2 , обладающие этим свойством.

Таким образом, каждая сфера, удовлетворяющая условиям задачи, проходит через окружность O_1 или O_2 , и обратно, любая сфера, проходящая через одну из окружностей O_1 или O_2 , имеет требуемые свойства.

Задача имеет множество решений.

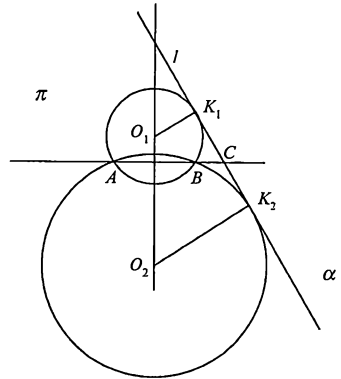


Рис. 6.99

6.074. Найти множество точек, каждая из которых является точкой касания сферы, проходящей через две данные точки и касающейся данной плоскости.

Решение.

Пусть A и B — данные точки, α — данная плоскость, C — точка пересечения прямой AB и плоскости α (см. рис. 6.99). Отрезок касательной CK из точки C к любой сфере, проходящей через точки A и B , есть среднее пропорциональное $\sqrt{CA \cdot CB}$ между отрезками CA и CB . Таким образом, искомым множеством точек будет окружность с центром в точке C радиусом $\sqrt{CA \cdot CB}$ в плоскости α .

Если прямая AB параллельна плоскости α , то искомым множеством точек касания есть прямая, по которой плоскость α пересекает плоскость, перпендикулярную к отрезку AB и проходящую через его середину.

6.075. Найти множество центров сфер, касающихся двух данных скрещивающихся прямых, при условии, что центры этих сфер лежат в плоскости, параллельной этим прямым и находящейся от них на равных расстояниях.

Решение.

Пусть a и b — две данные скрещивающиеся прямые, a_1 и b_1 — их проекции на плоскость π , им параллельную и находящуюся от них на равных расстояниях, O — лежащий в плоскости π центр сферы, касающейся прямых a и b в точках A и B , A_1 и B_1 — проекции точек A и B на плоскость π (рис. 6.100). $\triangle OAA_1 = \triangle OBB_1$, так как $OA = OB$ и $AA_1 = BB_1$. Таким образом, точка O равноудалена от прямых a_1 и b_1 . Обратно, если $OA_1 = OB_1$, то $OA = OB$ и каждая точка плоскости π , равноудаленная от прямых a_1 и b_1 , есть центр одной из рассматриваемых сфер. Отсюда получаем, что множество таких точек O есть пара взаимно перпендикулярных прямых в плоскости π — биссектрис углов между прямыми a_1 и b_1 .

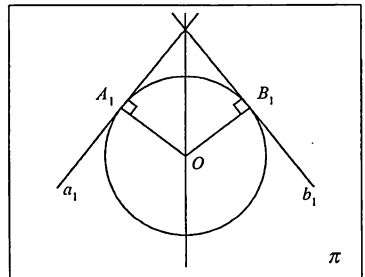


Рис. 6.100

6.076. Найти множество центров сфер, касающихся трех данных плоскостей.

Решение.

Если какая-то точка M является центром сферы, касающейся трех данных плоскостей, то она равноудалена от всех этих плоскостей, и наоборот. Таким образом, требуется найти множество точек, равноудаленных от трех данных плоскостей.

В случае, когда три данные плоскости пересекаются в одной точке, то искомое множество точек состоит из четырех прямых, где каждая из этих четырех прямых является осью конуса, касающегося трех данных плоскостей.

Если три данные плоскости попарно пересекаются по трем параллельным прямым, то шесть биссекториальных плоскостей двугранных углов, образованных данными плоскостями, пересекаются по три по четырем прямым, параллельным линиям пересечения данных плоскостей. Эти четыре прямые и будут искомым множеством. Каждая из этих четырех прямых является осью цилиндра, касающегося трех данных плоскостей.

В случае, когда две из данных плоскостей параллельны, а третья их пересекает, то четыре биссекториальные плоскости двугранных углов, образованных данными плоскостями, попарно параллельны; эти биссекториальные плоскости попарно пересекаются по двум прямым, отличным от линий пересечения данных плоскостей. Эти две прямые и будут искомым множеством. Каждая из двух прямых будет в то же время осью цилиндра, касающегося трех данных плоскостей.

6.077. Разделить поверхность шара на данное число равновеликих частей плоскостями, проходящими через данную прямую, лежащую вне шара.

Решение.

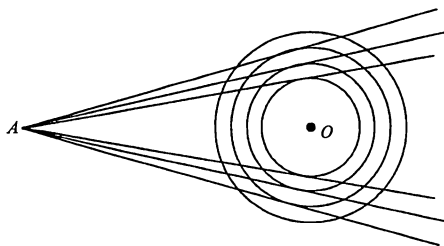


Рис. 6.101

Поверхность шара равна произведению длины его большой окружности на его диаметр, а поверхность сферического сегмента равна произведению длины той же окружности на высоту сегмента, поэтому высота сегмента относится к диаметру шара в той же пропорции

$\frac{k}{n}$, как и поверхность сегмента к поверхности шара. Таким образом, плоскости, отсекающие от данного шара сферические сегменты, поверхность каждого из которых

составляет $\frac{k}{n}$ поверхности шара, касаются одного и того же шара, концентрического с данным; этот шар делит все

диаметры исходного шара в отношении $\frac{k}{n-k}$.

Следовательно, чтобы разделить поверхность данного шара на n равновеликих частей плоскостями, проходящими через данную прямую l , достаточно разделить один из диаметров шара на n равных частей, провести через все точки деления шара, концентрические данному, и построить касательные плоскости к этим шарам, проходящие через прямую l . На рис. 6.101 для $n = 7$ изображается сечение исходного шара плоскостью, проходящей через центр O шара перпендикулярно к прямой l в точке A .

6.078. Доказать, что данный шар отсекает от любого шара, проходящего через его центр и его пересекающего, сферический сегмент, имеющий одну и ту же поверхность.

Решение.

Пусть O — центр данного шара, C — центр произвольного шара, проходящего через точку O и пересекающего данный, D — такая точка на сфере второго шара, что OD — его диаметр, A — одна из точек окружности, по которой пересекаются поверхности этих шаров, B — проекция точки A на прямую OD (рис. 6.102).

Поверхность сегмента, отсекаемого шаром O от шара C , равна $\pi \cdot OD \cdot OB$. Из $\triangle AOD$ имеем $OD \cdot OB = OA^2$, т.е. поверхность рассматриваемого сегмента равна $\pi \cdot OA^2$ — площади большого круга данного шара независимо от выбора второго шара. QED.

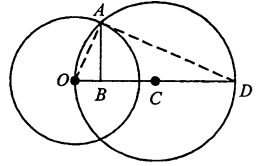


Рис. 6.102

6.079. Около шара описан цилиндр. Доказать, что поверхность шарового пояса, заключенного между двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндра, равна части поверхности цилиндра, заключенного между теми же плоскостями.

Решение.

Поверхность шарового пояса равна длине окружности большого круга шара, умноженной на высоту. Указанная часть боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания цилиндра, т.е. длины окружности большого круга, на расстояние между обеими секущими плоскостями, равное высоте пояса. Таким образом, искомое равенство доказано. QED.

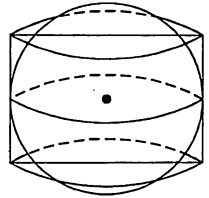


Рис. 6.103

6.080. Доказать, что для всех многогранников, описанных около одного и того же шара, отношение объема к поверхности имеет одну и ту же величину.

Решение.

Любой многогранник, описанный около данного шара, можно разложить на пирамиды с общей вершиной в центре шара, имеющие своими основаниями все грани многогранника. Объем каждой такой пирамиды равен произведению площади

соответствующей грани многогранника на $\frac{R}{3}$ (R — радиус шара), так как высота пирамиды совпадает с R . Таким образом,

объем данного многогранника $V = \frac{1}{3}SR$, где S — поверхность многогранника. Отсюда $\frac{V}{S} = \frac{R}{3}$. QED.

6.081. Построить на данной сфере такой сферический сегмент, чтобы отношение его поверхности к площади круга, являющегося его основанием, имело данную величину.

Решение.

Пусть D — центр основания искомого сегмента, E — одна из точек окружности его основания, AD — высота сегмента, AB — диаметр сферы, S — поверхность искомого сегмента, S' — площадь основания (круга) сегмента. Тогда имеем:

$$S = \pi \cdot AB \cdot AD, S' = \pi \cdot ED^2 = \pi \cdot AD \cdot BD \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{AB}{BD} = k.$$

Зная отношение k , можно построить на диаметре AB точку D . Проведя через точку D плоскость перпендикулярно к AB , получаем искомый сегмент.

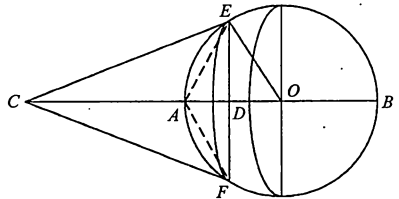


Рис. 6.104

6.082. Построить шаровой слой, принадлежащий данному шару, зная его объем (т.е. радиус шара, равновеликого искомому слою) и поверхность пояса, его ограничивающего (т.е. радиус круга, равновеликого этой поверхности).

Решение.

Пусть R — радиус данного шара, a — радиус шара, равновеликого искомому слою, b — радиус круга, равновеликого поверхности пояса, ограничивающего искомый слой, h — высота искомого слоя. Из условия имеем:

$$2\pi Rh = \pi b^2 \Rightarrow h = \frac{b^2}{2R}, \text{ т.е. высоту слоя } h \text{ можно построить (считаем ее известной).}$$

Расстояния от центра шара до плоскостей обоих оснований искомого слоя равны $x + \frac{h}{2}$, $\left|x - \frac{h}{2}\right|$, где x — расстояние от центра данного шара до середины высоты слоя. Из равенства соответствующих объемов получаем:

$$\frac{1}{2}\pi h \left(R^2 - \left(x + \frac{h}{2} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}\pi h \left(R^2 - \left(x - \frac{h}{2} \right)^2 \right) + \frac{1}{6}\pi h^3 = \frac{4}{3}\pi a^3 \Rightarrow x^2 = R^2 - \frac{1}{12}h^2 - \frac{4a^3}{3h}.$$

Последнее равенство определяет расстояние x и позволяет построить искомый слой. Задача имеет решение при

$$R^2 - \frac{1}{12}h^2 - \frac{4a^3}{3h} \geq 0.$$

6.083. Доказать, что для любой точки, лежащей внутри правильного многогранника, сумма расстояний от этой точки до всех граней есть величина постоянная.

Решение.

Пусть h_1, h_2, \dots, h_k — расстояния от произвольной точки M , лежащей внутри правильного многогранника, до всех граней этого многогранника, S — площадь грани, V — объем многогранника. Сумма объемов пирамид, имеющих своими основаниями все грани многогранника, а своей вершиной — данную точку M , равна объему V , следовательно, имеем:

$$V = \frac{1}{3}Sh_1 + \frac{1}{3}Sh_2 + \dots + \frac{1}{3}Sh_k = \frac{1}{3}S(h_1 + h_2 + \dots + h_k) \Rightarrow h_1 + h_2 + \dots + h_k = \frac{3V}{S} = \text{const.}$$

QED.

6.084. Доказать, что, продолжая выбранные грани правильного октаэдра, можно получить правильный тетраэдр (пользуясь гранями правильного октаэдра, можно образовать два тетраэдра).

Решение.

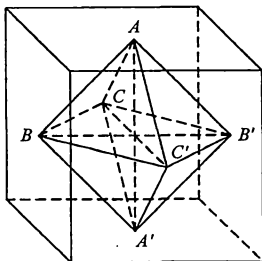


Рис. 6.105

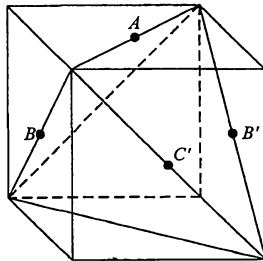


Рис. 6.106

Рассмотрим грань ABC правильного октаэдра, а также грани $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, имеющие с ABC общую вершину, но не имеющие общих ребер (рис. 6.105). Продолжая эти грани до взаимного пересечения, получаем вписанный в этот же куб правильный тетраэдр, так как плоскости граней ABC и $AB'C'$ пересекаются по прямой, проходящей через точку A параллельно $B'C'$, т.е. по одной из диагоналей грани куба, аналогично для других выбранных граней октаэдра (рис. 6.106).

Второй правильный тетраэдр, вписанный в этот же куб, получается после взаимного пересечения плоскостей остальных четырех граней $A'B'C'$, $A'BC$, $AB'C$, ABC' данного октаэдра. **QED.**

6.085. Доказать, что существует пять кубов, вершинами которых являются вершины данного правильного додекаэдра, а каждое ребро такого куба служит диагональю одной из граней додекаэдра. Каждая вершина додекаэдра принадлежит двум из пяти таких кубов.

Решение.

Пусть MN — любое ребро правильного додекаэдра (рис. 6.107), тогда параллельные MN диагонали AB и CD граней додекаэдра, образующих это ребро, будут параллельны и равны между собой. $AB = AD = BC$ как диагонали равных граней додекаэдра, следовательно, $ABCD$ — ромб. Далее, $BC \perp AB$, так как биссекториальная плоскость двугранного угла при ребре MN додекаэдра является плоскостью симметрии додекаэдра, поэтому $ABCD$ — квадрат. Аналогичными рассуждениями получаем существование вписанного куба $ABCD A'B'C'D'$, имеющего своими вершинами 8 из вершин додекаэдра, а своими ребрами 12 из диагоналей его граней.

Ясно, что вписанный куб определяется выбором одной из $5 \cdot 12 = 60$ диагоналей граней додекаэдра, например диагональю AB одной из его граней. Каждый такой вписанный куб имеет своими ребрами 12 диагоналей граней додекаэдра, следовательно, эти 12 диагоналей определяют один и тот же куб и количество таких вписанных кубов равняется $5 \cdot 60 : 12$.

Каждая вершина додекаэдра принадлежит двум вписанным кубам, так как из одной вершины додекаэдра в трех примыкающих к ней гранях выходит всего $2 \cdot 3 = 6$ диагоналей, три из этих шести диагоналей принадлежат одному кубу. **QED.**

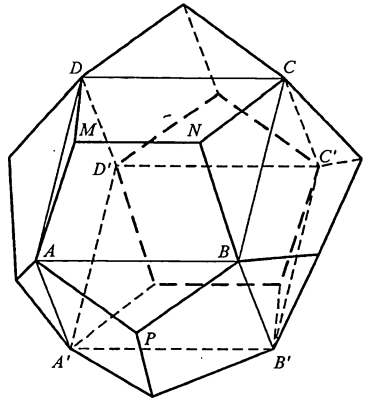


Рис. 6.107

6.086. Построить три сферы, проходящие соответственно через три вершины данного треугольника, касающиеся плоскости треугольника в этих вершинах и попарно касающиеся между собой. Найти радиусы сфер, зная стороны треугольника.

Решение.

Пусть даны стороны $\triangle ABC$ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, обозначим через x , y , z соответственно радиусы искомых шаров, попарно касающихся друг друга внешним образом, а также плоскости $\triangle ABC$ в точках A , B , C (рис. 6.108).

Имеем следующее уравнение:

$$(y - x)^2 + c^2 = (y + x)^2 \Leftrightarrow 2xy + x^2 + c^2 = y^2 + 2xy + x^2 \Leftrightarrow 4xy = c^2.$$

Используя аналоги рис. 6.108 в направлениях BC и AC , получаем такие же уравнения:

$$4xz = b^2, \quad 4yz = a^2 \Rightarrow \frac{(4xz)(4yz)}{4xy} = 4z^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2} \Rightarrow z = \frac{ab}{2c}.$$

$$\text{Аналогично имеем: } x = \frac{bc}{2a}, \quad y = \frac{ac}{2b}.$$

Зная отрезки x , y , z , строим искомые шары.

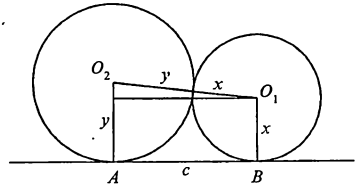


Рис. 6.108

6.087. Доказать, что компактная фигура не может иметь более одного центра симметрии (фигура называется компактной, если найдется шар достаточно большого радиуса, целиком содержащий эту фигуру).

Решение.

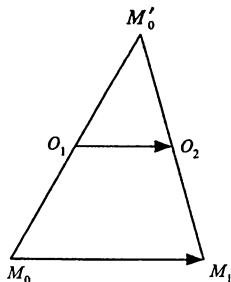


Рис. 6.109

От противного, предположим, что некоторая фигура Φ имеет два центра симметрии O_1 и O_2 и точка $M_0 \in \Phi$. Тогда точка M'_0 , симметричная к точке M_0 , также принадлежит фигуре Φ . Аналогично, этой же фигуре будет принадлежать точка M_1 , симметричная точке M'_0 относительно точки O_2 . При этом направленный отрезок $\overline{M_0M_1}$ сонаправлен с отрезком $\overline{O_1O_2}$ и в два раза больше последнего по длине (рис. 6.109). Повторяя эти же преобразования для точки M_1 , получаем точку $M_2 \in \Phi$, лежащую на луче $[M_0, M_1)$, причем $M_0M_1 = M_1M_2$. Аналогичными рассуждениями получаем последовательность точек M_0, M_1, M_2, \dots фигуры Φ , лежащих на одном луче, причем $M_0M_n = 2nO_1O_2$.

Таким образом, фигуре Φ принадлежит отрезок длины больше любого наперед заданного числа, что противоречит компактности Φ .

Полученное противоречие и доказывает утверждение.

QED.

6.088. Построить множество точек, получающихся из данной точки с помощью осевых симметрий относительно прямых, проходящих через данную точку и лежащих в данной плоскости.

Решение.

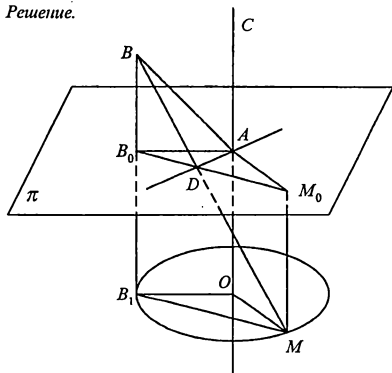


Рис. 6.110

Требуется построить множество точек M , которое получается из данной точки B с помощью осевых симметрий относительно прямых, проходящих через данную точку A и лежащих в данной плоскости π (рис. 6.110). Пусть B_0 — проекция точки B на плоскость π , точка B_1 — образ точки B относительно симметрии с осью AB_0 , т.е. $BB_1 \perp AB_0$, $BB_0 = B_1B_1$, $AC \perp \pi$. Проведем через точку B_1 окружность с центром $O \in AC$ в плоскости, параллельной плоскости π . Утверждается, что эта окружность и есть искомое множество. Действительно, если M_0 — проекция произвольной точки окружности на плоскость π и AD — высота, биссектриса, медиана $\triangle M_0B_0A$, то осевая симметрия с осью AD преобразует точку B в точку M . Обратно, легко видеть, что любая осевая симметрия с осью AD , лежащей в плоскости π , преобразует точку B в некоторую точку, лежащую на построенной окружности.

6.089. Две фигуры симметричны с третьей относительно двух различных плоскостей. Построить движение пространства, отображающее первую фигуру на вторую.

Решение.

Предположим, что две фигуры Φ_1 и Φ_2 симметричны с одной и той же фигурой Φ соответственно относительно плоскостей α_1 и α_2 . Для произвольной точки $M \in \Phi$, пусть M_1 и M_2 — точки, симметричные M относительно α_1 и α_2 . Если $\alpha_1 \cap \alpha_2 \neq \emptyset$, то точки M, M_1, M_2 не лежат на одной прямой и определяют плоскость β , перпендикулярную к линии пересечения l плоскостей α_1 и α_2 . Пусть $l_1 = \alpha_1 \cap \beta$, $l_2 = \alpha_2 \cap \beta$, тогда точки M и M_1 симметричны относительно прямой

l_1 , а точки M и M_2 — относительно прямой l_1 в плоскости β . Отсюда следует, что точка M_2 получается из точки M , поворотом в плоскости β около точки $O = l_1 \cap l_2$ на угол, равный удвоенному углу между прямыми l_1 и l_2 и имеющий с ним одинаковое направление (рис. 6.111).

Таким образом, две фигуры, симметричные с одной и той же третьей относительно двух пересекающихся плоскостей, получаются одна из другой с помощью вращения вокруг линии пересечения обеих плоскостей с углом поворота, который равен удвоенному углу между обеими плоскостями и имеет с ним одинаковое направление.

Если плоскости α_1 и α_2 параллельны, то точки M, M_1, M_2 лежат на одной прямой, перпендикулярной к этим плоскостям. Пусть O_1 и O_2 — точки пересечения прямой M_1M_2 с обеими плоскостями, тогда получаем:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= \overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1M} = 2\overrightarrow{O_1M}, \quad \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2M_2} = 2\overrightarrow{MO_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM_2} = 2(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{MO_2}) = 2\overrightarrow{O_1O_2}.\end{aligned}$$

Таким образом, две фигуры, симметричные с одной и той же третьей фигурой относительно двух параллельных плоскостей, получаются одна из другой путем параллельного переноса, направление которого перпендикулярно к этим плоскостям и совпадает с направлением от первой плоскости ко второй, а его величина равна удвоенному расстоянию между обеими плоскостями.

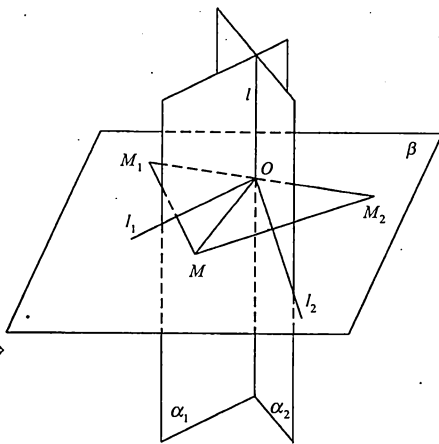


Рис. 6.111

6.090. Доказать, что если точки двух данных фигур соответствуют друг другу при некотором преобразовании таким образом, что прямая, соединяющая любые две точки одной фигуры, параллельна прямой, соединяющей соответственные точки другой фигуры, то это преобразование есть гомотетия.

Решение.

Предположим, что A — некоторая точка первой фигуры, A_1 — соответствующая ей точка второй фигуры; B — какая-либо другая точка первой фигуры, не лежащая на прямой AA_1 , B_1 — ее образ. Так как $AB \parallel A_1B_1$ по условию, то и точка B_1 не лежит на прямой AA_1 . Прямые AA_1 и BB_1 лежат в одной плоскости, следовательно, либо пересекаются, либо параллельны. Рассмотрим два случая.

1) Предположим, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке C . Возьмем точку $M \in \Phi_1$ (Φ_1 — первая фигура), не лежащую в плоскости ABA_1B_1 , и точку $M_1 = \varphi(M) \in \Phi_2$ (Φ_2 — вторая фигура, φ — заданное преобразование), точка M_1 не лежит в этой плоскости в силу параллельности прямых AM и A_1M_1 . Точки A, M, A_1, M_1 лежат в одной плоскости AMA_1M_1 в силу параллельности прямых AM и A_1M_1 , аналогично для точек B, M, B_1, M_1 . Плоскости AMA_1M_1 и BMB_1M_1 имеют общую точку C пересечения прямых AA_1 и BB_1 , следовательно, и линия их пересечения MM_1 содержит точку C . Далее, получаем $OM:OM_1 = OA:OA_1$ в силу параллельности прямых AM и A_1M_1 . Отсюда, каждая точка $M_1 \in \Phi_2$, не лежащая в плоскости ABA_1B_1 , получается из прообраза точки $M \in \Phi_1$ посредством гомотетии, имеющей точку C центром, преобразующей точку A в точку A_1 . Если же точки M и M_1 лежат в плоскости ABA_1B_1 , тот же результат получается из параллельности двух пар прямых: $AM \parallel A_1M_1$, $BM \parallel B_1M_1$.

2) Предположим, что $AA_1 \parallel BB_1$. В этом случае аналогичными рассуждениями получаем, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{MM_1}$, следовательно, Φ_2 получается из Φ_1 посредством параллельного переноса, который можно рассматривать как предельный случай гомотетии.

ТЕМА: ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

6.091. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого a и угол при основании α . Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

Решение.

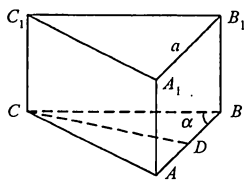


Рис. 6.112

Площадь основания $S = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 6.112). По условию $S_{\text{бок}} = 2S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg} \alpha$.

С другой стороны, $S_{\text{бок}} = \left(a + 2 \cdot \frac{\frac{a}{2}}{\cos \alpha} \right) \cdot H = \frac{2a \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \cdot H$, где H — высота данной

призмы. Приравняв два выражения для $S_{\text{бок}}$, находим $H = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, объем призмы $V = S \cdot H = \frac{a^3}{8} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\frac{a^3}{8} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

6.092. Из точки ребра двугранного угла, величина которого равна α , в одной из его граней проведен отрезок, составляющий с этим ребром угол β . Какой угол образует отрезок с плоскостью другой грани?

Решение.

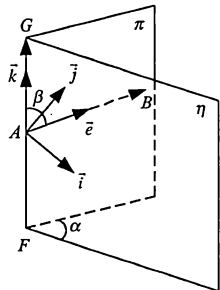


Рис. 6.113

Обозначим плоскости граней двугранного угла с ребром FG через π и η (рис. 6.113).

Имеем: $A \in FG$, $AB \in \pi$, $\angle(\overline{FG}, \overline{AB}) = \beta$, $\angle(\pi, \eta) = \alpha$. Введем в точке A прямоугольный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ так, что $\vec{i} \perp FG$, $\vec{j} \perp FG$, $\vec{k} \uparrow \overline{FG}$ и $\vec{j} \perp \eta$.

Пусть \vec{e} — единичный вектор, сонаправленный с вектором \overline{AB} . Разложим \vec{e} по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{e} = \cos \alpha \sin \beta \vec{i} + \sin \alpha \sin \beta \vec{j} + \cos \beta \vec{k}$. Далее, имеем:

$$\sin \angle(\vec{e}, \eta) = \sin(90^\circ - \angle(\vec{e}, \vec{j})) = \cos \angle(\vec{e}, \vec{j}) = \vec{e} \cdot \vec{j} = \sin \alpha \sin \beta.$$

Таким образом, искомый угол равен $\arcsin(\sin \alpha \sin \beta)$.

Ответ: $\arcsin(\sin \alpha \sin \beta)$.

6.093. Плоский угол α боковой грани при вершине правильной треугольной пирамиды меньше $\frac{\pi}{2}$, сторона основания равна a . Определить двугранный угол между боковыми гранями и площадь сечения пирамиды, проведенного через сторону основания перпендикулярно к противоположному боковому ребру.

Решение.

Из треугольника BMS (рис. 6.114) находим: $BS = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$,

а из $\triangle BNS$ — $BN = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin \alpha$.

Далее, $MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{4}} = a \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$,

$$S_{BNC} = \frac{a}{2} MN = \frac{a^2}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{a^2}{2} \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

откуда $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{BM}{BN} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ и, следовательно, $\varphi = 2 \arcsin \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $2 \arcsin \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}, \frac{a^2}{2} \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

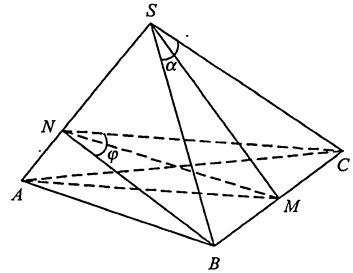


Рис. 6.114

6.094. Взяты такие четыре вершины куба, что никакие две из них не лежат на одном ребре. Через каждые три из этих четырех вершин проведена секущая плоскость. Найти объем тела, ограниченного проведенными плоскостями. Ребро куба равно 3.

Решение.

Образовавшаяся фигура есть правильный тетраэдр $ABCD$ с ребрами

$AB = 3\sqrt{2}$ (рис. 6.115). Его объем $V = 3^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{3^3}{3} = 9$ (куб. ед.).

Ответ: 9 куб. ед.

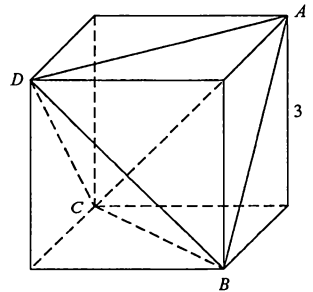


Рис. 6.115

6.095. На плоскости π дан угол BAC в 60° . Точка M удалена от вершины угла A на 25 мм, от стороны AB — на 7 мм и от стороны AC — на 20 мм. Найти расстояние от точки M до плоскости π .

Решение.

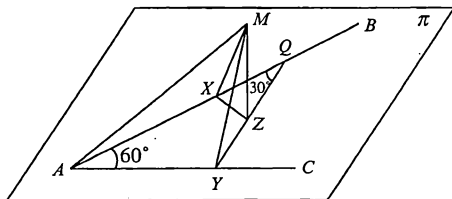


Рис. 6.116

Пусть $MX \perp AB$, $MY \perp AC$ и MZ — перпендикуляр к плоскости π (рис. 6.116). По условию $MA = 25$ мм, $MX = 7$ мм и $MY = 20$ мм. По теореме Пифагора находим, что $AY = 15$ мм и $AX = 24$ мм. Продолжим отрезок YZ до пересечения в точке Q со стороной AB . Легко видеть, что $\angle AQY = 30^\circ$, следовательно, $AQ = 30$ мм. Поэтому $XQ = 6$ мм, а

$$XZ = 6 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \text{ мм.}$$
 Из прямоугольного треугольника

MZX теперь находим, что $MZ = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{37}$ мм.

Ответ: $\sqrt{37}$ мм.

6.096. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под равными углами $\beta = 90^\circ\alpha$. Площадь сечения, проведенного через высоту пирамиды и через вершину равнобедренного треугольника, лежащего в основании, равна W . Определить объем пирамиды.

Решение.

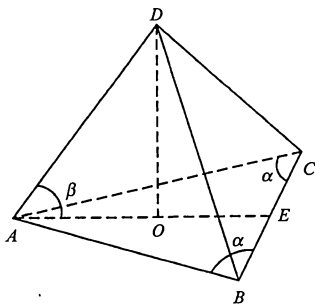


Рис. 6.117

Точка O есть центр окружности, описанной около основания ABC (рис. 6.117). $OA = R$ — радиус этой окружности. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} BC \cdot AE \cdot DO = \frac{1}{3} \frac{AE \cdot DO}{2} \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot W \cdot BC$ (так как $\frac{AE \cdot DO}{2} = W$). По теореме синусов $BC = 2R \sin(180^\circ - 2\alpha) = 2R \sin 2\alpha$. Далее, $\triangle ADO$ подобен $\triangle ABE$ ($\angle ADO = \angle ABE = \alpha$); получаем пропорцию:

$$\frac{AO}{AE} = \frac{OD}{BE} \Rightarrow AO \cdot BE = AE \cdot OD. \text{ Подставив сюда } AO = R, BE = \frac{1}{2}BC,$$

$$AE \cdot OD = 2W, \text{ имеем}$$

$$\frac{R \cdot BC}{2} = 2W \Rightarrow BC = \frac{4W}{R} \Rightarrow BC = \frac{4W}{\frac{BC}{2 \sin 2\alpha}} \Rightarrow BC = 8W \sin 2\alpha.$$

Таким образом, $V = \frac{1}{3} W \sqrt{8W \sin 2\alpha} = \frac{1}{3} \sqrt{8W^3 \sin 2\alpha}$.

Ответ: $\frac{1}{3}\sqrt{8W^3 \sin 2\alpha}$.

6.097. Вычислить объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α , а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r .

Решение.

Сторона основания пирамиды равна $a = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$, боковое ребро $l = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2r \cos \frac{\alpha}{2}$ (рис. 6.118). Далее, находим

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2r\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{3}} \text{ и } S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Таким образом, } V = \frac{1}{3} h \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3} r^3 \sin^2 \alpha \sqrt{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3} r^3 \sin^2 \alpha \sqrt{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha}.$$

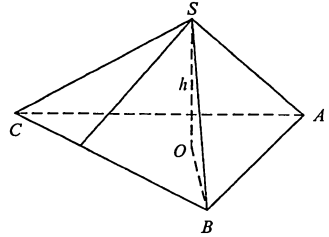


Рис. 6.118

6.098. На высоте конуса как на диаметре описан шар. Определить объем части шара, заключенной внутри конуса, если даны высота h конуса и угол при вершине осевого сечения 2φ .

Решение.

Как видно из рис. 6.119, искомый объем

$$V = \frac{2}{3} \pi^2 \cdot MN + \frac{1}{3} \pi \cdot NK^2 \cdot AN - \frac{1}{3} \pi \cdot NK^2 \cdot ON = \\ = \frac{\pi}{3} (2r^2 \cdot MN + NK^2 \cdot (AN - ON)) = \frac{\pi}{3} (2r^2 \cdot MN + NK^2 \cdot r) = \frac{\pi r}{3} (2r \cdot MN + NK^2),$$

$$\text{где } r = \frac{h}{2}, MN = MK \cdot \sin \alpha = 2r \cdot \sin^2 \alpha = h \cdot \sin^2 \alpha, NK = OK \cdot \sin 2\alpha = r \cdot \sin 2\alpha = \frac{h}{2} \sin 2\alpha.$$

$$\text{Отсюда: } V = \frac{\pi h}{6} \left(h^2 \sin^2 \alpha + \frac{h^2}{4} \sin 2\alpha \right) = \frac{\pi h^3}{6} (1 + \cos^2 \alpha) \cdot \sin^2 \alpha.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi h^3}{6} (1 + \cos^2 \alpha) \cdot \sin^2 \alpha.$$

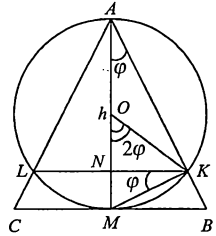


Рис. 6.119

6.099. Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найти отношение объема полученного параллелепипеда к объему тетраэдра.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, $AB_1C_1D_1$ — параллелепипед, полученный указанным в условии задачи построением. Легко увидеть, что ребра тетраэдра являются диагоналями боковых граней параллелепипеда (рис. 6.120). Тетраэдр может быть получен удалением из параллелепипеда четырех равновеликих пирамид: $ABDA_1$, $BDCC_1$, $A_1B_1C_1B$ и $A_1D_1C_1D$. Так как объем каждой из этих пирамид равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, то отношение $V_{\text{п}}$ параллелепипеда

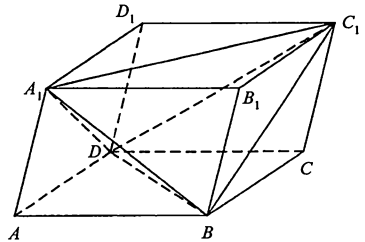


Рис. 6.120

$$\text{да к объему } V_{\text{т}} \text{ тетраэдра равно } \frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{т}}} = \frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{п}} - 4 \cdot \frac{1}{6} V_{\text{п}}} = 3.$$

Ответ: 3.

6.100. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром m проведено сечение через середины ребер AD и $B_1 C_1$ и вершины A_1 и C . Найти площадь этого сечения.

Решение.

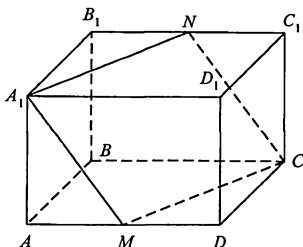


Рис. 6.121

По условию $A_1 N = NC = CM = MA_1 = m \frac{\sqrt{5}}{2}$ (рис. 6.121). Так как $A_1 N \parallel MC$, то $A_1 M C N$ — ромб. Его диагональ $MN = m\sqrt{2}$, а диагональ $A_1 C$ есть диагональ куба, т.е. $A_1 C = m\sqrt{3}$. Следовательно, $S_{A_1 M C N} = \frac{1}{2} MN \cdot A_1 C = m^2 \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ответ: $m^2 \sqrt{\frac{3}{2}}$.

6.101. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды равны между собой и равны a . Угол между равными сторонами треугольника, лежащего в основании, равен α . Вычислить объем пирамиды.

Решение.

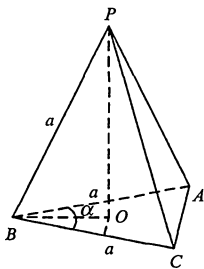


Рис. 6.122

Пусть S — площадь основания, H — высота данной пирамиды (рис. 6.122). Имеем:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} H = PO &= \sqrt{BP^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 60^\circ} = \\ &= \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sin \alpha}{2} \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{1}{3} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$$

Ответ: $\frac{1}{3} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$.

6.102. Найти двугранный угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образованный боковой гранью с основанием, равен φ .

Решение.

Пусть BP и CP — перпендикуляры, опущенные из вершин основания B и C на боковое ребро SA (рис. 6.123). Образованный ими $\angle BPC$ является искомым. Обозначим его через ψ . Очевидно, $\sin \frac{\psi}{2} = \frac{BQ}{BP}$. (*) Пусть x — сторона основания пирамиды. Тогда

$$SQ = \frac{x\sqrt{3}}{6\cos\psi}, \quad SB = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{3}}{6\cos\varphi}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{6\cos\varphi} \sqrt{3(1+3\cos^2\varphi)}.$$

Из равнобедренного треугольника ASB находим его высоту BP : $BP = \frac{x}{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}$. Таким образом, в силу

$$(*) \sin \frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2} \text{ и, следовательно, } \psi = 2\arcsin \frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2}.$$

Ответ: $2\arcsin \frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2}$.

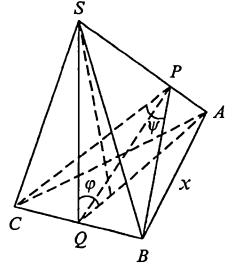


Рис. 6.123

6.103. Правильная n -угольная пирамида, сторона основания которой равна b , плоскостью, параллельной основанию, рассечена на две равновеликие по объему части. Найти площадь сечения.

Решение.

По условию задачи $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H \right) = \frac{1}{3} S_{\text{сеч}} \cdot h$, где H и h — высоты исходной и отсекаемой

пирамид соответственно. Далее, $\frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{сеч}}} = \frac{2h}{H}$, $\frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{сеч}}} = \frac{H^2}{h^2}$ (рис. 6.124), откуда

$$H^3 = 2h^3, \quad H = h\sqrt[3]{2}.$$

$$\frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{сеч}}} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{n \cdot S_{\Delta}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{n}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{nb^2}{4\sqrt[3]{4}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

Ответ: $\frac{nb^2}{4\sqrt[3]{4}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$.

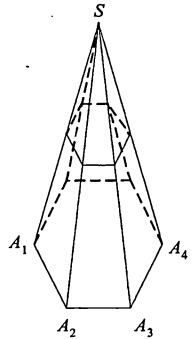


Рис. 6.124

6.104. Радиус основания конуса равен r , а образующая наклонена к плоскости основания под углом α . В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом φ к его высоте. Определить площадь полученного сечения.

Решение.

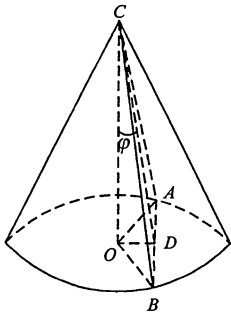


Рис. 6.125

Пусть искомая площадь будет S (рис. 6.125). Тогда $S = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, $CD = \frac{CO}{\cos \varphi} = \frac{r \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi}$,

$$AB = 2AD = 2\sqrt{AO^2 - OD^2} = 2\sqrt{r^2 - (CO \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2} = 2\sqrt{r^2 - (r \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2} = \\ = \frac{2r}{\cos \alpha \cos \varphi} \sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} = \frac{2r}{\cos \alpha \cos \varphi} \sqrt{\cos(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}.$$

$$S = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{r^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\cos(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}}{\cos^2 \varphi \cos \alpha}.$$

Ответ: $\frac{r^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\cos(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}}{\cos^2 \varphi \cos \alpha}.$

6.105. Дан куб с ребром a . Через концы каждой тройки ребер, выходящих из одной вершины, проведена плоскость. Найти объем тела, ограниченного этими плоскостями.

Решение.

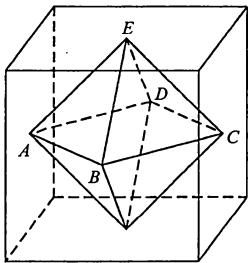


Рис. 6.126

Произведя построения, указанные в условии задачи, получим октаэдр, вершины которого находятся в центрах симметрии граней куба (рис. 6.126). Объем октаэдра равен удвоенному объему правильной четырехугольной пирамиды

$EABCD$ высотой $\frac{a}{2}$ с площадью основания $ABCD$, равной $\frac{1}{2}a^2$. Таким обра-

зом, искомый объем равен $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3}{6}$.

Ответ: $\frac{a^3}{6}.$

6.106. В усеченном конусе длина диагонали осевого сечения равна d , образующая составляет с плоскостью основания угол α и равна l . Определить боковую поверхность этого конуса.

Решение.

Пусть $AD = 2R$, $BC = 2r$ (рис. 6.127). Из $\triangle ABC$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \Rightarrow d^2 = l^2 + 4r^2 + 4lr \cos \alpha \Rightarrow 4r^2 + 4l \cos \alpha \cdot r - (d^2 - l^2) = 0 \Rightarrow$$

6.109. Боковая поверхность конуса, будучи развернута на плоскости, представляет собой круговой сектор с углом φ и хордой d . Определить объем конуса.

Решение.

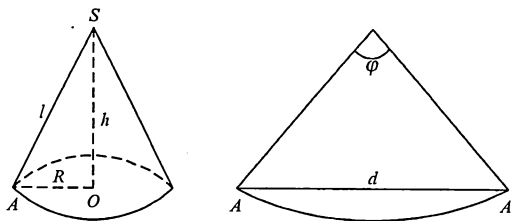


Рис. 6.130

Пусть $AO = R$ — радиус основания конуса, $SO = h$ — высота конуса, $SA = l$ — образующая конуса, AA' — хорда сектора с углом φ , равная d (рис. 6.130). Тогда $l = \frac{d}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$. Дуга $\overset{\frown}{AA'} = \varphi l$, $R = AO = \frac{\varphi l}{2\pi}$, $h = \sqrt{l^2 - R^2}$. Следовательно-

$$\text{но, объем конуса равен } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{d^3 \varphi^2 \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}}{192\pi^2 \sin^3 \frac{\varphi}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{d^3 \varphi^2 \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}}{192\pi^2 \sin^3 \frac{\varphi}{2}}.$$

6.110. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, суть a , b и c . Первые два ребра взаимно перпендикулярны, а третье образует с каждым из них угол α . Определить объем параллелепипеда.

Решение.

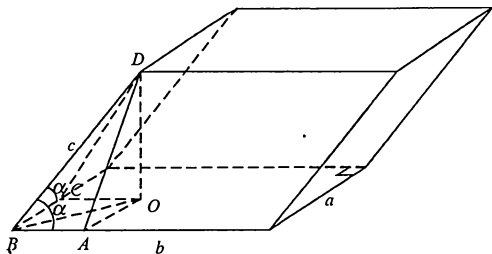


Рис. 6.131

Объем параллелепипеда будем искать по формуле $V = a \cdot b \cdot DO$ (рис. 6.131). Опустим из D перпендикуляры DA и DC на смежные ребра основания. Так как $\triangle DAB = \triangle DCB$, то $AB = BC$ и $\triangle OCB$ — квадрат. Сейчас легко найти высоту параллелепипеда DO :

$$DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{DB^2 - (AB^2 + AO^2)} = \\ = \sqrt{c^2 - 2c^2 \cos^2 \alpha} = c\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Следовательно, $V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. Заметим, что $\cos 2\alpha < 0$, так как $2\alpha > 90^\circ$ (плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других).

$$\text{Ответ: } abc\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

6.111. Определить объем правильного восьмигранника (октаэдра) с ребром a и двугранные углы при его ребрах.

Решение.

Все грани октаэдра — равносторонние треугольники, поэтому

$SN = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (рис. 6.132). Четырехугольник $ABCD$ — квадрат. Его плоскость разбивает октаэдр на две правильные равные пирамиды, следовательно, $V = 2 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot OS$, где $OS = SN^2 - ON^2 = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Таким образом, $V = \frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Далее, все двугранные углы октаэдра равны. Угол $\alpha = \angle BMD$ (M — середина CS) измеряет двугранный угол при ребре CE . Из $\triangle OMB$ нахо-

дим $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; $\frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Отсюда: $\alpha = 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3, 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$.

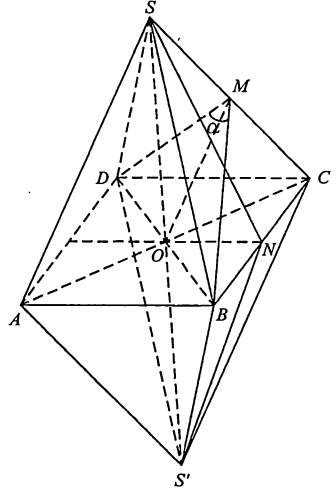


Рис. 6.132

6.112. Треугольная пирамида рассечена плоскостью на два многогранника. Найти отношение объемов этих многогранников, если известно, что секущая плоскость делит три ребра, сходящиеся в одной вершине пирамиды, в отношении 1:2, 1:2 и 2:1, считая от вершины.

Решение.

Пусть $AO \perp (BSC)$, $\angle ASO = \beta$, $\angle BSC = \alpha$ (рис. 6.133), тогда

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} CS \cdot BS \cdot \sin \alpha \cdot AS \cdot \sin \beta \quad \text{и} \quad V_{SA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} C_1S \cdot B_1S \cdot \sin \alpha \cdot A_1S \cdot \sin \beta.$$

Отсюда находим искомое отношение:

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{A_1S \cdot B_1S \cdot C_1S}{AS \cdot BS \cdot CS} \quad \text{и} \quad \frac{V_{SABC} - V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{(1+2)(1+2)(2+1) - 1 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{25}{2}.$$

Ответ: $\frac{25}{2}$.

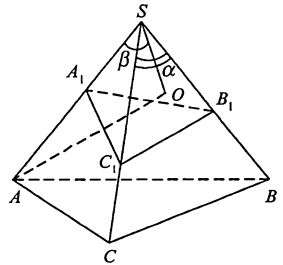


Рис. 6.133

6.113. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен α , а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно b .

Решение.

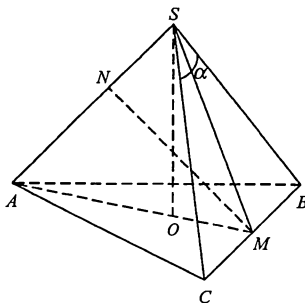


Рис. 6.134

Пусть сторона основания пирамиды $AB = a$ (рис. 6.134), а высота $OS = H$;

тогда $V = \frac{a^2 H}{4\sqrt{3}}$. Из прямоугольного $\triangle AOS$ ($AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$) имеем

$$AS = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}. \text{ Далее, из прямоугольного } \triangle BMS \text{ найдем:}$$

$$\frac{BM}{BS} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}} = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{12H^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow V = H^3 \frac{\sqrt{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \text{ Из подобия}$$

треугольников ANM и AOS имеем: $\frac{MN}{AM} = \frac{OS}{AS}$ или $\frac{b}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}}$, от-

куда $\frac{b}{H\sqrt{3}} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}} = \sin \frac{\alpha}{2}$ и $H = \frac{b}{\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}$. Подставляя это значение H в выражение для объема, получим:

$$V = \frac{b^3}{3\sin \frac{\alpha}{2} (3 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2})}. \text{ Выражение, стоящее в знаменателе, преобразуется к виду } \sin \frac{3\alpha}{2}. \text{ Итак, искомый объем}$$

$$\text{пирамиды равен } V = \frac{b^3}{3\sin \frac{3\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{b^3}{3\sin \frac{3\alpha}{2}}.$$

6.114. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Длина каждого бокового ребра равна a . Плоские углы трехгранных углов при основании пирамиды есть α, β и 90° . Найти объем пирамиды.

Решение.

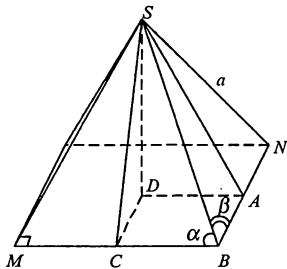


Рис. 6.135

Из прямоугольных треугольников SCB , SAB и SDC (рис. 6.135) находим:

$$MB = 2CB = 2BC \cos \alpha = 2a \cos \alpha, \quad NB = 2AB = 2BS \cos \beta = 2a \cos \beta, \quad SC = SB \sin \alpha = a \sin \alpha,$$

$$SD = \sqrt{SC^2 - CD^2} = \sqrt{SC^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \beta} =$$

$$= a \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta} = a \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2}} = a \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}} =$$

$$= a \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

Таким образом, искомый объем

$$V = \frac{1}{3} MB \cdot BN \cdot SD = \frac{1}{3} 2a \cos \beta \cdot 2a \cos \alpha \cdot a \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} = \frac{4}{3} a^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

Заметим, что $\cos(\alpha + \beta) < 0$, так как $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ (сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего).

Ответ: $\frac{4}{3} a^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$

6.115. Объем правильной треугольной призмы равен V , угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен φ . Найти сторону основания призмы.

Решение.

Пусть a — длина стороны основания, d — длина диагонали боковой грани призмы, b — длина бокового ребра (рис. 6.136). Имеем: $V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} b$. Из $\triangle A_1 B C_1$ нахо-

дим следующее равенство: $\frac{1}{2} a = d \sin \frac{\varphi}{2}$. Поэтому $b = \sqrt{d^2 - a^2} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

$$\text{и, следовательно, } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{8V \sin \frac{\varphi}{2}}{3 - 12 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

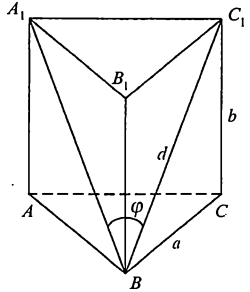


Рис. 6.136

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{8V \sin \frac{\varphi}{2}}{3 - 12 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$

6.116. Тупоугольный треугольник, острые углы которого α и β и меньшая высота равна h , вращается около стороны, противоположащей углу β . Определить поверхность тела вращения.

Решение.

Поверхность S тела вращения равна сумме боковых поверхностей двух конусов с осевыми сечениями BAB_1 и BCB_1 . Используя обозначения на рис. 6.137,

запишем $S = \pi r c + \pi r a$. Из $\triangle CBH$ имеем $a = \frac{h}{\sin \beta}$, и по теореме синусов:

$$\frac{c}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{a}{\sin \alpha}; \text{ отсюда } c = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

Из $\triangle BCO$ ($\angle BCO = \alpha + \beta$) находим $r = a \sin(\alpha + \beta)$. Таким образом,

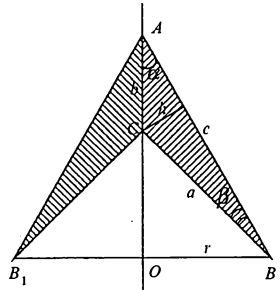


Рис. 6.137

$$S = \frac{\pi h^2 \sin(\alpha + \beta)(\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha)}{\sin^2 \beta \sin \alpha} = \frac{2\pi h^2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \frac{\beta}{2}) \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha \sin^2 \beta}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi h^2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \frac{\beta}{2}) \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha \sin^2 \beta}.$$

6.117. Найти высоту правильной четырехугольной пирамиды, полная поверхность которой равна S , а плоский угол боковой грани при вершине равен α .

Решение.

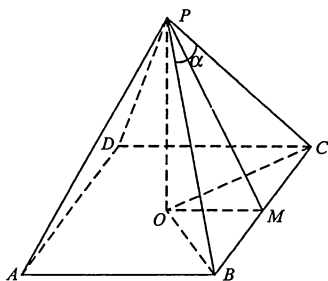


Рис. 6.138

Пусть сторона основания равна a (рис. 6.138). По условию задачи

$$a^2 + 2a \cdot PM = S. \text{ Из } \triangle BPM \text{ находим } PM = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow S = a^2(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{S}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}}. \text{ Далее, из треугольника } MOP \text{ получаем}$$

$$H = OP = \sqrt{PM^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}} S = \frac{1}{2} \sqrt{S(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 1)}.$$

$$\text{Так как } \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ то искомая высота } H = \sqrt{S \sqrt{2} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{S \sqrt{2} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}}.$$

6.118. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC , в котором AB и AC образуют между собой угол α и $AB = AC = a$. Грань SBC перпендикулярна к плоскости основания, а грани SBA и SCA образуют с плоскостью основания углы φ . Вычислить боковую поверхность этой пирамиды.

Решение.

В силу того, что площади треугольников SAC и SAB равны, то искомая боковая поверхность

$$Q = \frac{1}{2} BC \cdot SM + 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot SN \quad (\text{рис. 6.139}). \text{ Так как } AB = a, BC = 2BM = 2AB \sin \frac{\alpha}{2} = 2a \sin \alpha,$$

$$SN = \frac{NM}{\cos \varphi} = \frac{AM \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \varphi} = \frac{AB \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \varphi} = \frac{a \sin \alpha}{2 \cos \varphi},$$

$SM = SN \cdot \sin \varphi = \frac{a \sin \alpha}{2 \cos \varphi} \sin \varphi$, то окончательно получаем:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 2a \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a \sin \alpha}{2 \cdot 2 \cos \varphi} \cdot \sin \varphi + a \frac{a \sin \alpha}{2 \cos \varphi} = \frac{a^2 \sin \alpha}{2 \cos \varphi} (\sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi + 1).$$

Ответ: $\frac{a^2 \sin \alpha}{2 \cos \varphi} (\sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi + 1).$

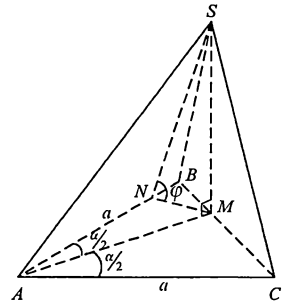


Рис. 6.139

6.119. Из вершины S правильной четырехугольной пирамиды на основание опущен перпендикуляр SB . Из середины O отрезка SB опущены перпендикуляр OM длиной h на боковое ребро и перпендикуляр OK длиной b на боковую грань. Найти объем пирамиды.

Решение.

Обозначим длину высоты пирамиды через H и через a — длину стороны основания. Из подобия треугольников OMS и ABS (рис. 6.140)

$$\text{находим: } \frac{h}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}H^2 - h^2}}{H}. \quad (1)$$

Аналогично из треугольников OKS и CBS получим:

$$\frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}H^2 - b^2}}{H}. \quad (2)$$

Разделив почленно равенства (1) и (2), будем иметь:

$$\frac{\sqrt{H^2 - 4h^2}}{\sqrt{H^2 - 4b^2}} = \frac{h}{b\sqrt{2}}, \text{ откуда } H = \frac{2bh}{\sqrt{2b^2 - h^2}}. \text{ Подставляя полученное}$$

выражение в (1), находим: $a^2 = \frac{8b^2h^2}{h^2 - b^2}$. Окончательно для искомого

объема V получаем следующее выражение:

$$V = \frac{16b^3h^3}{3(h^2 - b^2)\sqrt{2b^2 - h^2}}.$$

Ответ: $\frac{16b^3h^3}{3(h^2 - b^2)\sqrt{2b^2 - h^2}}.$

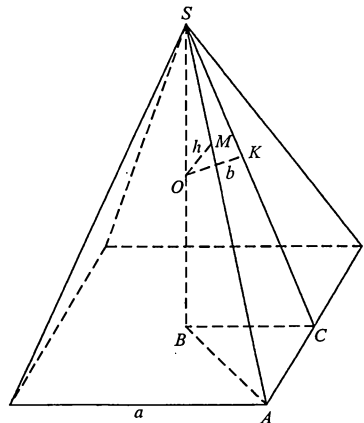


Рис. 6.140

6.120. В основании прямой призмы лежит четырехугольник, в котором два противоположных угла прямые. Диагональ основания, соединяющая вершины не прямых углов, имеет длину d и делит один из этих углов на части α и β . Площадь сечения, проведенного через другую диагональ основания перпендикулярно к нему, равна Q . Найти объем призмы.

Решение.

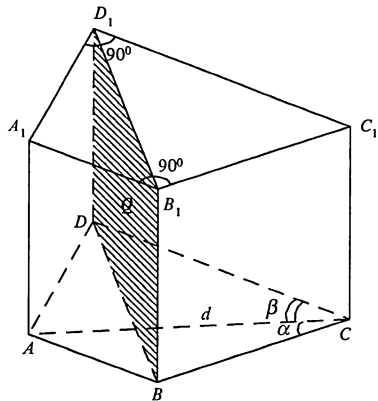


Рис. 6.141

Сначала найдем площадь S основания призмы (рис. 6.141). Имеем: $S = S_1 + S_2$, где S_1 — площадь прямоугольного $\triangle ABC$, а S_2 — площадь прямоугольного $\triangle ADC$. Так как

$$S_1 = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{d \sin \alpha \cdot d \cos \alpha}{2} = \frac{d^2 \sin 2\alpha}{4} \text{ и } S_2 = \frac{d^2 \sin 2\beta}{4}, \text{ то}$$

$$S = \frac{d^2}{4} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \frac{d^2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Далее, найдем высоту H призмы из условия $Q = BD \cdot H$. Так как в четырехугольнике $ABCD$ сумма углов при вершинах B и D равна 180° , то около него можно описать окружность, диаметром которой будет диагональ AC , так как на нее опираются прямые вписанные углы. Из $\triangle BCD$, вписанного в эту окружность, по теореме синусов находим $BD = AC \sin \angle DCB = d \sin(\alpha + \beta)$. Таким образом, искомый объем равен

$$V = S \cdot H = \frac{S \cdot Q}{BD} = \frac{\frac{d^2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{2} \cdot Q}{d \sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{2} Q d \cos(\alpha - \beta).$$

Ответ: $\frac{1}{2} Q d \cos(\alpha - \beta)$.

6.121. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2 см, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45° . Найти объем и полную поверхность пирамиды.

Решение.

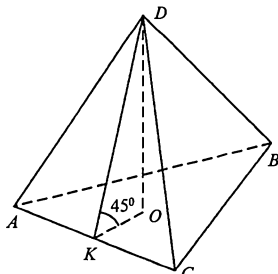


Рис. 6.142

Пусть $ABCD$ — данная пирамида (рис. 6.142), DO — высота. Так как пирамида правильная, то $OK \perp AC \Rightarrow DK \perp AC \Rightarrow OK = \frac{AC \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (см), $\angle DKO = 45^\circ$.

Следовательно, $DO = OK \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (см), $DK = \frac{OK}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (см),

$S_{\text{осн}} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ (см²). Боковая поверхность $S_{\text{бок}} = p \cdot DK$, где

$p = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$ (см) — полупериметр основания; $S_{\text{бок}} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$ (см²). Тогда

да $S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$ (см²). Объем $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$ (см³).

Ответ: $\frac{1}{3}$ см³; $\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$ см².

6.122. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что его четыре вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре — в плоскости его основания. Определить объем куба, если высота пирамиды h , а боковое ребро a .

Решение.

Пусть сторона куба имеет длину x (рис. 6.143). Тогда из подобия треугольников SO_1K_1 и SOC имеем:

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1K_1}{OC} \Rightarrow \frac{SO - OO_1}{SO} = \frac{O_1K_1}{\sqrt{CS^2 - SO^2}} \Rightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 - h^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{h\sqrt{2(a^2 - h^2)}}{h + \sqrt{2(a^2 - h^2)}}.$$

Таким образом, искомый объем куба равен

$$V = x^3 = \left(\frac{h\sqrt{2(a^2 - h^2)}}{h + \sqrt{2(a^2 - h^2)}} \right)^3 \quad (\text{куб. ед.}).$$

Ответ: $\left(\frac{h\sqrt{2(a^2 - h^2)}}{h + \sqrt{2(a^2 - h^2)}} \right)^3$ куб. ед.

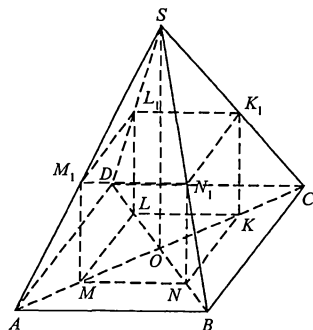


Рис. 6.143

6.123. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и плоскими углами при вершине, равными углом наклона боковых ребер к основанию.

Решение.

Пусть $PABCD$ — данная пирамида. Проведем высоту этой пирамиды PO и высоту боковой грани APD (рис. 6.144). Пусть $AD = a$. Так как $\angle PCO = \angle APD$, то $\triangle POC \sim \triangle PKD$. Следовательно, $PO = DK$. Пусть $DK = x$. Проведем PE — высоту и

медиану $\triangle APD$. Из $\triangle POA$ $AP = \sqrt{AO^2 + PO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2}$. Из $\triangle AEP$

$$PE = \sqrt{AP^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}. \quad \text{Тогда } S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} AD \cdot PE = \frac{1}{2} AP \cdot DK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2} \cdot x \Rightarrow \frac{a^2(a^2 + 4x^2)}{4} = \frac{x^2(a^2 + 2x^2)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^4 - 2a^2x^2 - a^4 = 0 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{2}.$$

Таким образом, искомый объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot PO = \frac{a^3\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{6}$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{6}$.

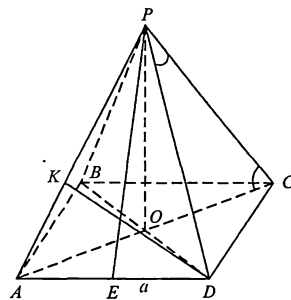


Рис. 6.144

6.124. Два конуса имеют общую высоту, но вершины их лежат в разных концах высоты. Образующая первого конуса l , а угол при вершине его осевого сечения 2φ . Угол при вершине в осевом сечении второго конуса равен 2ψ . Найти объем общей части конусов.

Решение.

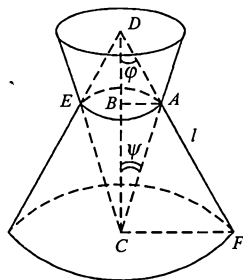


Рис. 6.145

Из рис. 6.145 видно, что искомый объем V равен сумме объемов конусов ADE и ACE .

$$\text{Следовательно, } V = \frac{1}{3} \pi \cdot AB^2 \cdot BD + \frac{1}{3} \pi \cdot AB^2 \cdot BC = \frac{1}{3} \pi AB^2 (DB + BC) = \frac{1}{3} \pi AB^2 DC.$$

Так как $DC = DF \cos \varphi = l \cos \varphi$ и $DC = DB + BC = AB \operatorname{ctg} \varphi + AB \operatorname{ctg} \psi = AB (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)$,

$$\text{то } l \cos \varphi = AB (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) = AB \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \varphi \sin \psi} \Rightarrow AB = \frac{l \cos \varphi \sin \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Подставив найденные величины в формулу объема, получим: $V = \frac{\pi l^3 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}{3 \sin^2(\varphi + \psi)}$.

Ответ: $\frac{\pi l^3 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}{3 \sin^2(\varphi + \psi)}$.

6.125. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ плоский угол при вершине равен 2α , а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d . Найти объем этой пирамиды.

Решение.

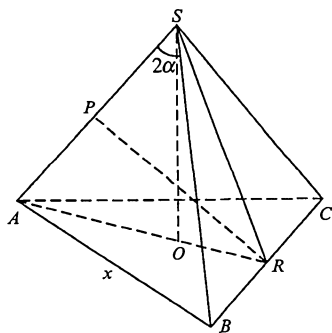


Рис. 6.146

Проведем плоскость через ребро SA и точку R — основания перпендикуляра AR к отрезку BC (рис. 6.146). Пусть RP — высота треугольника ASR . Так как $RP \perp AS$ и $RP \perp BC$, то $RP = d$. Пусть сторона основания

пирамиды равна x . Тогда $SA = \frac{x}{2 \sin \alpha}$ и высота пирамиды

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{x}{6 \sin \alpha} \sqrt{9 - 12 \sin^2 \alpha}.$$

В силу того, что $AR \cdot SO = AS \cdot d$, то $x = \frac{6d}{\sqrt{3\sqrt{9 - 12 \sin^2 \alpha}}}$. Таким образом, искомый объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot SO = \frac{d^3}{3(3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}.$$

Ответ: $\frac{d^3}{3(3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}$.

6.126. Определить число сторон правильной n -угольной пирамиды, объем которой в $\frac{3\pi}{n}$ раз меньше объема цилиндра равной высоты, основанием которого является круг, вписанный в основание пирамиды.

Решение.

По условию $V_{\text{ц}} = \frac{3\pi}{n} V_{\text{п}}$. Подставив в это выражение значения объемов $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$, $V_{\text{п}} = \frac{1}{3} QH$, $Q = n \cdot R^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, после сокращения приходим к соотношению $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow n = 4$.

Ответ: 4.

6.127. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна d , а длины сторон оснований a и b ($a > b$).

Решение.

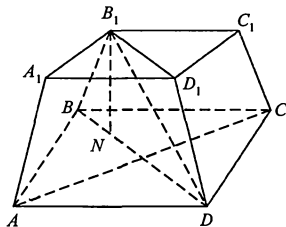


Рис. 6.147

Хорошо известно, что искомый объем выражается формулой

$V = \frac{H}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, где $S_1 = a^2$, $S_2 = b^2$ и H — высота усеченной пирамиды (рис. 6.147). Найдем $H = B_1N$. Из прямоугольного $\triangle B_1DN$ имеем:

$B_1N = \sqrt{B_1D^2 - DN^2}$. В силу того что BB_1D_1D — равнобедренная трапеция,

то $BN = \frac{1}{2}(BD - B_1D_1) = \frac{1}{2}(a\sqrt{2} - b\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)$. Следовательно,

$ND = BD - BN = a\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$ и

$H = \sqrt{d^2 - \frac{2}{4}(a + b)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2d^2 - (a + b)^2}$. Таким образом, $V = \frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{2d^2 - (a + b)^2} (a^2 + ab + b^2)$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{2d^2 - (a + b)^2} (a^2 + ab + b^2)$.

6.128. В правильную четырехугольную пирамиду вписан полушар так, что плоская грань его лежит в плоскости основания пирамиды, а шаровая поверхность касается боковых граней пирамиды. Найти отношение полной поверхности полушара к полной поверхности пирамиды, если боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ и разность между стороной основания и диаметром шара равна d . Определить объем полушара.

Решение.

Плоскость ABS (рис. 6.148) дает в пересечении с полушаром полукруг NLP , касающийся апофем пирамиды в точках K и M . Пусть сторона основания пирамиды равна a , а радиус полушара — r . Тогда полная поверхность полушара $S_1 = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$, а пол-

ная поверхность пирамиды $S_2 = \frac{2a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}$. Следовательно, их отношение

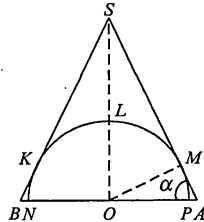


Рис. 6.148

$k = \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi r^2 \cos \varphi}{2a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$. Из $\triangle OMA$ $OM = OA \cdot \sin \varphi$, т.е. $r = \frac{a}{2} \sin \varphi$. Подставив это выражение в отношение площадей,

получаем $k = \frac{3\pi}{8} \sin 2\varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

Для определения объема полушара V найдем r из условия $a2r = d$ и ранее найденного равенства $r = \frac{a}{2} \sin \varphi$. Получим

$$r = \frac{d \sin \varphi}{2(1 - \sin \varphi)} = \frac{d \sin \varphi}{4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}. \text{ Таким образом, искомый объем полушара } V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi d^3 \sin^3 \varphi}{96 \sin^6 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} \sin 2\varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \frac{\pi d^3 \sin^3 \varphi}{96 \sin^6 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}$.

6.129. В основании призмы лежит трапеция. Выразить объем призмы через площади S_1 и S_2 параллельных боковых граней и расстояние d между ними.

Решение.

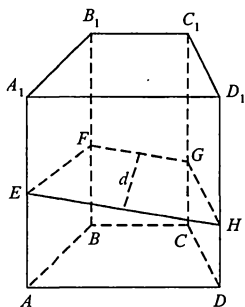


Рис. 6.149

Если трапеция $EFGH$ ($FG \parallel EH$) — перпендикулярное сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 6.149), то высота этой трапеции равна d . Пусть S_1 — площадь грани $AA_1 D_1 D$, S_2 — площадь грани $BB_1 C_1 C$, l — длина ребра призмы, $EH = x$, $FG = y$. Тогда

$$S_1 = xl, S_2 = yl \Rightarrow x = \frac{S_1}{l}, y = \frac{S_2}{l}. \text{ Следовательно, } S_{EFGH} = \frac{x+y}{2} d = \frac{S_1 + S_2}{2l} d.$$

Таким образом, искомый объем призмы $V = S_{EFGH} \cdot l = \frac{(S_1 + S_2)d}{2}$.

Ответ: $\frac{(S_1 + S_2)d}{2}$.

6.130. Под каким углом наклонена образующая конуса к основанию, если полная поверхность конуса в два раза больше поверхности вписанного в него шара?

Решение.

Пусть $AN = x$, $SA = l$, $AO = r$, $\angle SBA = \alpha$ — радиус основания конуса, образующая конуса, радиус шара, угол наклона образующей к основанию соответственно (рис. 6.150). Тогда площадь поверхности конуса $S_k = \pi x(x + l)$, площадь поверхности шара $S_{ш} = 4\pi r^2$. Следовательно, $\pi x(x + l) = 8\pi r^2$. Выразим l и r через α и x :

$$r = x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad l = \frac{x}{\cos \alpha}.$$

Таким образом,

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right) = 8x^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 9 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

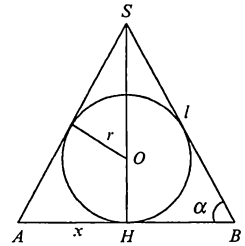


Рис. 6.150

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

6.131. В трапеции одна из боковых сторон равна b и образует с большим основанием $2a$ угол φ . Меньшее основание равно a . Определить объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг данной боковой стороны.

Решение.

Изобразим осевое сечение тела вращения (рис. 6.151). Искомый объем V равен разности между суммой объемов конуса ABL и усеченного конуса $LKDA$ и объемом конуса DCK . Следовательно,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} (AF^2 \cdot BF + (AF^2 + AF \cdot DE + DE^2) \cdot EF - DE^2 \cdot EC) = \\ &= \frac{\pi}{3} (AF^2 (BF + FE) + DE^2 (EF - EC) + AF \cdot DE \cdot EF) = \\ &= \frac{\pi}{3} (AF^2 \cdot BE + DE^2 \cdot FC + AF \cdot DE \cdot EF) = \\ &= \frac{\pi}{3} (AF^2 (BC + EC) + DE^2 (BC - FB) + AF \cdot DE \cdot (BC + CE - BF)) = \\ &= \frac{\pi}{3} ((2a \sin \alpha)^2 (b + a \cos \alpha) + (a \sin \alpha)^2 (b - 2a \cos \alpha) + \\ &+ 2a \sin \alpha \cdot a \sin \alpha (b + a \cos \alpha - 2a \cos \alpha)) = \frac{\pi a^2 \sin^2 \alpha}{3} \times \\ &\times (4b + 4a \cos \alpha + b - 2a \cos \alpha + 2b - 2a \cos \alpha) = \frac{7\pi a^2 b \sin^2 \alpha}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{7\pi a^2 b \sin^2 \alpha}{3}$.

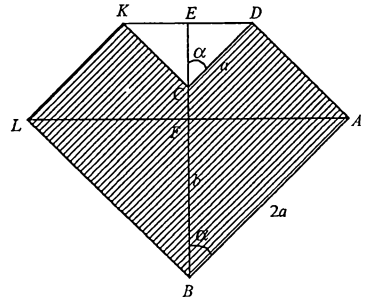


Рис. 6.151

6.132. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями $AC = a$ и $BD = b$. Боковое ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и равно z . Через точку A и середину K ребра SC проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD . Определить площадь сечения.

Решение.

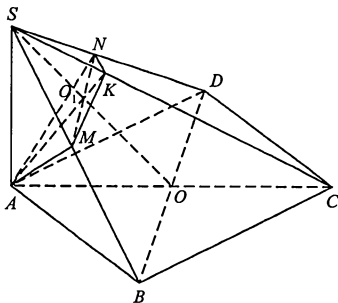


Рис. 6.152

Пусть $AMKN$ — четырехугольник, получающийся в сечении, и O_1 — точка пересечения его диагоналей (рис. 6.152). Рассматривая $\triangle SAC$, легко заметить, что O_1 лежит на пересечении медиан этого треугольника. Следовательно,

$$\frac{MN}{BD} = \frac{SO_1}{SO} = \frac{2}{3}, \text{ т.е. } MN = \frac{2}{3}b.$$

Из прямоугольного $\triangle SAC$ находим $AK = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{z^2 + a^2}$. Из-за того, что $AK \perp MN$,

$$\text{мы получаем } S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}AK \cdot MN = \frac{b}{6}\sqrt{z^2 + a^2}.$$

Ответ: $\frac{b}{6}\sqrt{z^2 + a^2}$.

6.133. Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2 ($S_1 < S_2$), а ее объем равен V . Найти объем полной пирамиды.

Решение.

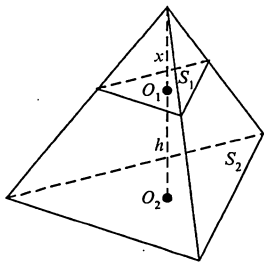


Рис. 6.153

Пусть H — высота полной пирамиды, h — высота усеченной пирамиды и $x = Hh$.

Тогда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{x^2}{H^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \frac{x}{x+h} \Rightarrow x\sqrt{S_1} + h\sqrt{S_1} = x\sqrt{S_2} \Rightarrow x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$. Следовательно,

но, $H = x + h = \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$ и объем полной пирамиды $V_{\text{п}} = \frac{1}{3}S_2H = \frac{1}{3} \frac{hS_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$.

Так как $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2) \Rightarrow h = \frac{3V}{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}}$, то $V_{\text{п}} = \frac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2} - S_1\sqrt{S_1}}$.

Ответ: $\frac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2} - S_1\sqrt{S_1}}$.

6.134. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , двугранный угол при основании равен 2α . Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании.

Решив полученное уравнение с помощью подстановок $\sin \gamma = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}$, $\cos \gamma = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}$, находим $\sin \gamma = \frac{3}{5}$. Следо-

вательно, $\gamma = \arcsin \frac{3}{5}$.

Ответ: $\arcsin \frac{3}{5}$.

6.137. Треугольник со сторонами, равными 2, 3 и 4, вращается поочередно вокруг каждой из своих сторон. Найти отношение объемов полученных при этом вращении фигур.

Решение.

Пусть объемы тел вращения вокруг сторон 2, 3 и 4 равны V_1 , V_2 и V_3 соответственно; тогда $V_1 = \frac{1}{3} \pi h_1^2 \cdot 2 = \frac{2}{3} \pi h_1^2$,

$V_2 = \frac{1}{3} \pi h_2^2 \cdot 3 = \pi h_2^2$, $V_3 = \frac{1}{3} \pi h_3^2 \cdot 4 = \frac{4}{3} \pi h_3^2$, где h_1 , h_2 , h_3 — соответствующие высоты.

В силу того, что $2 \cdot h_1 = 3 \cdot h_2 = 4 \cdot h_3 = 2S$, имеем $V_1 = \frac{2}{3} \pi S h_1$, $V_2 = \frac{2}{3} \pi S h_2$, $V_3 = \frac{2}{3} \pi S h_3 \Rightarrow V_1 = \frac{4}{3} \pi S^2 \cdot \frac{1}{2}$, $V_2 = \frac{4}{3} \pi S^2 \cdot \frac{1}{3}$,

$V_3 = \frac{4}{3} \pi S^2 \cdot \frac{1}{4}$. Таким образом, $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$.

6.138. Основанием пирамиды служит прямоугольник, две боковые грани ее перпендикулярны основанию, две другие грани образуют с основанием углы α и β соответственно. Определить объем пирамиды, если длина наибольшего из боковых ребер равна d .

Решение.

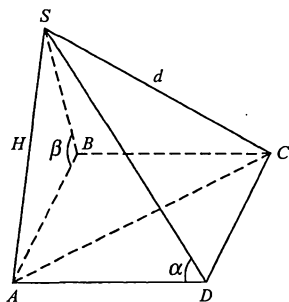


Рис. 6.157

Пусть $AS = H$ и $AS \perp ABCD$ (рис. 6.157). Из $\triangle ASD$ $AD = H \operatorname{ctg} \alpha$; из $\triangle ASB$

$AB = H \operatorname{ctg} \beta$; из $\triangle ABC$ $AC = \sqrt{AD^2 + AB^2} = H \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$; из $\triangle ASC$

$$SC^2 = AS^2 + AC^2 \Rightarrow d^2 = H^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta) \Rightarrow H = \frac{d}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}.$$

Таким образом, искомый объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} H \cdot AB \cdot AD = \frac{d^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{3 \sqrt{(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta)^3}}.$$

Ответ: $\frac{d^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{3 \sqrt{(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta)^3}}$.

6.139. В шар радиусом R вписан цилиндр. Рассматривая объем цилиндра как функцию радиуса основания цилиндра, написать формулу, связывающую функцию и аргумент.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение цилиндра (рис. 6.158). Обозначив радиус основания цилиндра через x , а объем через y , запишем: $y = \pi x^2 \cdot AB$. Далее, из прямоугольного $\triangle ABC$ находим: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - 4x^2} = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Отсюда окончательно получаем формулу: $y = 2\pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2}$.

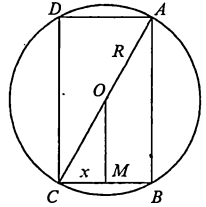


Рис. 6.158

Ответ: $y = 2\pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2}$, где y — объем цилиндра, x — радиус цилиндра.

6.140. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна к боковой грани.

Решение.

Пусть G и F — середины ребер правильной треугольной пирамиды $SABC$, M — середина отрезка GF (рис. 6.159). Так как сечение перпендикулярно к грани CSA , то $\angle SMB = 90^\circ$. Продолжив SM до пересечения с прямой AC в точке D , рассмотрим $\triangle DBS$. Очевидно, точка M делит отрезок SD пополам. В силу того что $BM \perp DS$, то $\triangle DBS$ равнобедренный ($SB = DB$). Пусть сторона основания

пирамиды равна x . Тогда $SB = DB = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Высота боковой грани

$SD = \sqrt{SC^2 - CD^2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $S_{\text{бок}} = \frac{3x^2\sqrt{2}}{4}$ и $S_{\text{осн}} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, по-

этому искомое отношение $\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{осн}}} = \sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$.

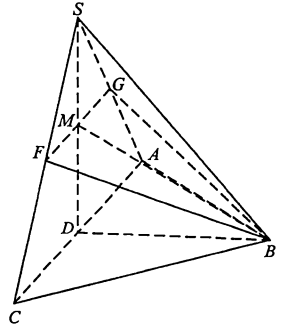


Рис. 6.159

6.141. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен φ , а длина высоты пирамиды равна H . Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

Решение.

Пусть $SABC$ — данная пирамида (рис. 6.160). Так как она правильная, то центр описанной около нее сферы лежит на прямой SO ($SO = H$), расположенной в плоскости ASS' , где S' — точка пересечения прямой SO со сферой. Треугольник SAS' прямоугольный, так как $\angle A = 90^\circ$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр SS'). Обозначим $SS' = 2R$, $BC = x$; тогда $AO = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и из отношения

$\frac{OS'}{AO} = \frac{AO}{OS}$ имеем $\frac{x^2}{3} = H(2R - H)$. Так как $\triangle AOS$ — прямоугольный, то

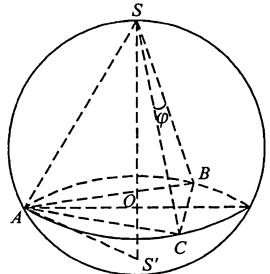


Рис. 6.160

$$AS^2 = \frac{x^2}{3} + H^2. \text{ Из } \triangle ASC \text{ по теореме косинусов имеем: } AS^2 + SC^2 - 2AS \cdot SC \cdot \cos \alpha = x^2 \Rightarrow AS^2 = \frac{x^2}{2(1 - \cos \varphi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2(1 - \cos \varphi)} = \frac{x^2}{3} + H^2 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = \frac{2H^2(1 - \cos \varphi)}{1 + 2\cos \varphi}. \text{ Решив уравнение } \frac{2H^2(1 - \cos \varphi)}{1 + 2\cos \varphi} = H(2R - H), \text{ находим } R = \frac{3H}{4\cos \varphi + 2}.$$

Ответ: $\frac{3H}{4\cos \varphi + 2}.$

6.142. Сфера переменного радиуса R проходит через центр некоторой заданной сферы радиуса r . Найти площадь шапочки, вырезанной заданной сферой из поверхности переменной сферы.

Решение.

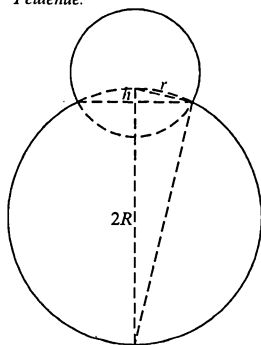


Рис. 6.161

Площадь шаровой поверхности сегмента равна $S = 2\pi R \cdot h$. Далее, из прямоугольного треугольника находим $2Rh = r^2$. Следовательно, искомая площадь равна $S = \pi r^2$. Заметим, что значение S не зависит от величины радиуса R (рис. 6.161).

Ответ: πr^2 .

6.143. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти угол между осью конуса и его образующей, зная, что полная поверхность цилиндра относится к площади основания конуса как 3:2.

Решение.

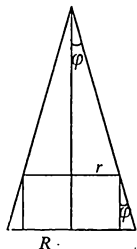


Рис. 6.162

Пусть φ — искомый угол, R — радиус основания конуса, r — радиус основания цилиндра

(рис. 6.162). По условию $\frac{2\pi r^2 + 2\pi rR}{\pi R^2} = 2\left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{r}{R} = \frac{3}{2}$. Так как $\frac{R-r}{R} = \operatorname{tg} \varphi$, то $\frac{r}{R} = 1 - \operatorname{tg} \varphi$. В ре-

зультате получаем уравнение относительно $\operatorname{tg} \varphi$: $4\operatorname{tg}^2 \varphi + 12\operatorname{tg} \varphi + 5 = 0$. Отсюда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{2}$ и $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$.

Легко увидеть, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R-r}{R} < 1$, поэтому $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

6.144. Две равные правильные четырехугольные пирамиды приложены одна к другой основаниями так, что оба основания совпадают, а высоты расположены по разные стороны от общего основания. В полученный таким образом восьмигранник вписан шар. Найти его радиус, если сторона основания каждой из пирамид равна b , а плоский угол при вершине равен φ .

Решение.

Опустим перпендикуляр AO на плоскость оснований пирамид (рис. 6.163), который пройдет через центр шара. Апофема AB пирамиды является касательной к шаровой поверхности. Из прямоугольного треугольника AOB находим искомый радиус:

$$\begin{aligned} r = OC = OB \sin \angle CBO &= \frac{b}{2} \sin \angle CBO = \frac{b}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \angle CBO} = \\ &= \frac{b}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{BD}{AB} \right)^2} = \frac{b}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{b \sqrt{\cos \varphi}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{b \sqrt{\cos \varphi}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}$.

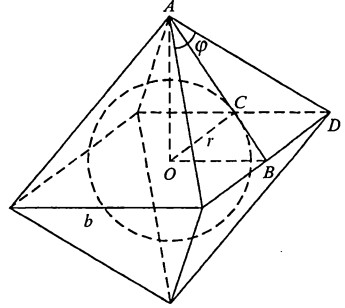


Рис. 6.163

6.145. На высоте конуса, равной H , как на диаметре построен шар. Определить объем части шара, лежащей вне конуса, если угол между образующей и высотой равен α .

Решение.

Объем той части шара, который необходимо определить, на рис. 6.164 обозначен штриховкой. Этот объем V получается вычитанием объема V_1 конуса MCN из объема V_2 шарового сегмента $CEMKNF$. Пусть $MK = r$, $KC = h$. В силу того что радиус шара $OC = \frac{1}{2}CD = \frac{H}{2}$, то

$$V = V_2 - V_1 = \pi h^2 \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{3} \right) - \frac{\pi r^2 h}{3}. \text{ В это выражение необходимо подставить } h = MC \cos \alpha = H \cos^2 \alpha \text{ и } r = MC \sin \alpha = H \cos \alpha \sin \alpha \text{ (вычисления упростятся, если предварительно заменить } r^2 = MK^2 \text{ через } CK \cdot KD = h(Hh)); \text{ тогда } V = \frac{\pi h^2 H}{6}.$$

$$\text{Окончательно получим } V = \frac{\pi H^3 \cos^4 \alpha}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi H^3 \cos^4 \alpha}{6}$.

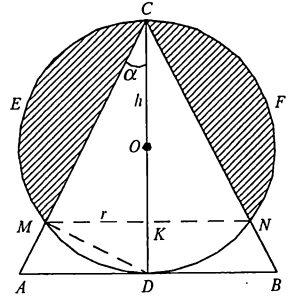


Рис. 6.164

6.146. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр длины d , опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, составляет с одним из катетов угол φ . Определить объем призмы.

Решение.

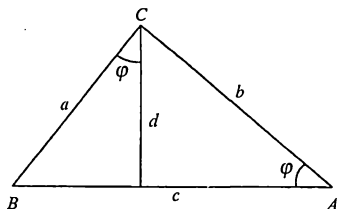


Рис. 6.165

Пусть r — радиус шара и пусть a, b и c — соответственно катеты и гипотенуза $\triangle ABC$, лежащего в основании призмы (рис. 6.165). Тогда мы

имеем: $a = \frac{d}{\cos \varphi}$, $b = \frac{d}{\sin \varphi}$, $c = \frac{a}{\sin \varphi} = \frac{d}{\cos \varphi \sin \varphi}$. Так как радиус r равен радиусу круга, вписанного в $\triangle ABC$, то

$$r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{d}{1 + \sin \varphi + \cos \varphi}$$

и, следовательно, объем призмы равен

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot 2r = \frac{2d^3}{\sin 2\varphi(1 + \sin \varphi + \cos \varphi)}.$$

Ответ: $\frac{2d^3}{\sin 2\varphi(1 + \sin \varphi + \cos \varphi)}.$

6.147. Конус с углом φ между осью и образующей и радиусом основания r рассечен сферической поверхностью, центр которой находится в вершине конуса, так что объем конуса разделен пополам. Найти радиус этой сферы.

Решение.

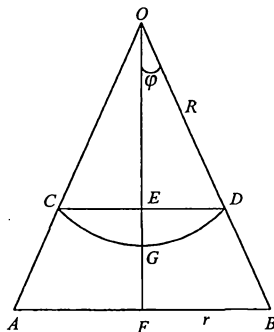


Рис. 6.166

Пусть искомым радиус есть R , объем конуса — V_1 и объем шарового сектора — V_2 (рис. 6.166). По условию $V_2 = \frac{1}{2}V_1$. Выразим V_1 и V_2 через r, φ и R . Имеем:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot OF = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg} \varphi, \quad V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot GE = \frac{2}{3}\pi R^2(OG - OE) = \\ = \frac{2}{3}\pi R^2(R - R \cos \varphi) = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \varphi) = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Подставим найденные значения в равенство $V_2 = \frac{1}{2}V_1$. Получим

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg} \varphi \Rightarrow R = \frac{r}{2} \sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Ответ: $\frac{r}{2} \sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$

6.148. Две треугольные пирамиды имеют общим основанием равнобедренный прямоугольный треугольник. Высота одной из них проходит через вершину прямого угла, другой — через середину гипотенузы треугольника основания. Высоты пирамид равны между собой и равны высоте H , опущенной в треугольнике основания из вершины прямого угла. Найти объемы тех частей пирамид, которые получаются после удаления их общей части.

Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ угол C — прямой (рис. 6.167), $ABCS_1$ и $ABCS_2$ — пирамиды с высотами CS_1 и DS_2 , равными высоте $CD = H$ треугольника основания. Об-

щее значение объемов пирамид равно $\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H = \frac{H^3}{3}$.

Грань ABS_1 первой пирамиды отсекает от второй пирамиды их общую часть $ABCS$, являющуюся треугольной пирамидой с основанием ABC и высотой $\frac{1}{2}H$. Объем общей части равен $\frac{1}{6}H^3$. Искомые объемы равны между собой и

$$\text{их величина } \frac{1}{3}H^3 - \frac{1}{6}H^3 = \frac{1}{6}H^3.$$

Ответ: $\frac{1}{6}H^3, \frac{1}{6}H^3$.

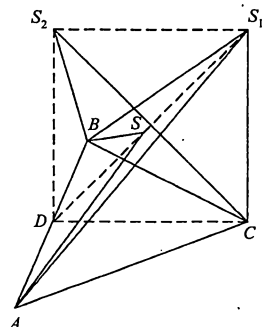


Рис. 6.167

6.149. В конус вписан шар радиусом r . Найти объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстоянии a .

Решение.

На рис. 6.168 изображено сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса и ту его образующую, к которой перпендикулярна касательная к шару плоскость. Следу этой плоскости соответствует прямая DF . Легко увидеть, что четырехугольник $COFD$ есть квадрат со стороной r . Высота конуса

$$SB = OB + OS = OB + \sqrt{OC^2 + CS^2} = OB + \sqrt{OC^2 + (SD - CD)^2} = r + \sqrt{r^2 + (a - r)^2}.$$

Радиус основания конуса AB определим из подобия $\triangle ABS$ и $\triangle OCS$:

$$\frac{AB}{OC} = \frac{SB}{SC} \Rightarrow AB = OC \cdot \frac{SB}{SC} = r \cdot \frac{r + \sqrt{r^2 + (a - r)^2}}{a - r}.$$

Таким образом, искомый объем

$$\text{конуса равен } V = \frac{1}{3} \pi AB^2 SB = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \frac{(r + \sqrt{r^2 + (a - r)^2})^3}{(a - r)^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \frac{(r + \sqrt{r^2 + (a - r)^2})^3}{(a - r)^2}.$

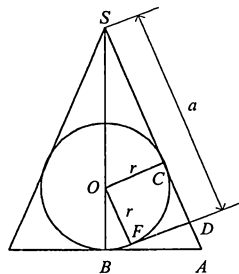


Рис. 6.168

6.150. Две правильные n -угольные пирамиды с одинаковыми основаниями, но разными высотами, сложены этими основаниями, и около получившегося многогранника описан шар радиусом R . Найти высоты пирамид, если сторона основания равна a . При каком соотношении между a и R задача имеет решение?

Решение.

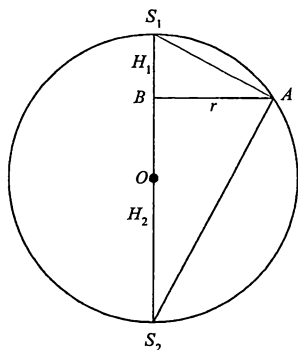


Рис. 6.169

Пусть H_1 и H_2 — высоты пирамид, r — радиус круга, описанного около основания (рис. 6.169). Тогда $\frac{1}{2}a = r \sin \frac{\pi}{n}$. Далее, из прямоугольного ΔS_1AS_2 , вершинами которого являются вершины данных пирамид и одна из вершин основания, находим: $H_1H_2 = r^2 = \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}$. В силу того, что $H_1 + H_2 = 2R$,

получаем: $H_1 = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$, $H_2 = R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$. Решение воз-

можно, если $R \geq \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$.

Ответ: $R \pm \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$, если $R \geq \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$.

6.151. Объем правильной треугольной призмы равен V , угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен φ . Вычислить сторону основания призмы.

Решение.

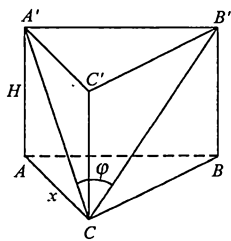


Рис. 6.170

Пусть $ABCA'B'C'$ — данная призма (рис. 6.170). Пусть $AC = x$, $AA' = H$. Тогда

$V = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$ и $A'C = B'C = \sqrt{H^2 + x^2}$. Из $\Delta CA'B'$ по теореме косинусов

$x = \sqrt{H^2 + x^2 + H^2 + x^2 - 2(H^2 + x^2) \cos \varphi} \Rightarrow H = x \sqrt{\frac{2 \cos \varphi - 1}{2(1 - \cos \varphi)}}$. Следовательно,

$V = \frac{x^3 \sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{2 \cos \varphi - 1}{2(1 - \cos \varphi)}}$, откуда $x = \sqrt[3]{\frac{8V \sin \frac{\varphi}{2}}{3(2 \cos \varphi - 1)}}$. Заметим, что решение возмож-

но, если $\cos \varphi > \frac{1}{2}$ или $\varphi < \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{8V \sin \frac{\varphi}{2}}{3(2 \cos \varphi - 1)}}$, если $\varphi < \frac{\pi}{3}$.

6.152. Плоские углы при вершине параллелепипеда равны между собой и равны $\frac{\pi}{4}$. Длины ребер, сходящихся в одной вершине, равны 1, 2 и 3 см. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

Из прямоугольных треугольников ACO , COB и CAB (рис. 6.171)

$$\begin{aligned} \text{находим: } AO^2 &= AC^2 - CO^2 = AC^2 - \left(\frac{CB}{\cos \frac{\pi}{8}} \right)^2 = 3^2 - \left(\frac{3 \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{8}} \right)^2 = \\ &= 9 \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2} \cos^2 \frac{\pi}{8}} \text{ (см)} \end{aligned}$$

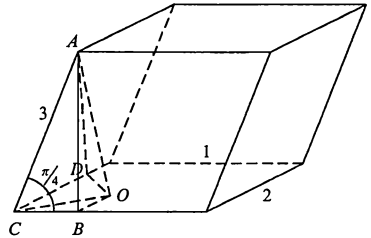


Рис. 6.171

$$OA = \frac{3}{\sqrt{2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}}} \text{ (см). Следовательно, искомый объем равен}$$

$$V = S \cdot H = S \cdot AO = 1 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}} = \frac{3}{\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}} \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}} \text{ см}^3.$$

6.153. В конус вписан шар. Поверхность шара относится к площади основания конуса как 4:3. Найти угол при вершине конуса.

Решение.

Пусть r — радиус основания конуса, φ — угол между осью конуса и образующей, R — радиус вписанного шара. В осевом сечении конуса имеем равнобедренный треугольник ABC (рис. 6.172). Радиус круга, вписанного в этот треугольник, равен радиусу R вписанного в конус шара. Пусть O — центр круга, $\angle OCA = \psi$. Тогда $\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{r}$. По

условию задачи $\frac{4\pi R^2}{\pi r^2} = 4 \left(\frac{R}{r} \right)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и, следовательно, $\psi = \frac{\pi}{6}$. Так как, кро-

ме того, $\varphi + 2\psi = \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Таким образом, искомый угол $2\varphi = \frac{\pi}{3}$.

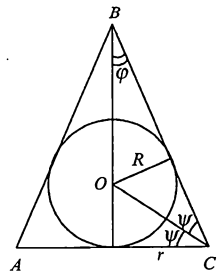


Рис. 6.172

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3}.$$

6.154. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами a и b . Боковые грани призмы пересечены плоскостью так, что в сечении получился правильный треугольник. Найти его сторону и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Решение.

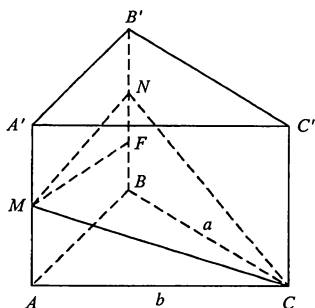


Рис. 6.173

Пусть $ABCA'B'C'$ — данная призма, а $\triangle CMN$ — правильный (рис. 6.173). Проведем MF перпендикулярно к BB' . Обозначим сторону $\triangle CMN$ через x . Тогда

$$MA = \sqrt{x^2 - b^2}, \quad BN = \sqrt{x^2 - a^2}, \quad NF = BN - MA = \sqrt{x^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - b^2},$$

$MF = AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. Далее, $MN^2 = MF^2 + NF^2$. Подставив в это равенство полученные выше выражения, находим x :

$$x = \sqrt{\frac{2}{3} \left(a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} \right)}.$$

Так как проекцией треугольника MNC является треугольник ABC , то

$$\cos \varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \frac{ab\sqrt{3}}{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}. \text{ В силу того что } x > a \text{ и } x > b,$$

оставляем знак «+» и окончательно находим угол

$$\varphi = \arccos \frac{ab\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3} \left(a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} \right)}, \arccos \frac{ab\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}.$

6.155. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом φ к плоскости основания. Найти площадь образовавшегося треугольного сечения, если объем пирамиды, отсеченной плоскостью от призмы, равен V .

Решение.

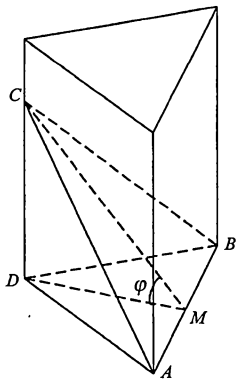


Рис. 6.174

Пусть S — искомая площадь, а S_1 — площадь треугольника ABD (рис. 6.174). Тогда имеем: $S_1 = S \cos \varphi$ (площадь проекции плоской фигуры равна площади проектируемой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции).

Следовательно, $S = \frac{S_1}{\cos \varphi}$, где $S_1 = \frac{1}{2} AB^2 \sin 60^\circ = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. По условию задачи

$$\frac{1}{3} S_1 \cdot CD = V, \text{ и так как } CD = DM \cdot \operatorname{tg} \varphi = AB \sin 60^\circ \operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{2} \sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi, \text{ то}$$

$$V = \frac{1}{3} AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{AB}{2} \sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi = \frac{AB^3 \operatorname{tg} \varphi}{8} \Rightarrow AB = 2 \sqrt[3]{V \operatorname{ctg} \varphi}. \text{ Следовательно, искомая пло-}$$

$$\text{щадь равна } S = \frac{S_1}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt[3]{V^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}{\cos \varphi} \sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{V^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}{\cos \varphi} \sqrt{3}.$

6.156. В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Определить угол при вершине конуса, если поверхность конуса относится к поверхности полусферы как 18:5.

Решение.

Пусть R — радиус полусферы, r — радиус основания конуса, l — образующая конуса, φ — угол между осью конуса и образующей. По условию задачи име-

ем: $\frac{\pi r(l+r)}{2\pi R^2} = \frac{18}{5}$. Выразим r и R через l и φ . Для этого рассмотрим равнобе-

ренный треугольник ABC (рис. 6.175), получающийся в осевом сечении конуса. Из $\triangle ABC$ находим $r = l \sin \varphi$, $R = r \cos \varphi = l \sin \varphi \cos \varphi$. Подставляя эти выражения

вместо r и R , получаем $\frac{1}{2} \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{18}{5}$. В силу того что $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$, то,

сократив дробь на $1 + \sin \varphi$, будем иметь $36 \sin^2 \varphi - 36 \sin \varphi + 5 = 0 \Rightarrow \sin \varphi_1 = \frac{5}{6}$

и $\sin \varphi_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow$ искомый угол при вершине конуса равен $2 \arcsin \frac{5}{6}$ или

$2 \arcsin \frac{1}{6}$.

Ответ: $2 \arcsin \frac{5}{6}$ или $2 \arcsin \frac{1}{6}$.

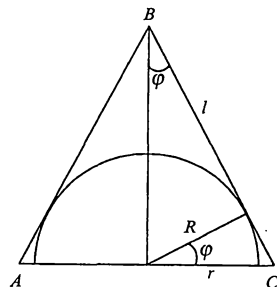


Рис. 6.175

6.157. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 3 см и составляет с боковым ребром призмы угол $\frac{\pi}{6}$. Вычислить объем призмы.

Решение.

Объем призмы $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ (рис. 6.176) будем искать по формуле $V = SH$, где S — площадь шестиугольника $ABCDEF$, а H — высота призмы.

В $\triangle ADD_1$, $\angle ADD_1 = \frac{\pi}{2}$, $\angle AD_1 D = \frac{\pi}{6}$, $AD_1 = 3$ (см), тогда

$H = DD_1 = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см). Пусть $BC = x$, тогда $AG = \frac{3-x}{2} = \frac{3}{4} - \frac{x}{4}$,

$\angle GBA = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{AG}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2AG$, $x = \frac{3}{2} - x \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ (см). Таким образом,

$S = \frac{3}{2} x^2 \sqrt{3} = \frac{3 \cdot 3^2 \sqrt{3}}{4^2 \cdot 2} = \frac{27\sqrt{3}}{32}$ (см²) и $V = SH = \frac{27\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{243}{64}$ (см³).

Ответ: $\frac{243}{64}$ см³.

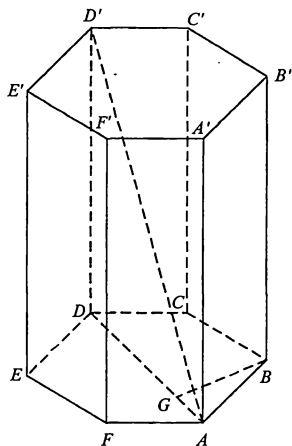


Рис. 6.176

6.158. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды по данному ее объему V и углу φ между боковой гранью и плоскостью основания.

Решение.

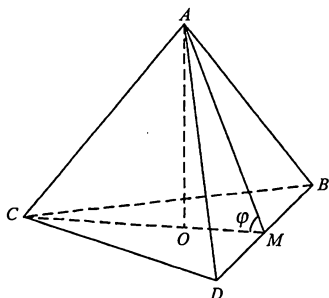


Рис. 6.177

Выразим полную поверхность S пирамиды через сторону основания $DB = a$ (рис. 6.177). Обозначив площадь основания пирамиды через S_1 ,

$$\text{получим: } S = S_1 + \frac{S_1}{\cos \varphi} = \frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} S_1 = \frac{2S_1 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} = \frac{a^2 \sqrt{3} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \varphi}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot AO = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot OM \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot CM \cdot \operatorname{tg} \varphi = \\ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{36} a \cdot \sin 60^\circ \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^3}{24} \operatorname{tg} \varphi, \text{ то } a = 2\sqrt[3]{3V \operatorname{ctg} \varphi}.$$

Подставляя значение a в найденное выражение S , окончательно получим:

$$S = \frac{2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt[3]{9V^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt[3]{9V^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$

6.159. В шар радиуса R вписан конус, боковая поверхность которого в n раз больше площади основания. Найти объем конуса.

Решение.

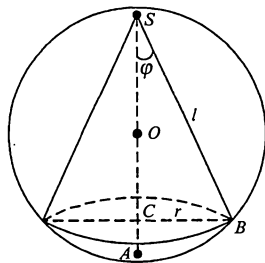


Рис. 6.178

Пусть H — высота конуса, r — радиус основания конуса, l — образующая конуса и φ — угол между образующей и высотой (рис. 6.178). По условию задачи имеем $\pi l = n\pi r^2$; отсюда $l = nr$ и, следовательно, $\sin \varphi = \frac{1}{n}$. Из прямоугольного треуголь-

ника ABS получаем: $r = 2R \cos \varphi \sin \varphi = 2R \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2}$, $H = 2R \cos \varphi \cos \varphi = 2R \frac{n^2 - 1}{n^2}$.

Искомый объем конуса равен $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{8}{3} \pi R^3 \left(\frac{n^2 - 1}{n^3} \right)^2$.

Ответ: $\frac{8}{3} \pi R^3 \left(\frac{n^2 - 1}{n^3} \right)^2$.

6.160. Отношение высоты конуса к радиусу описанного вокруг него шара равно n . Найти отношение объемов этих тел. Выяснить, при каких n задача имеет смысл.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 6.179). Обозначим через h высоту конуса, R — радиус шара, описанного около конуса. Тогда $\frac{h}{R} = n$, т.е. $h = nR$. Выразим радиус r основания конуса через R , рассмотрев хорды AC и BM ; получаем $BD \cdot DM = AD \cdot DC$, т.е. $r^2 = h(2R - h) = n(2 - n)R^2$ (значит, $n < 2$). Следовательно,

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi n^2(2 - n)R^3. \quad \text{Таким образом } \frac{V_{\text{к}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{1}{4}n^2(2 - n), \quad (\text{при } 0 < n < 2).$$

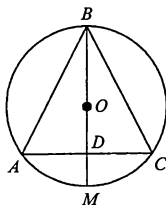


Рис. 6.179

Ответ: $\frac{1}{4}n^2(2 - n)$ при $0 < n < 2$.

6.161. Высота правильной треугольной пирамиды равна H , а двугранный угол при боковом ребре равен 2α . Определить объем пирамиды.

Решение.

Обозначим сторону BC через x (рис. 6.180). Тогда искомый объем

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot SO = \frac{x^2}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H = \frac{x^2 \sqrt{3}}{12} H. \quad \text{Из подобия } \triangle ASO \text{ и } \triangle ADF,$$

(прямоугольные, имеющие общий $\angle SAF$) получаем: $\frac{AF}{DF} = \frac{AS}{SO}$.

$$AF = AC \sin \frac{\pi}{3} = \frac{x\sqrt{3}}{2}, \quad DF = CF \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \quad OS = H \text{ и}$$

$$AS = SO \cdot \frac{AF}{DF} = H \cdot \frac{x\sqrt{3} \cdot 2}{2x \operatorname{ctg} \alpha} = \sqrt{3}H \operatorname{tg} \alpha. \quad \text{Из } \triangle ASO \text{ имеем: } AS^2 = AO^2 + OS^2, \text{ а так}$$

$$\text{как } AO = \frac{2}{3}AF = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad OS = H, \quad AS = H\sqrt{3}\operatorname{tg} \alpha, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} (H\sqrt{3}\operatorname{tg} \alpha)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 + H^2 \Rightarrow 3H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3}x^2 + H^2 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 = 3H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - H^2 \Rightarrow x^2 = 9H^2 \left(\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 9H^2 \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{6})\sin(\alpha - \frac{\pi}{6})}{\cos^2 \alpha \cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{12 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})\sin(\alpha - \frac{\pi}{6})}{\cos^2 \alpha} H^2. \end{aligned}$$

$$\text{Окончательно получаем, что искомый объем равен } V = \frac{x^2 \sqrt{3}}{12} H = \frac{\sqrt{3}H^3 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})\sin(\alpha - \frac{\pi}{6})}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}H^3 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})\sin(\alpha - \frac{\pi}{6})}{\cos^2 \alpha}.$$

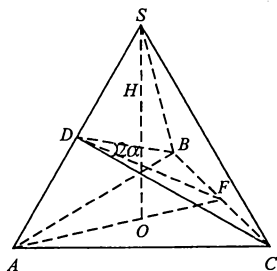


Рис. 6.180

6.162. В конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен α , вписан шар радиусом R . Найти объем части конуса, расположенной над шаром.

Решение.

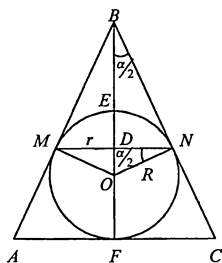


Рис. 6.181

Рассмотрим осевое сечение ABC конуса. Пусть BF — высота в треугольнике ABC , M и N — точки касания круга, вписанного в треугольник ABC со сторонами AB и BC , O — центр круга, E — точка пересечения меньшей дуги MN с отрезком BF , D — точка пересечения отрезков MN и BF (рис. 6.181). Обозначим $DM = r$, $DE = H$, $BD = h$. Тогда иско-

мый объем равен $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$. Но

$$h = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = R \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = R \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \text{ и } H = R - R \sin \frac{\alpha}{2}; \text{ следовательно,}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 \left[\frac{\cos^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 \left(2 + \sin \frac{\alpha}{2}\right) \right].$$

Ответ: $\frac{1}{3}\pi R^3 \left[\frac{\cos^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 \left(2 + \sin \frac{\alpha}{2}\right) \right]$.

6.163. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна d , а длины ребер относятся как $p : k : s$.

Решение.

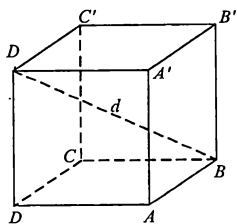


Рис. 6.182

Искомый объем параллелепипеда будем искать по формуле $V = AB \cdot BC \cdot BB'$ (рис. 6.182). Пусть $AB = px$, $BC = kx$ и $BB' = sx$ (так как по условию $p : k : s = AB : BC : BB'$). В $\triangle D'DB$ угол $D'DB$ — прямой, поэтому $D'B^2 = D'D^2 + DB^2$; в $\triangle DAB$ угол DAB — прямой и, следовательно, $DB^2 = AD^2 + AB^2$. Таким образом, $D'B^2 = D'D^2 + AD^2 + AB^2 \Rightarrow d^2 = s^2 x^2 +$

$$+ k^2 x^2 + p^2 x^2 \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{p^2 + k^2 + s^2}}. \text{ Отсюда окончательно находим объем параллелепипеда: } V = AB \cdot BC \cdot BB' = pksx^3 = \frac{pk s d^3}{\sqrt{(p^2 + k^2 + s^2)^3}} \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $\frac{pk s d^3}{\sqrt{(p^2 + k^2 + s^2)^3}}$ (куб. ед.).

6.164. В шаре из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом 2φ друг к другу. Найти их длины, если радиус шара равен R .

Решение.

Соединив концы A, B и C этих хорд между собой (рис. 6.183), получим правильную пирамиду, вписанную в шар радиусом R с плоским углом при вершине боковой грани 2φ . Требуется определить боковое ребро SC этой пирамиды. Проведем диаметр SF через центр D основания и конец F его соединим с точкой C , получим прямоугольный треугольник. Обозначив $SC = a$, получим:

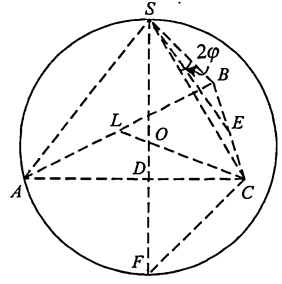


Рис. 6.183

$$\begin{aligned} a^2 &= SF \cdot SD = 2R\sqrt{SC^2 - CD^2} = 2R\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}CL\right)^2} = \\ &= 2R\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}CB\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2R\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}SC\sin\varphi\right)^2} = \\ &= 2R\sqrt{a^2 - \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin\varphi\right)^2} = \frac{4Ra}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2\varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом, находим искомую длину хорды $x = \frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2\varphi}$. Последнее выражение можно преобразовать к

$$\text{виду } x = \frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin(60^\circ + \varphi)\sin(60^\circ - \varphi)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin(60^\circ + \varphi)\sin(60^\circ - \varphi)}.$$

6.165. От правильной четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания, отсечена пирамида с полной поверхностью S . Найти полную поверхность призмы, если угол при вершине треугольника, получающегося в сечении, равен 2α .

Решение.

Пусть x — длина стороны квадрата, лежащего в основании призмы, y — длина бокового ребра призмы, d — диагональ боковой грани (рис. 6.184). Обозначим через $S_{\text{сеч}}$ площадь сечения, тогда легко увидеть, что полная поверхность призмы равна

$$4(S - S_{\text{сеч}}); \text{ поэтому достаточно найти } S_{\text{сеч}}. \text{ Имеем: } S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha, \quad x = d\sqrt{2} \sin \alpha,$$

$$y = \sqrt{d^2 - x^2} = d\sqrt{1 - 2\sin^2\alpha} = d\sqrt{\cos 2\alpha}. \text{ Следовательно,}$$

$$S = S_{\text{сеч}} + \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{yx}{2} = d^2 \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \sin^2\alpha + \sqrt{2} \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{2S}{\sin 2\alpha + 2\sin^2\alpha + 2\sqrt{2} \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}} \text{ и, значит,}$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin^2\alpha + 2\sqrt{2} \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

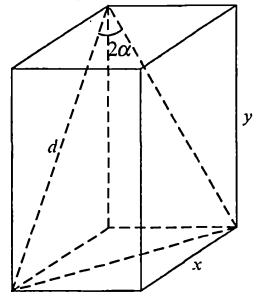


Рис. 6.184

Окончательно после упрощения находим, что полная поверхность призмы равна

$$S_{\text{полн}} = 4(S - S_{\text{сеч}}) = 4S \frac{\sin \alpha + \sqrt{2 \cos 2\alpha}}{\cos \alpha + \sin \alpha + \sqrt{2 \cos 2\alpha}}.$$

Ответ: $4S \frac{\sin \alpha + \sqrt{2 \cos 2\alpha}}{\cos \alpha + \sin \alpha + \sqrt{2 \cos 2\alpha}}.$

6.166. Отношение боковой поверхности правильной треугольной пирамиды к площади ее основания равно n . Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

Решение.

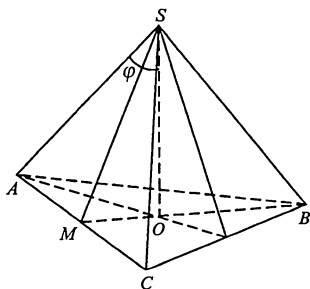


Рис. 6.185

По условию $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\Delta ABC}} = n$, $SO \perp ABC$;

необходимо найти $\angle ASO$ (рис. 6.185). Пусть $SO = H$ и $\angle ASO = \varphi$; тогда в ΔSOA имеем $AO = H \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow AB = AO\sqrt{3} = H \operatorname{tg} \varphi \sqrt{3}$,

$OM = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}H \operatorname{tg} \varphi$. Проведя $SM \perp AS$, из ΔSOM находим

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{H}{2} \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \varphi}. \text{ Следовательно,}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{3}{2}AB \cdot SM = \frac{3}{2}H \operatorname{tg} \varphi \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{H}{2} \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{3}{4}H^2 \operatorname{tg} \varphi \sqrt{3(4 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} \text{ и}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \sqrt{3}}{4}. \text{ Получаем в итоге уравнение}$$

$$\begin{aligned} \frac{3H^2 \operatorname{tg} \varphi \sqrt{3(4 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}}{4 \cdot \frac{3H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \sqrt{3}}{4}} &= n \Rightarrow \frac{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\operatorname{tg} \varphi} = n \Rightarrow \sqrt{4 \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1} = n \Rightarrow 4 \operatorname{ctg}^2 \varphi = n^2 - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{ctg} \varphi &= \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2}.$

6.167. Стороны оснований правильной n -угольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$), угол между плоскостями боковой грани и основания — α . Вычислить площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

Решение.

Расстояние H_a от центра правильного n -угольника со стороной a до любой его стороны равно, как легко посчитать,

$\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Пусть C' и C — соответственно середины ребер $A'B'$ и AB данной усеченной пирамиды (рис. 6.186), $C'D$ —

высота, опущенная из точки C' на нижнее основание пирамиды. Тогда в прямоугольном $\triangle C'DC$ $\angle DCC' = \alpha$, а

$$CD = H_a - H_b = \frac{1}{2}(a-b)\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \Rightarrow H = C'C = \frac{CD}{\cos \alpha} = \frac{(a-b)\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{2\cos \alpha}.$$

Таким образом, $S_{\text{бок}} = nH \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{n\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{4\cos \alpha} (a^2 - b^2)$. Окончательно получаем:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + n \cdot \frac{1}{2} a H_a + n \cdot \frac{1}{2} b H_b = \frac{n\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{4\cos \alpha} (a^2 - b^2) + \frac{n}{4} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} +$$

$$+ \frac{n}{4} b^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{n}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \left(\frac{a^2 - b^2}{\cos \alpha} + a^2 + b^2 \right).$$

$$\text{Ответ: } \frac{n}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \left(\frac{a^2 - b^2}{\cos \alpha} + a^2 + b^2 \right).$$

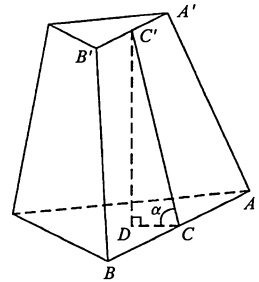


Рис. 6.186

6.168. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, в которой параллельные стороны равны a и b ($a > b$), а неравные отрезки диагоналей образуют угол α . Найти объем пирамиды, если высота пирамиды, опущенная из вершины, проходит через точку пересечения диагоналей основания, а двугранные углы, прилежащие к параллельным сторонам основания, относятся как 2:1.

Решение.

Пусть $AD = a$, $BC = b$ (рис. 6.187). Проведем отрезок NM , соединяющий середины оснований трапеции. Очевидно, что двугранный угол, прилежащий к AD , меньше угла, прилежащего к BC . Обозначим $\angle SNO = \varphi$, тогда $\angle SMO = 2\varphi$. Имеем: $SO = OM \cdot \operatorname{tg} 2\varphi = ON \cdot \operatorname{tg} \varphi$. В силу того что

$$OM = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad ON = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

мы приходим к уравнению $a \operatorname{tg} \varphi = b \operatorname{tg} 2\varphi$, откуда $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{a-2b}{a}}$ (это выражение показывает, что в случае $a \leq 2b$ задача теряет смысл). Далее, получаем: $SO = ON \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{a-2b}{a}}$;

$$SO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{a-2b}{a}};$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{a+b}{2} (ON + OM) = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{и, следовательно, объем пирамиды равен } V = \frac{(a+b)^2}{24} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{a(a-2b)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{(a+b)^2}{24} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{a(a-2b)}.$$

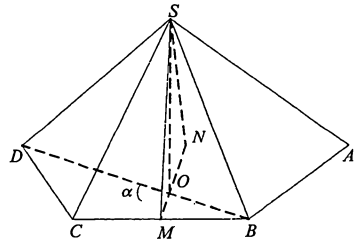


Рис. 6.187

6.169. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны a , а угол между ними равен 2α . Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны к основанию, а третья грань наклонена к нему под углом 2α . Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

Решение.

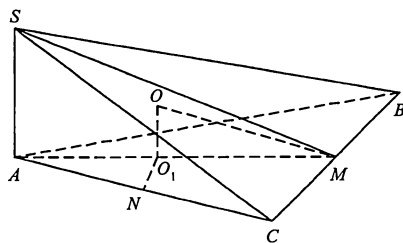


Рис. 6.188

Пусть O — центр шара, вписанного в пирамиду $SABC$ (рис. 6.188), у которой $AC = AB = a$, $SA \perp ABC$, AMS — бисекториальная плоскость двугранного угла (делящая двугранный угол пополам), образованного боковыми гранями ASC и ASB . По условию задачи, $\angle BAC = \angle AMS = 2\alpha$. Точка O принадлежит треугольнику AMS и OM — биссектриса угла AMS . Проекция точки O на плоскость основания (на рисунке — точка O_1) принадлежит биссектрисе AM угла CAB , а проекцией вписанного шара на плоскость основания является большой круг шара с центром в точке O_1 , касающийся сторон AB и AC ΔABC . Обозначим точку касания этого круга со стороной AC через N ; тогда $O_1N = OO_1 = R$, где R — радиус вписанного шара. Из прямоугольного треугольника OO_1M находим $O_1M = R \operatorname{ctg} \alpha$. Тогда $AO_1 = AM - O_1M = a \cos \alpha - R \operatorname{ctg} \alpha$. Из прямоугольного ΔAO_1N получаем уравнение $O_1N = R = AO_1 \sin \alpha = (a \cos \alpha - R \operatorname{ctg} \alpha) \sin \alpha$, решая которое относительно R , находим $R = \frac{a \sin 2\alpha}{2(1 + \cos \alpha)}$.

Ответ: $\frac{a \sin 2\alpha}{2(1 + \cos \alpha)}$.

6.170. Найти объем правильной пирамиды высотой H , если в основании ее лежит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна $\frac{\pi}{2}$, а отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k .

Решение.

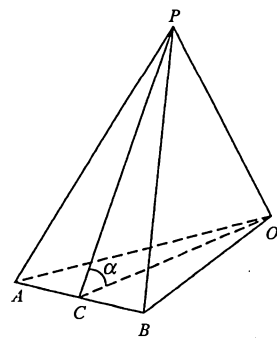


Рис. 6.189

Известно, что сумма внутренних углов многоугольника равна $\pi(m-2) = \frac{\pi n}{2}$,

откуда $2(m-2) = n$, т.е. $m = \frac{n}{2} + 2$. Обозначим (рис. 6.189) $\angle PCO$ через α (на рисунке изображена $\frac{1}{m}$ часть всей пирамиды). По условию $\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{осн}}} = k$. Отсюда име-

ем: $\frac{m \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PC}{m \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC} = k \Rightarrow \frac{PC}{OC} = k \Rightarrow \cos \alpha = \frac{OC}{PC} = \frac{1}{k}$. Найдем теперь площадь основания:

$$S_{\text{осн}} = m \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = m \cdot AC \cdot OC = m \cdot OC \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{m} \cdot OC = m \cdot OC^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{n+4};$$

$$\text{из треугольника } POC \text{ имеем: } OC = OP \cdot \operatorname{ctg} \alpha = H \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{H \cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{H}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Следовательно, $S_{\text{осн}} = \frac{mH^2}{k^2 - 1} \cdot \lg \frac{2\pi}{n+4}$ и объем пирамиды $V = \frac{(n+4)H^3}{6(k^2 - 1)} \lg \frac{2\pi}{n+4}$.

Ответ: $\frac{(n+4)H^3}{6(k^2 - 1)} \lg \frac{2\pi}{n+4}$.

6.171. Отношение поверхности шара, вписанного в конус, к площади основания равно n . Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения n .

Решение.

Пусть ABC — осевое сечение конуса (рис. 6.190), O' — центр его основания, BO' — высота, O — центр вписанного шара, $\angle BAO' = \varphi$ — угол между образующей конуса и плоскостью его основания. Обозначим через R и r соответственно радиус

вписанного шара и радиус основания конуса. Тогда $\angle OAO' = \frac{1}{2} \angle BAO' = \frac{\varphi}{2}$ и

$R = r \lg \frac{\varphi}{2}$. Поверхность шара $S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi r^2 \lg^2 \frac{\varphi}{2}$, а площадь основания конуса $S_2 = \pi r^2$. Тогда $\frac{S_1}{S_2} = 4 \lg^2 \frac{\varphi}{2} \Rightarrow 4 \lg^2 \frac{\varphi}{2} = n \Rightarrow \cos \varphi = \frac{4-n}{4+n}$. В силу того что

φ — острый угол, то $0 < \cos \varphi < 1$, поэтому $0 < \frac{4-n}{4+n} < 1 \Rightarrow 0 < n < 4$. Окончатель-

но получаем, что искомый угол $\varphi = \arccos \frac{4-n}{4+n}$.

Ответ: $\arccos \frac{4-n}{4+n}$ при $0 < n < 4$.

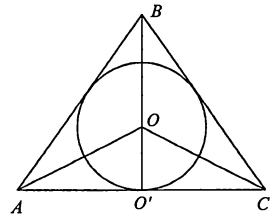


Рис. 6.190

6.172. В усеченный конус, образующая которого имеет длину l и составляет с основанием угол α , вписана сфера. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса, окружность основания которого совпадает с окружностью касания сферы и усеченного конуса, а вершина находится в центре сферы.

Решение.

В осевом сечении усеченного конуса (рис. 6.191) $CD = l$, $\angle CDF = \alpha$,

$OM = OB = R = \frac{CF}{2} = \frac{l \sin \alpha}{2}$. Так как треугольники AOB и CDF подобны, то

$$\frac{AO}{OB} = \frac{DF}{CF}, \quad AO = r \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{где } r = AB. \quad \text{Из } \triangle AOB \text{ находим}$$

$$OB^2 = AO^2 + AB^2 \Rightarrow \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{4} = r^2 + r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \Rightarrow r^2 = \frac{l^2 \sin^4 \alpha}{4} \Rightarrow r = \frac{l \sin^2 \alpha}{2}.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot AO = \frac{\pi l^3}{24} \sin^6 \alpha \operatorname{ctg} \alpha$ и $S = \pi \cdot OB \cdot AB = \frac{\pi l^2}{4} \sin^3 \alpha$.

Ответ: $\frac{\pi l^3}{24} \sin^6 \alpha \operatorname{ctg} \alpha, \frac{\pi l^2}{4} \sin^3 \alpha$.

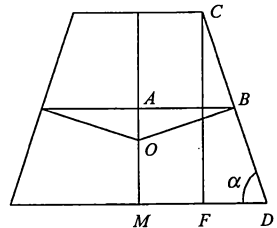


Рис. 6.191

6.173. Ребро куба равно a . Найти объем конуса, у которого вершина совпадает с вершиной A куба, а окружность основания проходит через центры граней куба, не содержащих вершину A .

Решение.

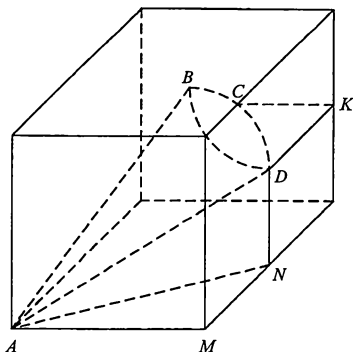


Рис. 6.192

Ответ: $\frac{\pi a^3}{9\sqrt{3}}$.

Легко увидеть, что центры B , C и D соответствующих граней находятся на равном расстоянии от точки A (рис. 6.192). Это расстояние

равно $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Кроме того, расстояние между каждой

парой точек B , C и D равно $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Таким образом, точки

B , C и D являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность основания конуса. Тогда очевидно, что радиус основания конуса $R = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Далее, образующая конуса $l = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, поэтому его высота

$H = \sqrt{l^2 - R^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Следовательно, объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi a^3}{9\sqrt{3}}$.

6.174. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AB = 3$, $BC = 4$. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы. Найти величину угла между прямыми BS и CS , если радиус сферы, описанной около пирамиды, равен 6,5.

Решение.

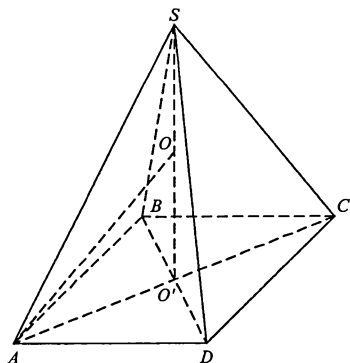


Рис. 6.193

В силу того что боковые ребра пирамиды $SABCD$ составляют с плоскостью основания равные углы (рис. 6.193), то ортогональная проекция O' вершины пирамиды S на плоскость основания $ABCD$ есть центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$. Сечение описанной сферы плоскостью основания пирамиды $ABCD$ есть окружность, описанная около прямоугольника $ABCD$. Следовательно, центр O описанной сферы принадлежит прямой SO' . Так как $\triangle ASC$ — равнобедренный ($\angle SAC = \angle SCA$) и сторона основания AC этого треугольника является диагональю прямоугольника $ABCD$, то

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$. Поскольку центр сферы O принадлежит плоскости ASC , то радиус R окружности, описанной около $\triangle ASC$, равен 6,5. Из прямоугольного $\triangle AOO'$ имеем:

$$|SO' - R|^2 = R^2 - \frac{AC^2}{4} \Rightarrow SO' = R \pm \sqrt{R^2 - \frac{AC^2}{4}} = 6,5 \pm 6. \text{ Возможны}$$

два случая:

1) если центр описанной сферы O принадлежит пирамиде $SABCD$, то перед корнем следует брать знак «плюс». Длина бокового ребра определяется из прямоугольного $\triangle ASO'$: $AS = \sqrt{SO'^2 + O'C^2} = \sqrt{162,5}$. Из $\triangle BSC$ по теореме косинусов находим: $\cos \angle BSC = \frac{BS^2 + CS^2 - BC^2}{2 \cdot BS \cdot CS} = \frac{309}{325} \Rightarrow \angle BSC = \arccos \frac{309}{325}$;

2) если центр сферы O не принадлежит пирамиде $SABCD$, то перед корнем следует брать знак «минус»; тогда $\angle BSC = \pi - \arccos \left(-\frac{3}{13} \right) = \arccos \frac{3}{13}$.

Ответ: $\arccos \frac{309}{325}$, $\arccos \frac{3}{13}$.

6.175. Через вершину правильной n -угольной пирамиды и через две вершины многоугольника, лежащего в основании, под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая основание на два многоугольника, имеющие соответственно $m+2$ вершины и m вершин $\left(m < \frac{n-2}{2} \right)$. Вычислить объем пирамиды, если общая сторона этих двух многоугольников равна a .

Решение.

Пусть плоскость, пересекающая основание пирамиды на два многоугольника, есть AMB (рис. 6.194). Многоугольник ABD имеет $m+2$ вершины, а $ABGFE$ имеет $n-m$ вершин. Искомый объем

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} n \cdot \frac{1}{2} OB^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot OM = \frac{n}{6} \left(\frac{CB}{\sin \angle COB} \right)^2 \sin \frac{2\pi}{n} \cdot OC \cdot \operatorname{tg} \varphi = \\ &= \frac{n}{6} \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\pi(m+1)}{n}} \right)^2 \cdot OC \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{n}{6} \cdot \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi(m+1)}{n}} \times \\ &\times \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi(m+1)}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{na^3 \cos \frac{\pi(m+1)}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \operatorname{tg} \varphi}{48 \sin^3 \frac{\pi(m+1)}{n}}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{na^3 \cos \frac{\pi(m+1)}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \operatorname{tg} \varphi}{48 \sin^3 \frac{\pi(m+1)}{n}}$.

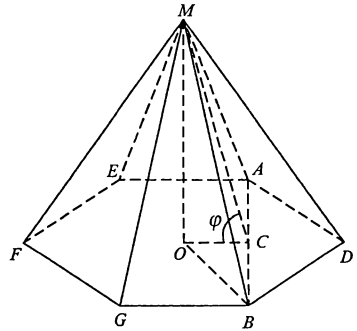


Рис. 6.194

6.176. Сфера, центр которой находится в вершине конуса, касается его основания. Найти угол при вершине в осевом сечении конуса, если сфера делит конус на части равных объемов.

Решение.

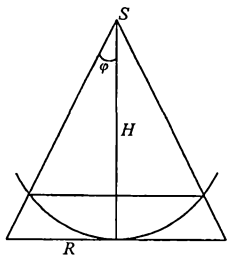


Рис. 6.195

Ответ: $\arccos \frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

Пусть r — радиус сферы, 2φ — угол при вершине конуса (рис. 6.195). Тогда $R = r \operatorname{tg} \varphi$, следовательно, $V_k = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^2 \varphi$. $H = R(1 - \cos \varphi)$, поэтому $V_c = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos \varphi)$. Та-

ким образом, $\frac{V_k}{V_c} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \varphi = 4(1 - \cos \varphi)$. Воспользовавшись заменой

$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$, получаем: $4 \cos^2 \varphi - \cos \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$. Так как $0 < \varphi < 90^\circ$,

то необходимо $\cos \varphi > 0$. Окончательно запишем: $\varphi = \arccos \frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

6.177. Отношение объема шара, вписанного в конус, к объему описанного шара равно p . Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания. При каких значениях p задача имеет смысл?

Решение.

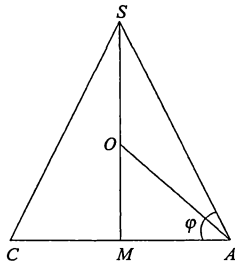


Рис. 6.196

Пусть треугольник ASC — осевое сечение конуса, M — центр его основания, O — центр вписанного шара (рис. 6.196), $\angle SAM = \varphi$ — искомый угол между образующей SA конуса и плоскостью основания. Обозначим через r и R радиусы вписанного и описанного шаров соответственно.

В $\triangle AMO$ $MA = MO \operatorname{ctg} \angle OAM = r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$; $AC = 2r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$. Далее, радиус круга, описанного около треугольника ASC , равен

$R = \frac{AC}{2 \sin \angle ASC} = \frac{2r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{2 \sin(\pi - 2\varphi)} = \frac{r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sin 2\varphi}$. В силу того что объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов, мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{r^3}{R^3} = p &\Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt[3]{p} \Rightarrow \frac{r \sin 2\varphi}{r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \sqrt[3]{p} \Rightarrow \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \sqrt[3]{p} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \varphi = \sqrt[3]{p} \Rightarrow 2(1 - \cos \varphi) \cos \varphi = \sqrt[3]{p} \Rightarrow 2 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + \sqrt[3]{p} = 0; \end{aligned}$$

отсюда $\cos \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt[3]{p}}}{2} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt[3]{p}}}{2}$. Так как $p > 0$ и $1 - 2\sqrt[3]{p} \geq 0$, то $0 < p \leq \frac{1}{8}$.

Ответ: $\arccos \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt[3]{p}}}{2}$, $0 < p \leq \frac{1}{8}$.

6.178. На боковых гранях правильной четырехугольной пирамиды как на основаниях построены правильные тетраэдры. Найти расстояние между наружными вершинами двух смежных тетраэдров, если сторона основания пирамиды равна b .

Решение.

Легко видеть, что наружные вершины тетраэдров лежат в вершинах некоторого квадрата. Чтобы определить длину его стороны, проведем через вершину S пирамиды и через наружную вершину A одного из тетраэдров плоскость SMA , перпендикулярную к основанию четырехугольной пирамиды (рис. 6.197). Эта плоскость пройдет через основание O высоты пирамиды, через основание Q высоты тетраэдра и через середину M ребра KL . Опустив на плоскость основания пирамиды перпендикуляр AB , рассмотрим четырехугольник $SOBA$. Его сторона OB является половиной диагонали упомянутого квадрата и подлежит определению. Легко заметить, что $SOBA$ — прямоугольник. Действительно, пусть $\angle OMS = \alpha$ и $\angle ASM = \beta$, тогда

$$\cos \alpha = \frac{OM}{MS} = \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{\sqrt{3}}{2}b} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{и} \quad \cos \beta = \frac{QS}{SA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}b}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \text{поэтому } SA \parallel OB$$

и, следовательно, $OB = SA = b$. Таким образом, искомое расстояние равно $b\sqrt{2}$.

Ответ: $b\sqrt{2}$.

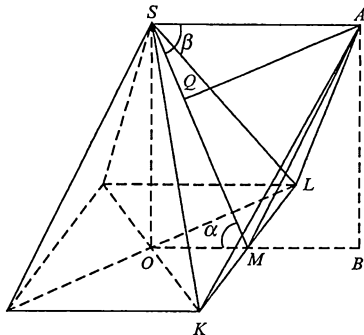


Рис. 6.197

6.179. Две правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту; вершина каждой пирамиды лежит в центре основания другой; боковые ребра одной пересекают боковые ребра другой. Боковое ребро l первой пирамиды образует с высотой угол φ , боковое ребро второй — образует с высотой угол ψ . Найти объем общей части обеих пирамид.

Решение.

Искомый объем V состоит из объемов двух пирамид, имеющих в основаниях треугольник DEC и высоты AF и FB (рис. 6.198). Обозначим площадь треугольника CED через S ; тогда

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot AF + \frac{1}{3} \cdot S \cdot FB = \frac{1}{3} \cdot S \cdot AB, \quad \text{где } AB = AM \cos \varphi = l \cos \varphi.$$

Для того чтобы вычислить площадь S правильного треугольника, найдем радиус CF описанного около него круга:

$$AB = l \cos \varphi = AF + FB = CF \operatorname{ctg} \varphi + CF \operatorname{ctg} \psi = CF(\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) =$$

$$= CF \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \varphi \sin \psi} \Rightarrow CF = \frac{l \cos \varphi \sin \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot CD^2 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{2} \cdot AB = \frac{1}{3} (CF \sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} CF^2 \cdot AB = \frac{\sqrt{3} l^3 \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \sin^2 \psi}{4 \sin^2(\varphi + \psi)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3} l^3 \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \sin^2 \psi}{4 \sin^2(\varphi + \psi)}.$$

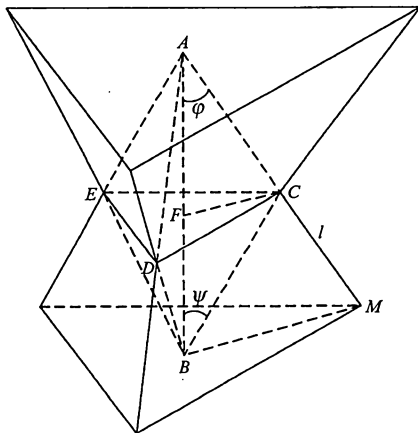


Рис. 6.198

Таким образом, полная поверхность призмы будет равна $S = \frac{1}{2}nx^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + nx^2 = n \left(\frac{2l \sin \alpha \sin \frac{\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n} + \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right)$.

$$\text{Ответ: } n \left(\frac{2l \sin \alpha \sin \frac{\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n} + \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right).$$

6.182. Два куба с ребром a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных граней, но один куб повернут на 45° по отношению к другому. Вычислить объем общей части этих кубов, а также объем тела, представляющего собой совокупность этих двух кубов.

Решение.

Очевидно, что после построений получается правильная восьмиугольная призма, высота которой равна a . В основании этой призмы лежит правильный восьмиугольник (рис. 6.201). Мы имеем: $BC = CE = CD\sqrt{2}$; $AB = CD$, следовательно,

но, $AD = a = CD + CD\sqrt{2} + CD = CD(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow CD = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$. Треугольник DCE

есть половина квадрата со стороной CD , поэтому его площадь равна $\frac{1}{2} \frac{a^2}{(2 + \sqrt{2})^2}$.

Далее, площадь восьмиугольника, лежащего в основании призмы, равна площади квадрата со стороной a за вычетом площадей четырех таких треугольников,

т.е. $a^2 - \frac{2a^2}{(2 + \sqrt{2})^2}$ или $2a^2(\sqrt{2} - 1)$. Следовательно, объем призмы равен

$$2a^3(\sqrt{2} - 1).$$

Совокупность обоих кубов представляет невыпуклую 16-гранную призму, получаемую из куба, если на каждую из его граней положить узенькую треугольную призму. Объем этого тела равен удвоенному объему куба минус объем общей части (так как при удвоении объема куба эта общая часть будет считаться дважды), т.е. $2a^3 - 2a^3(\sqrt{2} - 1) = 2a^3(2 - \sqrt{2})$.

$$\text{Ответ: } 2a^3(\sqrt{2} - 1), 2a^3(2 - \sqrt{2}).$$

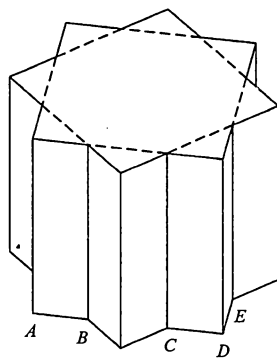


Рис. 6.201

6.183. Около конуса описана треугольная пирамида, причем линиями касания боковая поверхность конуса делится на три части, относящиеся между собой как 5:6:7. Определить отношение между частями боковой поверхности пирамиды, ограниченными линиями касания.

Решение.

Обозначим радиус круга через r , а образующую — через l (рис. 6.202). Тогда вся боковая поверхность разделится

образующими MK , ML и MN на части $\frac{5}{18}\pi rl$, $\frac{6}{18}\pi rl$ и $\frac{7}{18}\pi rl$. Отсюда получаем, что $\frac{KL}{L} = \frac{10}{18}\pi r$, $\frac{LN}{L} = \frac{12}{18}\pi r$.

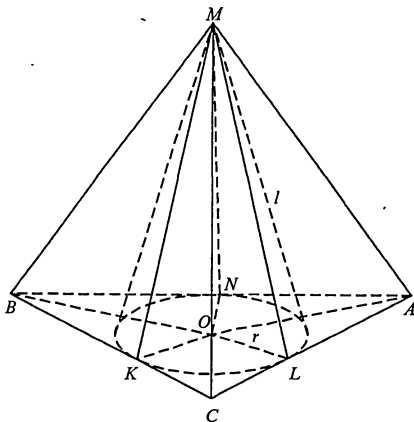


Рис. 6.202

$$\overset{\circ}{NK} = \frac{14}{18}\pi r; \text{ следовательно, } \overset{\circ}{KL} : \overset{\circ}{LN} : \overset{\circ}{NK} = 5:6:7 \text{ и}$$

$\angle KOL = 100^\circ, \angle LON = 120^\circ, \angle NOK = 140^\circ$. Обозначим через S_1, S_2 и S_3 части площадей боковой поверхности пирамиды, на которые ее делят образующие MK, ML, MN . Тогда $S_1 = 2S_{MCL} = CL \cdot l = OL \times \operatorname{tg} \angle LOC \cdot l = \operatorname{rtg} 50^\circ$. Аналогично, $S_2 = \operatorname{rtg} 60^\circ, S_3 = \operatorname{rtg} 70^\circ$. Таким образом, $S_1 : S_2 : S_3 = \operatorname{rtg} 50^\circ : \operatorname{rtg} 60^\circ : \operatorname{rtg} 70^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ : \operatorname{tg} 60^\circ : \operatorname{tg} 70^\circ$.

Omsvar: $\text{tg}50^\circ:\text{tg}60^\circ:\text{tg}70^\circ$.

6.184. Найти высоту правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что объем шара, описанного около пирамиды, равен V , а перпендикуляр, опущенный из центра шара на ее боковую грань, образует с высотой пирамиды угол φ .

Решение.

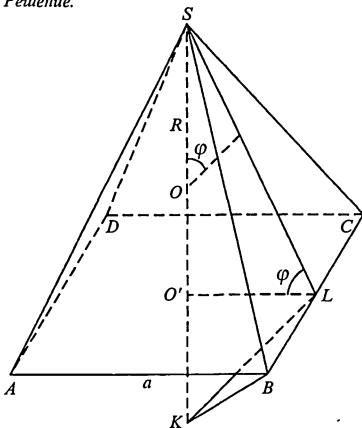


Рис. 6.203

Пусть a — сторона основания пирамиды $SABCD$, H — высота пирамиды, R — радиус шара, описанного около пирамиды (рис. 6.203). Тогда

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}. \text{ Если } SK \text{ — диаметр описанного шара, то из}$$

прямоугольного треугольника SBK следует: $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = H(2R - H)$. Так

как из $\triangle LO'S$ имеем $\frac{a}{2} = H \operatorname{ctg} \varphi$, то, исключая a , находим искомую вы-

соту пирамиды: $H = \frac{2R}{2\operatorname{ctg}^2\varphi + 1} = \frac{1}{1 + 2\operatorname{ctg}^2\varphi} \left(\frac{6V}{\pi} \right)^{1/3}$.

Ответ: $\frac{1}{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi} \left(\frac{6V}{\pi} \right)^{1/3}$.

6.185. В шар радиусом R вписана правильная треугольная пирамида так, что плоскость основания пирамиды делит перпендикулярный ей радиус шара в отношении 3:7, считая от центра шара. Вычислить объем конуса, вписанного в пирамиду.

Решение.

Пусть произвольная треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу радиусом R с центром в точке O . При этом вершины пирамиды принадлежат сфере, а высота пирамиды SO' , где O' — центр равностороннего треугольника ABC , принадлежит диаметру данного шара. Заметим, что рассматриваемая фигура имеет плоскость симметрии SAS' , где

S' — пересечение SO' со сферой. Имеем: $OS = OA = R$. По условию задачи $OO' = \frac{3}{10}R$, $S'O' = \frac{7}{10}R$. Из подобных

треугольников $AS'O'$ и ASO' находим: $AO'^2 = S'O' \cdot SO' = \frac{13}{10}R \cdot \frac{7}{10}R = \frac{91}{100}R^2$. Далее, длина отрезка $O'A$ является радиусом описанного около треугольника ABC круга; следовательно, радиус r вписанного круга может быть най-

ден по формуле $r = \frac{AO'}{2}$. Находим объем V_1 конуса, вписанного в пирамиду: $V_1 = \frac{\pi r^2}{3} \cdot SO' = \frac{1183\pi R^3}{12000}$.

Заметим, что условиям задачи удовлетворяет и пирамида с вершиной в точке S' . В этом случае объем V_2 конуса

равен $\frac{637\pi R^3}{12000}$.

Ответ: $\frac{1183\pi R^3}{12000}$, $\frac{637\pi R^3}{12000}$.

6.186. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, имеет длину h и составляет с одним из катетов угол φ . Найти объем призмы.

Решение.

Имеем

$$V = S \cdot H = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{DB}{\sin \varphi} \cdot \frac{DB}{\cos \varphi} \cdot EF = \frac{h^2 \cdot EF}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{h^2}{\sin 2\varphi} \cdot EF$$

(рис. 6.204). Осталось найти высоту EF . Она равна диаметру шара KL или, другими словами, — диаметру вписанного в треугольник ABC круга.

Диаметр можно определить по формуле $2r = \frac{2S}{p}$. Для этого определим AC :

$$AC = \frac{AB}{\cos \varphi} = \frac{DB}{\cos \varphi \sin \varphi} = \frac{h}{\cos \varphi \sin \varphi};$$

$$2p = AB + BC + AC = \frac{h}{\cos \varphi} + \frac{h}{\sin \varphi} + \frac{h}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi + \cos \varphi + 1}{\sin \varphi \cos \varphi} h =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi} \cdot \frac{h}{\sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi} \cdot \frac{h\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi}.$$

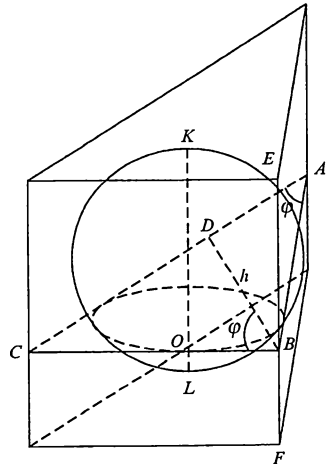


Рис. 6.204

$$\text{и } EF = 2r = \frac{2S}{P} = \frac{2h^2 \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi}{\sin 2\varphi \cdot h\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}h \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi}{4 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}h}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

$$\text{Таким образом, искомый объем } V = \frac{h^2}{\sin 2\varphi} \cdot EF = \frac{\sqrt{2}h^3}{2 \sin 2\varphi \cos \frac{\varphi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}h^3}{2 \sin 2\varphi \cos \frac{\varphi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

6.187. Две правильные n -угольные пирамиды с одинаковыми основаниями сложены этими основаниями. Найти радиус шара, вписанного в получившийся многогранник, если сторона общего основания пирамид равна a , а высоты пирамид равны h и H .

Решение.

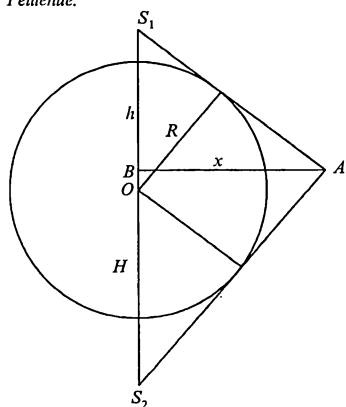


Рис. 6.205

Рассмотрим плоскость, проходящую через вершины S_1 и S_2 пирамид и середину A одной из сторон основания (рис. 6.205). Радиус полуокружности, вписанного в $\triangle AS_1S_2$ так, что его диаметр лежит на S_1S_2 , равен радиусу вписанного шара. Пусть O — центр полуокружности. Обозначим через x высоту в треугольнике AS_1S_2 , опущенную на сторону S_1S_2 . Так

как x есть апофема правильного n -угольника, то $x = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Для нахождения радиуса шара R , подсчитаем двумя способами площадь S

$\triangle AS_1S_2$. С одной стороны $S = \frac{x}{2}(h+H)$, с другой стороны,

$$S = \frac{R}{2} S_1A + \frac{R}{2} S_2A = \frac{R}{2} (\sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{H^2 + x^2}). \text{ В итоге получаем, что}$$

$$\text{искомый радиус } R = \frac{\frac{1}{2}a(H+h)\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}} + \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\frac{1}{2}a(H+h)\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}} + \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

6.188. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно b , а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 2φ . Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.

Пусть MO — высота правильной пирамиды $MABCD$, N — середина BC (рис. 6.206). Тогда $\angle MNO = 2\varphi$, центр O' вписанного шара принадлежит отрезку MO , $\angle ONO' = \angle MNO' = \varphi$; $\angle MO'N$ — внешний угол $\triangle O'ON$,

поэтому $\angle MO'N = \angle O'ON + \angle ONO' = \frac{\pi}{2} + \varphi$. В треугольнике $MO'N$ по теореме синусов находим:

$$\frac{MO'}{\sin \angle MNO'} = \frac{MN}{\sin \angle MO'N} \Rightarrow MN = \frac{MO' \sin \angle MO'N}{\sin \angle MNO'} =$$

$$= \frac{b \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)}{\sin \varphi} = b \operatorname{ctg} \varphi. \text{ В треугольнике } MON (\angle MON = 90^\circ):$$

$ON = MN \cos \angle MNO = b \operatorname{ctg} \varphi \cos 2\varphi$. Сторона основания пирамиды $AB = 2 \cdot ON = 2b \operatorname{ctg} \varphi \cos 2\varphi$, площадь ее основания $S_{\text{осн}} = AB^2 = 4b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos^2 2\varphi$.

Таким образом, полная поверхность пирамиды

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = S + \frac{S_{\text{осн}}}{\cos 2\varphi} = S_{\text{осн}} \cdot \frac{\cos 2\varphi + 1}{\cos 2\varphi} =$$

$$= 4b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos^2 2\varphi \cdot \frac{2 \cos^2 \varphi}{\cos 2\varphi} = 8b^2 \cos 2\varphi \cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Ответ: $8b^2 \cos 2\varphi \cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \varphi$.

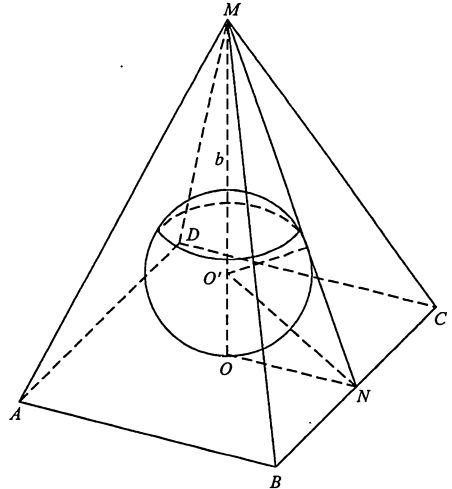


Рис. 6.206

6.189. Два одинаковых правильных тетраэдра с ребром a имеют общую высоту, но вершина одного из них лежит в центре основания другого, и наоборот. Стороны треугольников их оснований расположены параллельно. Найти объем общей части этих тетраэдров.

Решение.

Общая часть есть шестигранник, который представляет собой два одинаковых сложенных вместе основаниями правильных тетраэдра (рис. 6.207), линейные размеры которых вдвое меньше, чем у заданных. Ребра их, следовательно, равны $\frac{a}{2}$; объем каждого из них

равен, следовательно (см. решение задачи 6.202), $\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$, т.е.

объем всей общей части равен $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{48}$.

Ответ: $a^3 \frac{\sqrt{2}}{48}$.

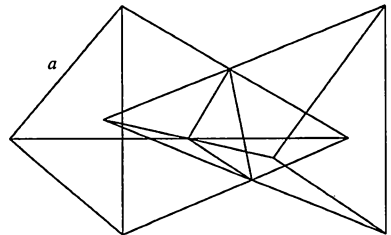


Рис. 6.207

6.190. В прямой круговой конус, угол при вершине осевого сечения которого равен 2α , вписан шар радиусом R и проведена затем плоскость, заключающая окружность касания поверхности конуса с поверхностью шара. Найти объем получившегося усеченного конуса.

Решение.

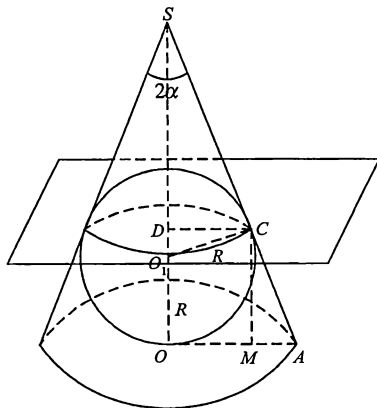


Рис. 6.208

Пусть SO — высота конуса (рис. 6.208). Она проходит через центр шара O_1 и центр основания конуса O . Опустим перпендикуляр CD из точки касания C шара с образующей AS на высоту SO и центр шара O_1 соединим с точкой C . Получившийся при этом $\angle DCO_1 = \angle ASO = \alpha$ (так как стороны перпендикулярные). Опустим из точки C перпендикуляр CM на плоскость основания конуса. Получившийся при этом $\angle ACM = \angle ASO = \alpha$. Искомый объем

$V = \frac{1}{3} \pi (CD^2 + CD \cdot OA + OA^2) \cdot DO$. Определим входящие сюда неизвестные величины: $CD = O_1C \cdot \cos \angle DCO_1 = R \cos \alpha$, $DO = DO_1 + O_1O = O_1C \cdot \sin \angle DCO_1 + R = R \sin \alpha + R = R(1 + \sin \alpha)$, $OA = AC = \frac{CM}{\cos \angle ACM} = \frac{DO}{\cos \alpha} = \frac{R(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}$. Подставляя найденные значения в выражение для объема, получаем:

$$V = \frac{\pi}{3} \left((R \cos \alpha)^2 + R \cos \alpha \cdot \frac{R(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} + \frac{R^2(1 + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} \right) R(1 + \sin \alpha) =$$

$$= \frac{\pi R^3(1 + \sin \alpha)}{3} \left(1 - \sin^2 \alpha + 1 + \sin \alpha + \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{1 - \sin \alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^3 (1 + \sin \alpha)^2 \left(1 - \sin \alpha + 1 + \frac{1}{1 - \sin \alpha} \right) = \frac{1}{3} \pi R^3 (1 + \sin \alpha)^2 \cdot \frac{3 - 3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\cos^4 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot (3 - 3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha).$$

Ответ: $\frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\cos^4 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot (3 - 3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha).$

6.191. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SA , SC и SB попарно перпендикулярны, $AB = BC = a$, $BS = b$. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

Решение.

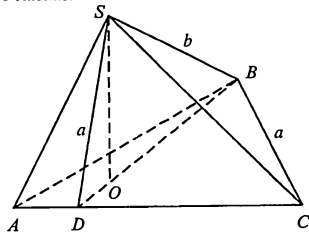


Рис. 6.209

Радиус вписанного шара R мы будем искать по формуле (см. решение

задачи 6.203) $R = \frac{3V}{S}$, где V — объем пирамиды, S — ее полная поверхность. Найдем сначала объем пирамиды. Заметим, что прямоугольные треугольники BSC и BSA (рис. 6.209) равны по гипотенузе и общему катету. В силу этого прямоугольный треугольник ASC является равно-

бедренным. Так как $AS = CS = \sqrt{a^2 - b^2}$, то, следовательно,

$$V = \frac{1}{3} BS \cdot S_{\triangle ASC} = \frac{1}{3} b \cdot \frac{a^2 - b^2}{2}. \text{ Очевидно также, что } AD = \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$; значит, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^4 - b^4}$. В итоге после сокращения получаем, что искомый

$$\text{радиус } R = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

6.192. Найти радиус вписанного в треугольную пирамиду шара, если все ее углы при вершине прямые, а боковые ребра равны a, b, c .

Решение.

Известно, что радиус вписанного шара r равен утроенному отношению объема пирамиды V к ее полной поверхности S : $r = 3 \frac{V}{S}$. Объем пирамиды

$V = \frac{1}{6} abc$. Пусть $x = \sqrt{b^2 + c^2}$, $y = \sqrt{a^2 + c^2}$, $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 2.210). Тогда

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} ab, \quad S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} bc, \quad S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} ac. \quad \text{Площадь } \triangle ABC \text{ вычислим по}$$

формуле $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} xy \sin \angle ACB$. Так как $\cos \angle ACB = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} = \frac{c^2}{xy}$, то

$$\sin \angle ACB = \frac{\sqrt{x^2 y^2 - c^4}}{xy}. \quad \text{Таким образом, } \sin \angle ACB = \frac{1}{xy} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \text{ и, следо-}$$

$$\text{вательно, } r = 3 \frac{V}{S} = \frac{abc}{ab + bc + ac + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{abc}{ab + bc + ac + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}}.$$

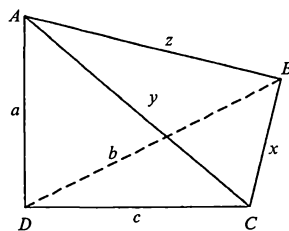


Рис. 6.210

6.193. Боковые грани пирамиды, основанием которой служит равнобедренная трапеция с высотой H , одинаково наклонены к плоскости основания. Из вершины пирамиды опущены перпендикуляры на боковые стороны трапеции, и основания их соединены. В полученном треугольном сечении угол при вершине равен 2φ , а площадь сечения равна Q . Найти объем пирамиды.

Решение.

Так как грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то в основание можно вписать окружность и вершина S пирамиды проектируется в центр O этой окружности (рис. 6.211). Искомый объем $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO$.

Определим высоту $SO = \sqrt{KS^2 - KO^2}$. Из рисунка основания $ABCD$ видно, что $H = BN = 2 \cdot KO$. Следовательно-

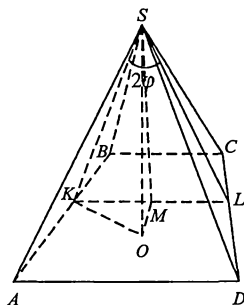


Рис. 6.211

подобия треугольников ABN и KMO имеем: $\frac{AB}{BN} = \frac{KO}{KM}$. Но $BN = H$, $KO = \frac{1}{2}H$, поэтому $AB = BN \cdot \frac{KO}{KM} = \frac{H^2}{2 \cdot KM}$.

Из $\triangle KSM$ находим сторону $KM = KS \cdot \sin \varphi = \sqrt{\frac{2Q}{\sin 2\varphi}} \cdot \sin \varphi = \sqrt{\frac{2Q \sin^2 \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi}} = \sqrt{Q \tan \varphi}$. Тогда $AB = \frac{H^2}{2\sqrt{Q \tan \varphi}}$ и

$$S_{ABCD} = \frac{H^3}{2\sqrt{Q \tan \varphi}}.$$

Таким образом, искомый объем $V = \frac{H^3}{6\sqrt{Q \tan \varphi}} \cdot \sqrt{\frac{2Q}{\sin 2\varphi}} \cdot \frac{H^2}{4} = \frac{H^3}{12\sqrt{2Q \sin \varphi}} \sqrt{8Q - H^2 \sin 2\varphi}$.

$$\text{Ответ: } \frac{H^3}{12\sqrt{2Q \sin \varphi}} \sqrt{8Q - H^2 \sin 2\varphi}.$$

6.194. Определить радиусы двух шаров, которые, пересекаясь, образуют двояковыпуклую линзу, если толщина линзы $2d$, полная ее поверхность Q и диаметр $2r$.

Решение.

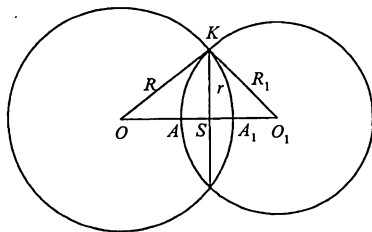


Рис. 6.212

Обозначим через R и R_1 радиусы шаров и рассмотрим сечение шаров плоскостью, проходящей через их центры O и O_1 . Пусть $AA_1 = 2d$, $KS = r$ и $AS = a$ (рис. 6.212); тогда $A_1S = 2d - a$. Полная поверхность линзы равна

$$2adR_1 + (2d - a)2dR = Q. \quad (1)$$

Из треугольника OKS имеем $r^2 = R^2 + (R - (2d - a))^2$ или $R^2 - 2R(2d - a) + (2d - a)^2 = 0$.

Аналогично из треугольника O_1KS имеем $R_1^2 = r^2 + (R_1 - a)^2$ или $r^2 - 2R_1a + a^2 = 0$.

$$\text{Из (2) и (3) находим: } R = \frac{r^2 + (2d - a)^2}{2(2d - a)}, \quad R_1 = \frac{r^2 + a^2}{2a}. \quad (4)$$

Подставив выражение (4) в равенство (1), получим уравнение

но, $KO = \frac{1}{2}H$. Определим теперь KS из $\triangle SKL$.

$$\text{Площадь его } Q = \frac{1}{2}SK^2 \cdot \sin 2\varphi \Rightarrow SK = \sqrt{\frac{2Q}{\sin 2\varphi}}.$$

Таким образом, найдена высота

$$SO = \sqrt{\frac{2Q}{\sin 2\varphi} - \frac{1}{4}H^2}. \text{ Сейчас найдем площадь}$$

основания $ABCD$: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BN$.

По свойству описанного четырехугольника $AD + BC = AB + CD = 2AB$ (так как трапеция равнобедренная и $AB = CD$). Отсюда $S_{ABCD} = AB \cdot BN = AB \cdot H$. Остается определить AB . Из

$\pi(r^2 + a^2) + \pi(r^2 + (2d - a)^2) = Q \Rightarrow a^2 - 2da + r^2 + 2d^2 - \frac{Q}{2\pi} = 0 \Rightarrow a = d + \sqrt{\frac{Q}{2\pi} - r^2 - d^2}$. Подставив значение a в формулу (4), после упрощения получим:

$$R = \frac{\frac{Q}{4\pi} - d\sqrt{\frac{Q}{2\pi} - r^2 - d^2}}{d - \sqrt{\frac{Q}{2\pi} - r^2 - d^2}}, \quad R_1 = \frac{\frac{Q}{4\pi} + d\sqrt{\frac{Q}{2\pi} - r^2 - d^2}}{d + \sqrt{\frac{Q}{2\pi} - r^2 - d^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\frac{Q}{4\pi} - d\sqrt{\frac{Q}{2\pi} - r^2 - d^2}}{d - \sqrt{\frac{Q}{2\pi} - r^2 - d^2}}, \quad \frac{\frac{Q}{4\pi} + d\sqrt{\frac{Q}{2\pi} - r^2 - d^2}}{d + \sqrt{\frac{Q}{2\pi} - r^2 - d^2}}.$$

6.195. Из всех правильных треугольных призм, имеющих объем V , найти призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

Решение.

Пусть x — основание призмы, l — боковое ребро; тогда $V = l \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow l = \frac{4V}{\sqrt{3}x^2}$. Найдем сумму длин всех ребер при-

змы: $F = 3l + 6x = 6x + \frac{4\sqrt{3}V}{x^2}$. Таким образом, имеем функцию $F(x) = 6x + \frac{4\sqrt{3}V}{x^2}$, где $x \in (0; \infty)$, наименьшее значение которой на указанном промежутке требуется найти.

Критические точки функции $F(x)$: $F'(x) = 6 - \frac{8\sqrt{3}V}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}$. На промежутке $\left(0; \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}\right)$ $F'(x) < 0$ ($F(x)$ убыва-

ет), на промежутке $\left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}; \infty\right)$ $F'(x) > 0$ ($F(x)$ возрастает). Следовательно, при $x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}$ функция $F(x)$ имеет минимум, совпадающий с ее наименьшим значением на рассматриваемом промежутке $(0; \infty)$.

$$\text{Ответ: } \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}.$$

6.196. В правильной n -угольной пирамиде сторона основания равна $2a$, двугранный угол при боковом ребре равен 2φ . Определить объем пирамиды.

Решение.

Изобразим часть n -угольной пирамиды (рис. 6.213). $\angle ACB = 2\varphi$ — двугранный угол при боковом ребре. Найдем площадь основания: $S_{\text{осн}} = n \cdot S_{\Delta OBF} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot BF \cdot OK = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = n \cdot a^2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Определим высоту пирамиды

довательно, $\sin \alpha' = \sin(\alpha - \alpha') \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} = (\sin \alpha \cos \alpha' - \cos \alpha \sin \alpha') \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma$. В итоге, разделив на $\cos \alpha'$ обе части последнего

равенства, получаем: $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma}$. Поменяв местами β и γ , находим: $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta}$.

Таким образом, в итоге получаем:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{cosec} \gamma}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{cosec} \beta}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta} \left(\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \right) \Rightarrow \psi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{cosec} \gamma}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma} \text{ и } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{cosec} \beta}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{cosec} \gamma}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma}, \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{cosec} \beta}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta}.$

6.198. В сферу радиусом r вписан конус, осевое сечение которого является прямоугольным треугольником. В конус вписана вторая сфера, а в эту сферу — параллелепипед, стороны которого относятся между собой как 2:3:4. Найти поверхность параллелепипеда.

Решение.

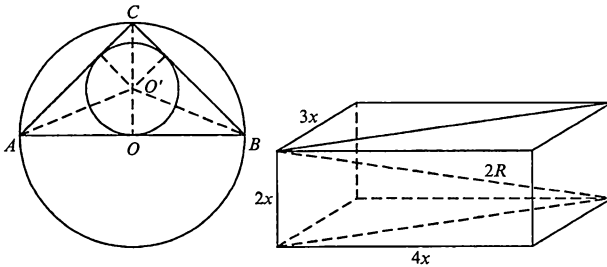


Рис. 6.215

Пусть ABC — прямоугольный треугольник, являющийся осевым сечением конуса (рис. 6.215). Если $AO = r$ — радиус описанной вокруг конуса сферы, а $OO' = R$ — радиус вписанной в него сферы, то $AC + BC = r + R$; поэтому

$$2(r + R)^2 = 4r^2, \text{ откуда } R = (\sqrt{2} - 1)r. \text{ Если стороны параллелепипеда равны } 2x, 3x \text{ и } 4x, \text{ то } (2x)^2 + (3x)^2 + (4x)^2 = 4R^2 =$$

$$= 4(3 - 2\sqrt{2})r^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4(3 - 2\sqrt{2})r^2}{29}. \text{ Таким образом, искомая поверхность параллелепипеда } S \text{ будет:}$$

$$S = 2(2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4)x^2 = \frac{208(3 - 2\sqrt{2})r^2}{29}.$$

Ответ: $\frac{208(3 - 2\sqrt{2})r^2}{29}.$

6.199. В конус помещена пирамида; основание пирамиды вписано в основание конуса, а вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса, все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом $\varphi \geq 60^\circ$ при вершине. Найти отношение объемов конуса и пирамиды.

Решение.

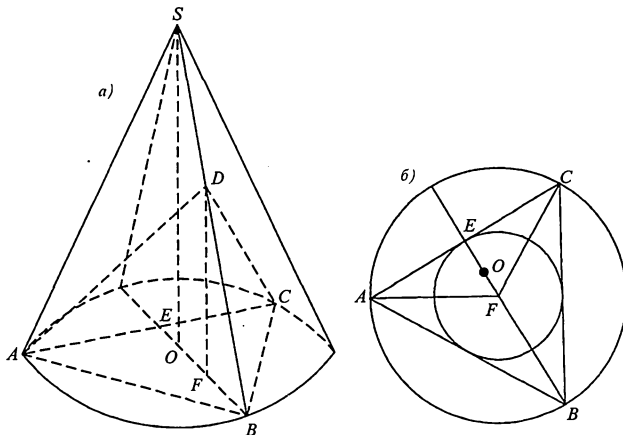


Рис. 6.216

Пусть SO — высота данного конуса, центр O основания конуса — центр круга, описанного около основания ABC пирамиды $DABC$ (рис. 6.216, а), $AB = BC$, $\angle ABC = \varphi$.

Если DF — высота пирамиды, то F — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$ (так как все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания). В $\triangle ABC$ $AB = BC$, поэтому O и F принадлежат прямой BE , где E — середина AC . Далее, прямые SO и DF параллельны, так как они перпендикулярны к плоскости основания конуса и пирамиды соответственно.

Треугольники SOB и DFB подобны, поэтому $\frac{SO}{DF} = \frac{OB}{BF}$. Пусть радиус основания конуса $OB = r$. Тогда

$$AB = BC = 2r \sin \angle BAC = 2r \sin \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = 2r \cos \frac{\varphi}{2}. \text{ Площадь треугольника } ABC$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi = 2r^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi.$$

$$\text{В } \triangle BCF \text{ (рис. 6.216, б): } \angle CBF = \frac{\varphi}{2}, \angle BCF = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{180^\circ - \varphi}{4}, \angle BFC = 180^\circ - (\angle CBF + \angle BCF) = 180^\circ - \frac{180^\circ + \varphi}{4}. \text{ По}$$

$$\text{теореме синусов: } \frac{BF}{\sin \angle BCF} = \frac{BC}{\sin \angle BFC} \Rightarrow BF = \frac{BC \sin \angle BCF}{\sin \angle BFC} =$$

$$= \frac{2r \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{180^\circ - \varphi}{4}}{\sin \left(180^\circ - \frac{180^\circ + \varphi}{4} \right)} = \frac{2r \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{180^\circ - \varphi}{4}}{\sin \frac{180^\circ + \varphi}{4}} = \frac{2r \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{180^\circ + \varphi}{4}}{\sin \frac{180^\circ + \varphi}{4}} = 2r \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ + \varphi}{4}.$$

Тогда объем конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot SO$ и объем пирамиды $V_2 = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot DF$; следовательно,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r^2 \cdot SO}{S_{\Delta ABC} \cdot DF} = \frac{\pi r^2 \cdot OB}{2r^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \cdot BF} = \frac{\pi r^3}{4r^3 \cos^3 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ + \varphi}{4} \sin \varphi} = \frac{\pi \operatorname{tg} \frac{180^\circ + \varphi}{4}}{4 \cos^3 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi}.$$

Ответ: $\frac{\pi \operatorname{tg} \frac{180^\circ + \varphi}{4}}{4 \cos^3 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi}.$

6.200. Вычислить объем пирамиды, если площади ее граней равны S_0, S_1, S_2, S_3 , а двугранные углы, прилежащие к грани с площадью S_0 , равны между собой.

Решение.

Примем грань с площадью S_0 за основание ABC пирамиды $QABC$. Пусть QO — высота пирамиды, QA_1, QB_1, QC_1 — высоты боковых граней (рис. 6.217). В силу теоремы о трех перпендикулярах $OC_1 \perp AB$, $OA_1 \perp BC$ и $OB_1 \perp AC$; поэтому углы $\angle QOC_1O, \angle QA_1O$ и $\angle QB_1O$ являются линейными углами соответствующих двугранных углов и по условию задачи равны. Отсюда следует равенство треугольников QOC_1, QOA_1, QOB_1 . Обозначим $QO = H, QC_1 = QA_1 = QB_1 = h, OC_1 = OA_1 = OB_1 = r, S_1 + S_2 + S_3 = S$. Ясно, что r есть радиус окружности, вписанной в ΔABC . Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S_0 \cdot H. \quad (1)$$

Из прямоугольного ΔQOC_1 находим:

$$H = \sqrt{h^2 - r^2}. \quad (2)$$

Таким образом, необходимо найти апофему h и радиус r . По формуле $S_3 = \frac{1}{2}AB \cdot h$ и ей аналогичных найдем выражения для сто-

рон ΔABC : $AB = \frac{2S_3}{h}, BC = \frac{2S_1}{h}, AC = \frac{2S_2}{h}$. Значит, полупериметр ΔABC будет

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{S_3}{h} + \frac{S_1}{h} + \frac{S_2}{h} = \frac{S}{h}.$$

Далее, $p - AB = \frac{S}{h} - \frac{2S_3}{h} = \frac{S - 2S_3}{h}$ и $p - BC = \frac{S - 2S_1}{h}, p - AC = \frac{S - 2S_2}{h}$. Тогда по формуле Герона

$$\begin{aligned} S_0^2 &= p(p - AB)(p - BC)(p - AC) = \frac{S}{h} \cdot \frac{S - 2S_1}{h} \cdot \frac{S - 2S_2}{h} \cdot \frac{S - 2S_3}{h} = \\ &= \frac{S(S - 2S_1)(S - 2S_2)(S - 2S_3)}{h^4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt[4]{S(S - 2S_1)(S - 2S_2)(S - 2S_3)}}{\sqrt{S_0}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Радиус r найдем из формулы $S_0 = pr$. Имеем $S_0 = pr \Rightarrow r = h \frac{S_0}{S}$. Подставляя это значение в формулу (2), полу-

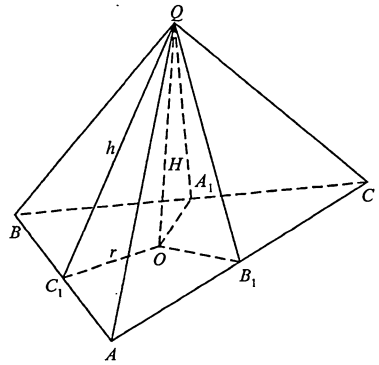


Рис. 6.217

чаем: $H = \sqrt{h^2 - h^2 \frac{S_0^2}{S^2}} = \frac{h}{S} \sqrt{S^2 - S_0^2}$. Подставив сюда значение h из (3) и внося полученное выражение в формулу

$$(1), \text{ окончательно получаем: } V = \frac{1}{3} \sqrt{S_0(S^2 - S_0^2)} \sqrt[4]{\frac{(S - 2S_1)(S - 2S_2)(S - 2S_3)}{S^3}}.$$

Ответ: $\frac{1}{3} \sqrt{S_0(S^2 - S_0^2)} \sqrt[4]{\frac{(S - 2S_1)(S - 2S_2)(S - 2S_3)}{S^3}}$, где $S = S_1 + S_2 + S_3$.

6.201. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный H , и перпендикуляр на боковую грань, равный h . Вычислить объем пирамиды.

Решение.

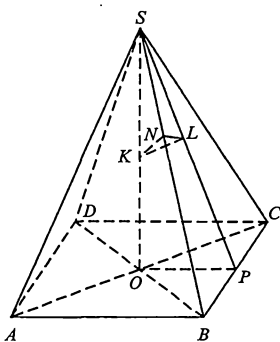


Рис. 6.218

Пусть $KN = H$ и $KL = h$ (рис. 6.218). Обозначим высоту SO буквой G , тогда $SK = \frac{1}{2}G$.

Так как $SN = \sqrt{SK^2 - KN^2} = \sqrt{\frac{1}{4}G^2 - H^2}$ и $SL = \sqrt{SK^2 - KL^2} = \sqrt{\frac{1}{4}G^2 - h^2}$, рассмотрим две пары подобных треугольников SOB и SKN ; SOP и SKL . Из первой пары имеем: $\frac{KN}{BO} = \frac{SN}{SO} \Rightarrow BO = SO \cdot \frac{KN}{SN} = G \cdot \frac{H}{\sqrt{\frac{1}{4}G^2 - H^2}}$, а из второй

$$\frac{OP}{KL} = \frac{SO}{SL} \Rightarrow OP = KL \cdot \frac{SO}{SL} = h \cdot \frac{G}{\sqrt{\frac{1}{4}G^2 - h^2}}. \text{ Так как } OP = PB, \text{ то}$$

$$OB^2 = OP^2 + PB^2 = 2 \cdot OP^2. \text{ Следовательно,}$$

$$\left(\frac{GH}{\sqrt{\frac{1}{4}G^2 - H^2}} \right)^2 = 2 \left(\frac{Gh}{\sqrt{\frac{1}{4}G^2 - h^2}} \right)^2 \Rightarrow H^2 \left(\frac{1}{4}G^2 - h^2 \right) = 2h^2 \left(\frac{1}{4}G^2 - H^2 \right) \Rightarrow G = \frac{2Hh}{\sqrt{2h^2 - H^2}}.$$

Вычислим сторону основания:

$$BC = 2 \cdot BP = 2 \cdot OP = 2 \cdot \frac{Gh}{\sqrt{\frac{1}{4}G^2 - h^2}} = 2 \cdot \frac{h}{\sqrt{\frac{H^2 h^2}{2h^2 - H^2} - h^2}} \cdot \frac{2hH}{\sqrt{2h^2 - H^2}} = \frac{2\sqrt{2}Hh}{\sqrt{H^2 - h^2}}.$$

Таким образом, искомый объем $V = \frac{1}{3} \cdot BC^2 \cdot SO = \frac{16H^3 h^3}{3(H^2 - h^2)\sqrt{2h^2 - H^2}}.$

Ответ: $\frac{16H^3 h^3}{3(H^2 - h^2)\sqrt{2h^2 - H^2}}.$

6.202. Найти объем V правильного тетраэдра с ребром a .

Решение.

Из равенства прямоугольных треугольников AED , BED и CED (по катету и гипотенузе) мы видим, что основание E высоты есть точка, равноудаленная от вершин основания (рис. 6.219), но так как основание — равносторонний треугольник, то E — точка пересечения его медиан (они же и биссектрисы и высоты). Ввиду того что CF — высота и, следовательно, перпендикулярная к AB и EF —

проекция DF , то $DF \perp AB$. Таким образом, мы имеем: $DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (как высота равностороннего треугольника со стороной a),

$EF = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (как $\frac{1}{3}$ медианы CF , которая одновременно и высота равностороннего треугольника со стороной a). Из прямоугольно-

го $\triangle DEF$ получаем $h = DE = \sqrt{DF^2 - EF^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Далее, площадь основания S как площадь равностороннего треугольника со стороной a равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Следовательно, объем

V правильного тетраэдра равен $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

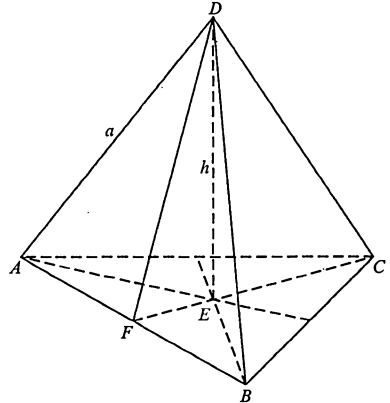


Рис. 6.219

6.203. В правильную n -угольную пирамиду со стороной основания a и боковым ребром b вписан шар. Найти его радиус.

Решение.

Объем пирамиды равен сумме объемов пирамид, которые получаются, если соединить центр вписанного шара O со всеми вершинами пирамиды. Высота каждой такой пирамиды равна радиусу R шара, вписанного в данную пирамиду. Если S — площадь основания пирамиды, S_1 — боковая поверхность, то объем пирамиды будет $V = \frac{1}{3}(S + S_1)R$.

Так как $V = \frac{1}{3}Sh$, то для R получаем формулу $R = \frac{hS}{S + S_1}$. (1)

Из условия задачи следует, что $S = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$, $S_1 = \frac{na}{2} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$. Подставляя эти выражения в

(1), получаем искомый радиус:

$$R = \frac{na^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}}{4 \left(\frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + \frac{na}{2} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \right)} = \frac{a \sqrt{4b^2 - a^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{n}}}{2 \left(a + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \sqrt{4b^2 - a^2} \right)}.$$

Ответ: $\frac{a \sqrt{4b^2 - a^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{n}}}{2 \left(a + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \sqrt{4b^2 - a^2} \right)}.$

6.204. Через одно из ребер основания правильной треугольной пирамиды со стороной основания a проведена плоскость перпендикулярно к противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении $p : s$. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.

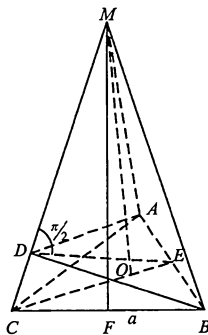


Рис. 6.220

Так как полная поверхность

$$S = S_{ABC} + 3 \cdot S_{CMB} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB \cdot \sin 60^\circ + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot CB \cdot ME = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} a \sqrt{CM^2 - CF^2} = \\ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} a \sqrt{CM^2 - \frac{a^2}{4}} \quad (\text{рис. 6.220}), \text{ то остается определить } CM.$$

Пусть $CD = px$, $MD = sx$. Так как $\triangle MCO$ подобен $\triangle ECD$, то $\frac{CE}{CD} = \frac{CM}{CO}$. Но

$$CE = CB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad CO = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad CD = px, \quad CM = (p+s)x. \text{ Отсюда получаем,}$$

$$\text{что } CE \cdot CO = CD \cdot CM, \text{ или } \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = px(p+s)x \text{ и } x = \frac{a}{\sqrt{2p(p+s)}}, \text{ а}$$

$$CM = (p+s)x = \frac{(p+s)a}{\sqrt{2p(p+s)}} = \frac{a}{2p} \sqrt{2p(p+s)}.$$

Следовательно, $S_{CMB} = \frac{1}{2} a \sqrt{CM^2 - \frac{1}{4} a^2} = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{a^2(p+s)}{2p} - \frac{1}{4} a^2} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{\frac{2p+2s-p}{p}} = \frac{a^2}{4p} \sqrt{(p+2s)p}$. Таким образом,

$$\text{искомая полная поверхность пирамиды } S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2 \sqrt{(p+2s)p}}{4p} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4p} (p + \sqrt{3p(p+2s)}).$$

Ответ: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4p} (p + \sqrt{3p(p+2s)}).$

6.205. В прямой круговой конус вписана правильная треугольная пирамида, длина апофемы боковой грани которой равна d , а сама боковая грань составляет с плоскостью основания угол величиной φ . Через одно из боковых ребер пирамиды проведена плоскость, пересекающая коническую поверхность. Найти площадь сечения конуса этой плоскостью, если эта площадь имеет наибольшее из всех возможных значений.

Решение.

При пересечении конуса плоскостью, проходящей через его вершину, в сечении получается равнобедренный треугольник (рис. 6.221), площадь которого

го S ; $S = \frac{1}{2} l^2 \sin \alpha$, где l — длина образующей конуса, α — величина угла

между образующими, по которым плоскость пересекает коническую поверхность. Так как длина образующей равна длине бокового ребра пирамиды, вписанной в этот конус, то площадь сечения является функцией угла α , причем в общем случае $\alpha \in (0; \pi)$.

Наибольшим значением α является угол β в осевом сечении конуса, поэтому

при исследовании знака производной функции $S'(\alpha) = \frac{1}{2} l^2 \cos \alpha$ сталкиваемся с двумя возможностями:

1) если $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos \beta > 0$ и $S(\alpha)$ возрастает на этом промежутке и достигает

наибольшего значения при $\alpha = \beta$; тогда $S_{\max} = \frac{1}{2} l^2 \sin \beta$;

2) если $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\cos \beta \leq 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$ является точкой максимума функции

$S(\alpha)$, поэтому $S_{\max} = \frac{l^2}{2}$.

Пусть γ — величина угла между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания, h — длина ее высоты. Имеем:

$h \operatorname{ctg} \gamma = 2h \operatorname{ctg} \varphi$ или $\operatorname{ctg} \gamma = 2 \operatorname{ctg} \varphi$ и $h = d \sin \varphi$. Найдем длину образующей конуса (бокового ребра пирамиды): $l = \frac{h}{\sin \gamma}$.

Сейчас находим выражение для площади сечения: $S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\sin \gamma} \right)^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d^2 \sin^2 \varphi (1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \varphi) \sin \alpha$. Величина угла

в осевом сечении конуса β будет меньше $\frac{\pi}{2}$, если $\gamma > \frac{\pi}{4}$, т.е. $2 \operatorname{ctg} \varphi < 1$ или $\varphi \in \left(\operatorname{arccctg} \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$; в этом случае

$$S_{\max} = \frac{1}{2} d^2 \sin^2 \varphi \cdot 2 \operatorname{ctg} \gamma = 2 d^2 \sin^2 \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi = d^2 \sin 2 \varphi$$

Если же $0 < \gamma \leq \frac{\pi}{4}$, т.е. $\varphi \in \left(0; \operatorname{arccctg} \frac{1}{2}\right)$, то $S_{\max} = \frac{1}{2} l^2 = \frac{1}{2} d^2 \sin^2 \varphi (1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \varphi) = \frac{1}{2} d^2 (1 + 3 \cos^2 \varphi)$.

Отметим: $d^2 \sin 2 \varphi$ при $\varphi \in \left(\operatorname{arccctg} \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$; $\frac{1}{2} d^2 (1 + 3 \cos^2 \varphi)$ при $\varphi \in \left(0; \operatorname{arccctg} \frac{1}{2}\right)$.

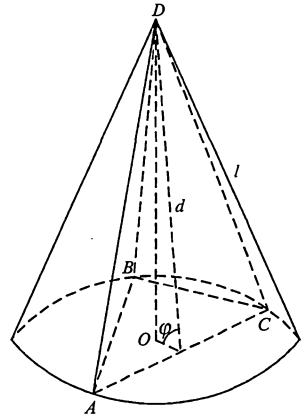


Рис. 6.221

6.206. В сферу S радиусом R вписаны восемь сфер меньшего радиуса, каждая из которых касается двух соседних, а все вместе касаются сферы S по окружности большого круга. Затем в пространство между сферами вписана еще одна сфера S_1 , которая касается всех восьми сфер меньшего радиуса и сферы S . Определить радиус r этой последней сферы.

Решение.

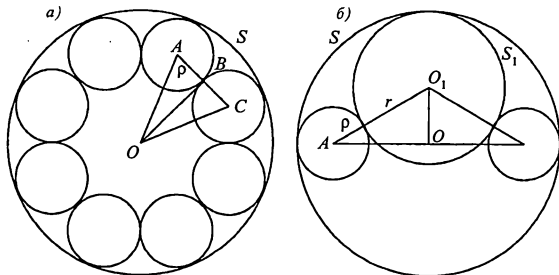


Рис. 6.222

Радиус ρ каждой из восьми вписанных сфер мы найдем, рассмотрим $\triangle AOC$ в плоскости, проходящей через центры этих сфер и центр O сферы S (рис. 6.222, а). Имеем:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{\rho}{R - \rho} = \sin \frac{\pi}{8} \Rightarrow \rho = R \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8} + 1}.$$

ведя сечение через центр O сферы S , центр O_1 сферы S_1 и центры двух противоположных сфер радиусом ρ (рис. 6.222, б), мы получим из прямоугольного треугольника AOO_1 :

$$AO_1^2 = AO^2 + OO_1^2 \text{ или}$$

$$(\rho + r)^2 = (R - \rho)^2 + (R - r)^2 \Rightarrow r = R \frac{R - \rho}{R + \rho} \Rightarrow r = R \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{8} + 1} = \frac{R}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1}.$$

Ответ: $\frac{R}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1}.$

6.207. Четыре равных шара радиусом R лежат на плоскости, причем каждый шар касается двух соседних, а также касается внешним образом конуса высотой $2R$, основание которого лежит на той же плоскости. Определить объем конуса.

Решение.

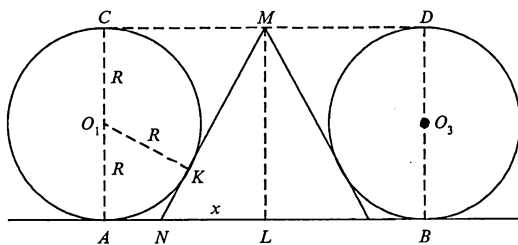


Рис. 6.223

Центры шаров обозначим O_1, O_2, O_3 и O_4 . Тогда комбинация фигур имеет следующий вид «сбоку» (рис. 6.223). Так как каждый шар касается двух соседних, то проекции центров шаров на плоскость лежат в вершинах квадрата со стороной $2R$.

Поэтому $O_1O_3 = AB = CD = \sqrt{4R^2 + 4R^2} = 2\sqrt{2}R$.

Пусть теперь ML — высота конуса, NL — радиус его основания, $x = NL$. Проведем радиус O_1K к точке касания с конусом. Очевидно, $AN = NK$, $CM = MK$ (отрезки касательных, исходящих из одной точки). Поэтому

$$MK = \frac{1}{2} CD = \sqrt{2}R, NK = AL - x = \sqrt{2}R - x \Rightarrow$$

$\Rightarrow MN = MK + NK = 2\sqrt{2}R - x$. По теореме Пифагора: $(2\sqrt{2}R - x)^2 = x^2 + 4R^2 \Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Отсюда объем конуса равен

$$\frac{\pi}{3} x^2 \cdot 2R = \frac{\pi R^3}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi R^3}{3}$.

6.208. Прямой круговой конус рассечен на две части, равные по объему, плоскостью, проходящей через центр вписанного шара перпендикулярно к оси. Вычислить угол между образующей и плоскостью основания.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение конуса ABC (рис. 6.224). Пусть искомым $\angle BCM = \alpha$. Соединив центр шара O с концом C образующей BC и его же с точкой касания L шара и образующей BC , видим, что $\angle BOL = \angle BCM = \alpha$ (перпендикулярность сто-

рон) и $\angle OKL = \angle BCM = \alpha$ (как соответственные). По условию задачи $V_2 = \frac{1}{2}V_1$,

где V_1 — объем данного конуса, а V_2 — объем отсеченного плоскостью конуса со стороны вершины данного. Обозначив радиус шара через r , выразим объемы V_1 и V_2 через r и угол α . Имеем:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot CM^2 \cdot BM = \frac{\pi}{3} (OM \operatorname{ctg} \angle OCM)^2 \cdot CM \operatorname{tg} \angle BCM = \frac{\pi}{3} r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{\pi}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha; \quad V_2 = \frac{\pi}{3} \cdot OK^2 \cdot OB = \frac{\pi}{3} \left(\frac{OL}{\sin \angle LKO} \right)^2 \cdot \frac{OL}{\cos \angle BOL} = \frac{\pi r^3}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Подставив эти выражения в формулу $V_2 = \frac{1}{2}V_1$, получаем:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \sin^3 \alpha \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} = 2 \Rightarrow \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \alpha = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Ответ: $2 \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

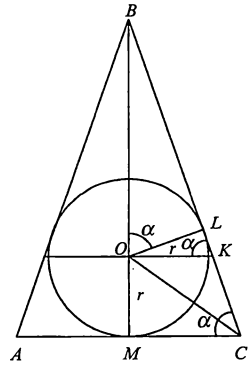


Рис. 6.224

6.209. В сферу радиусом R вписана правильная треугольная призма. Радиус сферы, проведенный в вершину этой призмы, образует с боковой гранью, проходящей через эту вершину, $22,5^\circ$. Найти высоту призмы.

Решение.

Угол между радиусом OA и гранью AD есть угол между OA и диагональю грани AD , так как перпендикуляр, опущенный из центра сферы O на грань AD , очевидно, имеет основание в центре этой грани, т.е. в середине F ее диагонали (рис. 6.225). OF есть половина стороны правильного восьмиугольника, вписанного в круг радиусом R ; так как

$$\varphi = 22,5^\circ, \text{ т.е. } QF = \frac{1}{2} R \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \text{ следовательно, } AF = \sqrt{OA^2 - OF^2} = \frac{1}{2} R \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \text{ т.е. } AD = R \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

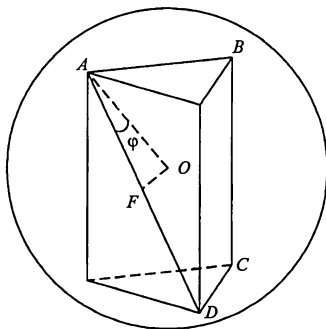


Рис. 6.225

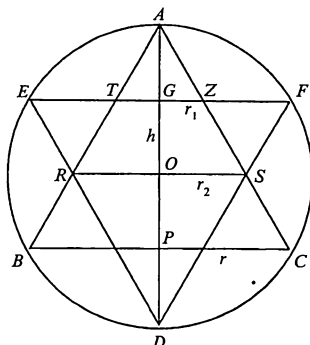


Рис. 6.226

DC есть сторона восьмиугольника, вписанного в круг радиусом AD , т.е. $DC = AD \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = R\sqrt{2} = AB$. Но $h = BC = \sqrt{AD^2 - AB^2} = R\sqrt{2}$.

Ответ: $R\sqrt{2}$.

6.210. В шар вписаны два одинаковых конуса, оси которых совпадают, а вершины находятся в противоположных концах диаметра шара. Найти отношение объема общей части этих двух конусов к объему шара, зная, что отношение высоты конуса H к радиусу шара R равно m .

Решение.

Обозначим через r радиус основания каждого из двух вписанных конусов. Их общая часть состоит из двух равных усеченных конусов. Обозначим через r_1 и r_2 соответственно радиусы верхнего и нижнего оснований усеченных конусов и через h — их высоты. Искомое отношение объемов равно $k = \frac{h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{2R^3}$. Из подобия $\triangle AGZ$, $\triangle AOS$, $\triangle APC$

(рис. 6.226) имеем: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{R-h}{R}$ и $\frac{r_2}{r_1} = \frac{R}{H}$. Так как $h = H - R$ и $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{2RH - H^2}$, то два предыдущих равенства позволяют выразить r_1 и r_2 через R и H : $r_2 = \frac{R\sqrt{2RH - H^2}}{H}$, $r_1 = r_2 \frac{2R-H}{R}$. Так как по условию $\frac{H}{R} = m$, то окончательно получаем:

$$k = \frac{(H-R) \left(r_2^2 \frac{(2R-H)^2}{R^2} + r_2^2 \frac{2R-H}{R} + r_2^2 \right)}{2R^3} = \frac{1}{2} (m-1) \left(\frac{2}{m} - 1 \right) (m^2 - 5m + 7).$$

Ответ: $\frac{1}{2} (m-1) \left(\frac{2}{m} - 1 \right) (m^2 - 5m + 7)$.

7. ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ

7.1. ВЕКТОРЫ

7.1.1. Основные понятия

Любая плоскость разбивает пространство на два полупространства, являясь их границей.

Предположим, что заданы две параллельные прямые, а также два луча на этих прямых. Через начала лучей проведем плоскость α так, чтобы прямые не лежали в этой плоскости (рис. 7.1).

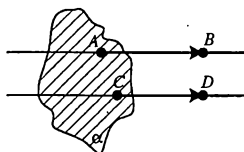


Рис. 7.1

Указанные лучи называются *сонаправленными*, если они лежат в одном и том же полупространстве относительно плоскости α , и *противоположно направленными*, если они лежат в разных полупространствах относительно плоскости α .

Множество всех лучей пространства, сонаправленных с данным лучом, называется *направлением в пространстве*.

Отрезок AB называется *направленным*, если его концы A и B упорядочены, т.е. A — начало направленного отрезка, а B — его конец. Направленный отрезок обозначают: \overrightarrow{AB} . Длиной AB направленного отрезка \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB .

Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются *сонаправленными* ($\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$), если сонаправлены лучи AB и CD , и *противоположно направленными* ($\overrightarrow{AB} \downarrow \overrightarrow{CD}$), если противоположно направлены лучи AB и CD . Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BA} называются *противоположными*.

Определение 7.1. Множество всех сонаправленных отрезков пространства (плоскости), имеющих данную длину и

данное направление, называется *вектором*.

Каждую точку A пространства можно рассматривать как направленный отрезок AA , начало и конец которого совпадают. Такой отрезок называется *нулевым направленным отрезком*, его длина равна нулю, а направление не определено.

Множество всех нулевых направленных отрезков называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Из определения вектора следует, что из любой точки пространства (плоскости) можно отложить направленный отрезок, принадлежащий любому заданному вектору, т.е. каждая точка пространства является началом направленного отрезка — одного из *представителей* данного вектора. Таким образом, любой направленный отрезок однозначно определяет вектор, который изображается на чертеже одним из направленных отрезков, представляющих его.

Векторы обозначаются: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Длина AB любого представителя \overrightarrow{AB} вектора \vec{a} называется *длиной* или *модулем* вектора \vec{a} и обозначается $|\vec{a}|$, или a .

Вектор \vec{a} , для которого $a = 1$, называется *единичным вектором*.

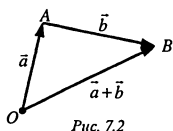
Определение 7.2. *Параллельным переносом* называется преобразование пространства (плоскости) на себя, при котором все точки пространства (плоскости) перемещаются в данном направлении на данное расстояние.

Нетрудно убедиться, что определения вектора и параллельного переноса эквивалентны, поэтому часто вектор определяется как соответствующий параллельный перенос.

7.1.2. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть \vec{a} и \vec{b} — два произвольных вектора. Возьмем в пространстве произвольную точку O и отложим на-

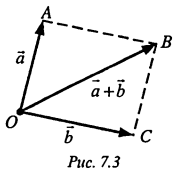
правленный отрезок \overrightarrow{OA} — представитель вектора \vec{a} и направленный отрезок \overrightarrow{AB} — представитель \vec{b} (рис. 7.2).



Направленный отрезок \overrightarrow{OB} определяет вектор \vec{c} , который называется суммой векторов \vec{a} , \vec{b} и обозначается

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}. \quad (7.1)$$

Легко проверить, что вектор \vec{c} не зависит от выбора точки O и направленных отрезков, представляющих векторы \vec{a} и \vec{b} (см. 7.1.1).



Сумму двух векторов, направления которых не параллельны, можно также находить по *правилу параллелограмма* (рис. 7.3). Для этого отложим от произвольной точки O направленные отрезки OA и OC , представляющие векторы \vec{a} и \vec{b} , и проведем прямые $AB \parallel OC$, $BC \parallel OA$ до пересечения в точке B . Ясно, что диагональ \overrightarrow{OB} полученного параллелограмма $OACB$ и определяет искомый вектор суммы \vec{c} .

Теорема 7.1. Операция сложения векторов обладает следующими основными свойствами:

1) для любых двух векторов \vec{a} и \vec{b}

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{коммутативность});$$

2) для любых трех векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$

3) для любого вектора \vec{a}

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$$

4) для каждого вектора \vec{a} найдется единственный вектор $(-\vec{a})$, называемый вектором, противоположным вектору \vec{a} , такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

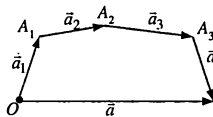
Очевидно, что противоположные векторы имеют равные длины $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$ и противоположные направления.

Нахождение суммы двух векторов называется их *сложением*.

Разностью двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$ называется сумма вектора \vec{a} и вектора, противоположного вектору \vec{b} , т.е. вектор

$$\vec{a} + (-\vec{b}).$$

Операцию сложения можно распространить на случай n слагаемых. Пусть даны n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Из некоторой точки O в пространстве отложим направленный отрезок OA_1 , представляющий вектор \vec{a}_1 , из точки A_1 — направленный отрезок A_1A_2 , представляющий вектор \vec{a}_2 , и так до отрезка $A_{n-1}A_n$, представляющего вектор \vec{a}_n .



Отрезок $\overrightarrow{OA_4}$ определяет вектор \vec{a} , который и является суммой указанных векторов (рис. 7.4):

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n.$$

Этот способ сложения векторов называется *правилом многоугольника*.

7.1.3. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число $\lambda \neq 0$ называется вектор \vec{b} , удовлетворяющий следующим условиям:

1) векторы \vec{a} и \vec{b} одинаково направлены, если $\lambda > 0$, и противоположно направлены, если $\lambda < 0$;

2) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Операция умножения вектора на число записывается так: $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Считается, что $\lambda \vec{0} = \vec{0}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ для любых λ , \vec{a} .

Теорема 7.2. Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

$$1) \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}, \quad \forall \lambda, \vec{a}, \vec{b};$$

$$2) (\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}, \quad \forall \lambda, \mu, \vec{a};$$

$$3) \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}, \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad \forall \lambda, \mu, \vec{a}.$$

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Теорема 7.3. Векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда найдется такое число λ , что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ или $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Отметим, что если такое число λ существует, то оно единственно.

Предположим, что имеются вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ и вектор \vec{a}_0 , $|\vec{a}_0| = 1$, сонаправленный с вектором \vec{a} . Вектор \vec{a}_0 называется *единичным* вектором и $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$, $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

7.1.4. КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Три ненулевых вектора называются **компланарными**, если они параллельны некоторой плоскости. Если среди трех векторов имеется хотя бы один нулевой, то такие векторы также считаются компланарными.

Если векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то любой вектор \vec{c} , компланарный с векторами \vec{a} и \vec{b} , единственным образом представим в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \quad (7.2)$$

(Под единственностью *разложения* (7.2) понимается то, что найдется единственная пара чисел x, y , для которых выполняется (7.2).)

Любая пара \vec{a}, \vec{b} таких неколлинеарных векторов называется **базисом** векторов плоскости; числа x, y являются **координатами** вектора \vec{c} в этом базисе.

Теорема 7.4. Пусть имеются три некопланарных вектора в пространстве $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Тогда любой вектор \vec{d} в пространстве единственным образом раскладывается по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \quad (7.3)$$

(Под единственностью понимается то, что существует единственная упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$, для которой выполняется (7.3).)

Доказательство.

Отложим от одной точки O направленные отрезки $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$, представляющие векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (рис. 7.5). Проектируя точку D на оси OA, OB, OC , получаем направленные отрезки $\vec{OD}_1, \vec{OD}_2, \vec{OD}_3$. Очевидно, что $\vec{OD} = \vec{OD}_1 + \vec{OD}_2 + \vec{OD}_3$. По критерию коллинеарности двух векторов $\vec{OD}_1 \parallel \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{OD}_1 = x\vec{OA}, \vec{OD}_2 \parallel \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OD}_2 = y\vec{OB}, \vec{OD}_3 \parallel \vec{OC} \Leftrightarrow \vec{OD}_3 = z\vec{OC}$. Получим, что $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

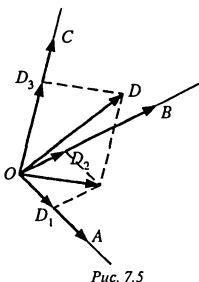


Рис. 7.5

Единственность. Предположим, имеется другое разложение $\vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$; тогда, вычитая его из (7.3), получаем

$$\vec{0} = (x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} + (z - z')\vec{c},$$

откуда $x = x', y = y', z = z'$, т.е. разложение (7.3) единственно. (Если, например, $z \neq z'$, то $\vec{c} = -\frac{x-x'}{z-z'}\vec{a} - \frac{y-y'}{z-z'}\vec{b}$ и векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, что противоречит условию.) **QED.**

Любая тройка некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется **базисом** векторов пространства, а числа x, y, z — **координатами** вектора \vec{d} в этом базисе.

7.1.5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Отложим от одной точки O направленные отрезки \vec{OA}, \vec{OB} , представляющие векторы \vec{a}, \vec{b} (рис. 7.6).

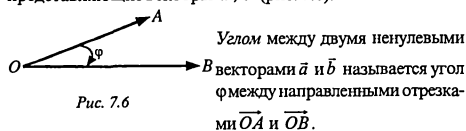


Рис. 7.6

Углом между двумя ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} называется угол φ между направленными отрезками \vec{OA} и \vec{OB} .

Векторы \vec{a} и \vec{b} будут **взаимно перпендикулярными** (ортогональными), если $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то $\varphi = 0$; если $\vec{a} \downarrow \vec{b}$, то $\varphi = \pi$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$, которое равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (7.4)$$

Если хотя бы один из векторов \vec{a}, \vec{b} равен $\vec{0}$, то и скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Свойства скалярного произведения:

- 1) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативность);
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$;
- 3) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- 4) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (\vec{a} и \vec{b} — взаимно перпендикулярны).

Так как $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad (7.5)$$

7.1.6. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТАХ

Рассмотрим пару взаимно перпендикулярных, единичных векторов \vec{i} и \vec{j} плоскости. Так как \vec{i} и \vec{j} не коллинеарны, то любой вектор \vec{a} плоскости единственным образом раскладывается в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где x, y — координаты вектора \vec{a} в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Запись: $\vec{a}(x; y)$. Пусть O — некоторая точка плоскости, тогда совокупность $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ называется *декартовой (прямоугольной) системой координат на плоскости*.

Если A — произвольная точка плоскости, то ее *координатами* x, y называются координаты OA . Запись: $A(x; y)$.

Предположим, что имеются две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, тогда из равенства $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ очевидно, что вектор, определяемый отрезком \vec{AB} , имеет следующие координаты:

$$\vec{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1). \quad (7.6)$$

Рассмотрим *действия над векторами в координатах*. Пусть $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ — декартова система координат, $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$. Тогда:

$$1) \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2), \quad \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2);$$

$$2) \lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1); \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$3) \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

$$4) |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2};$$

$$5) \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Косинусы углов между векторами \vec{a} и векторами базиса \vec{i}, \vec{j} называются *направляющими косинусами* и находятся по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| |\vec{j}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

Очевидно, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

7.1.7. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТАХ

Рассмотрим три попарно перпендикулярных, единичных вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в пространстве. Так как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — некопланарны, то они образуют базис, следовательно, любой вектор $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ в пространстве единственным образом раскладывается в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где x, y, z — его координаты в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\vec{a}(x; y; z)$.

Если O — любая точка в пространстве, то совокупность $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется *декартовой (прямоугольной) системой координат в пространстве*.

Через точку O можно провести единственные прямые $l_1 \parallel \vec{i}$, $l_2 \parallel \vec{j}$, $l_3 \parallel \vec{k}$ (рис. 7.7). Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ определяют направления и масштабы на l_1, l_2, l_3 , т.е. превращают l_1, l_2, l_3 в числовые прямые, которые называются *осями координат* Ox, Oy, Oz соответственно. Плоскости, проходящие через прямые l_1 и l_2, l_1 и l_3, l_2 и l_3 называются *координатными плоскостями* Oxy, Oyz, Oxz соответственно, а точка O — *началом координат*.

Для произвольной точки A пространства ее *координатами* x_1, y_1, z_1 являются координаты $OB, A(x_1; y_1; z_1)$.

Если имеются две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (7.7)$$

Рассмотрим *действия над векторами в координатах*. Предположим, что $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — декартова система координат в пространстве, $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$. Тогда:

$$1) \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2);$$

$$2) \lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1), \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$3) \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2;$$

$$4) |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

$$5) \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Косинусы углов между вектором \vec{a} и векторами базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются *направляющими косинусами* и находятся по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| |\vec{j}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}; \quad (7.8)$$

$$\cos \gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Из (7.5) очевидно, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

7.2. МЕТОД КООРДИНАТ

7.2.1. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ И ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Предположим, что в пространстве задана прямоугольная система координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ и даны две точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

Очевидно, что расстояние между этими точками совпадает с длиной вектора, определяемого направленным отрезком \overrightarrow{AB} . Используя формулу (7.4), получаем

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (7.9)$$

В частности, если точки A и B заданы на координатной плоскости Oxy и $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (7.10)$$

Далее, пусть $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1$. На прямой $l = AB$ найдем точку $C(x, y, z)$ такую, чтобы отношение, в котором точка C делит AB , было равно λ , или, что эквивалентно, чтобы $AC = \lambda CB$ (рис. 7.7).

Очевидно, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z)$. Так как $AC = \lambda CB$,

то $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$; $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$; $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$, откуда:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, если точка C является серединой AB , то $\lambda = 1$ и из (7.7) получаем:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

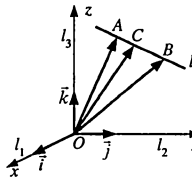


Рис. 7.7

Для плоскости в декартовой системе координат xOy при тех же обозначениях имеем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (7.13)$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (7.14)$$

7.2.2. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Определение 7.3. Пусть на плоскости заданы прямоугольная система координат xOy и некоторая линия γ . Уравнение $f(x, y) = 0$ называется *уравнением линии* γ , если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии γ и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на γ .

Предположим теперь, что на плоскости дана некоторая прямая l . Любой ненулевой вектор этой плоскости, перпендикулярный к прямой l , называется *нормальным вектором* прямой, а любой ненулевой вектор \vec{a} , параллельный l , — *направляющим вектором* прямой.

Теорема 7.4. Любая прямая в прямоугольной системе координат xOy имеет уравнение $ax + by + c = 0$.

Доказательство. Пусть на плоскости задана декартова система координат xOy , а также прямая l и ее нормальный вектор $\vec{n}(a; b)$ (рис. 7.8).

Если $M_1(x_1; y_1)$ — некоторая фиксированная точка l , то для любой точки $M(x; y)$ прямой l векторы \vec{n} и $\overrightarrow{M_1M}$ взаимно перпендикулярны, что эквивалентно обращению в нуль их скалярного произведения. $M_1M(x - x_1; y - y_1)$, следовательно,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M} = a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_1 - by_1) = 0.$$

Обозначив через c величину $-ax_1 - by_1$, получаем уравнение $ax + by + c = 0$. Для любой точки N , не лежащей на прямой l , векторы \vec{n} и $\overrightarrow{M_1N}$ не перпендикулярны, т.е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1N} \neq 0$ и координаты точки N не могут удовлетворять нашему уравнению $ax + by + c = 0$. **QED.**

Теорема 7.5 (обратная). На плоскости в прямоугольной системе координат любое уравнение первой степени

$$ax + by + c = 0 \quad (7.15)$$

задает прямую линию, а вектор $\vec{n}(a; b)$ есть нормальный вектор этой прямой.

Рассмотрим, как располагается прямая l на координатной плоскости.

кости в зависимости от коэффициентов a, b, c уравнения (7.9):

- 1) если $c = 0$, то l проходит через начало координат точки O , так как $x = 0, y = 0$ удовлетворяют уравнению $ax + by = 0$;
- 2) если $b = 0$, то $x = -\frac{c}{a}$, следовательно, прямая параллельна оси ординат $x = 0$ и проходит через точку $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$;
- 3) если $a = 0$, то $y = -\frac{c}{b}$ задает прямую, параллельную оси абсцисс $y = 0$, и проходит через точку $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$;
- 4) если $b = c = 0$, то $ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ($a \neq 0$), т.е. l совпадает с осью ординат;
- 5) если $a = c = 0$, то $by = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($b \neq 0$), следовательно, прямая совпадает с осью абсцисс.

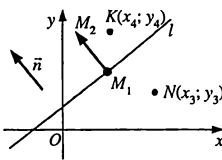


Рис. 7.9

Рассмотрим на координатной плоскости xOy прямую l , заданную уравнением $ax + by + c = 0$ (рис. 7.9). Отложим от произвольной точки M_1 на прямой l направленный отрезок M_1M_2 , представляющий нормальный вектор $\vec{n}(a;b)$.

Прямая l разбивает плоскость на две полуплоскости. Для любой точки $K(x_2; y_2)$ той полуплоскости, в которой лежит точка M_2 ,
 $ax_2 + by_2 + c > 0$, (7.16)
 а для произвольной точки $N(x_3; y_3)$ другой полуплоскости
 $ax_3 + by_3 + c < 0$. (7.17)
 Условия (7.10), (7.11) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями принадлежности точки соответствующей полуплоскости.

7.2.3. ДРУГИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

1. Прямая, которая образует угол α с положительным направлением оси Ox и пересекает ось Oy в точке $(0; b)$, имеет уравнение (рис. 7.10)

$$y = kx + b, \quad (7.18)$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Число k называется *угловым коэффициентом* прямой.

Прямая, образующая угол α с положительным направлением оси Ox и проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$, имеет уравнение (см. рис. 7.10)

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (7.19)$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

2. Прямая, пересекающая ось Ox в точке $(a; 0)$, а ось Oy в точке $(0; b)$, имеет уравнение (*уравнение прямой в отрезках*) (см. рис. 7.10)

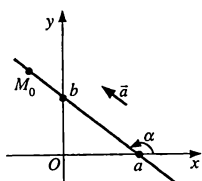


Рис. 7.10

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (ab \neq 0). \quad (7.20)$$

3. Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{a}(a_1; a_2)$, имеет уравнение (см. рис. 7.10)

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}, \quad (7.21)$$

или уравнения (*параметрические уравнения прямой*)

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases} \quad (t \in (-\infty; +\infty)) \quad (7.22)$$

4. Прямая, проходящая через две данные (не совпадающие) точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (7.23)$$

7.2.4. ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

1. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l , заданной в декартовой системе координат уравнением $Ax + By + C = 0$ (рис. 7.11), находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (7.24)$$

2. Предположим, что на плоскости заданы две прямые l_1 и l_2 , имеющие в декартовой системе координат уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. В этом случае прямые l_1 и l_2 тогда, и только тогда:

а) пересекаются, когда $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ (рис. 7.12);

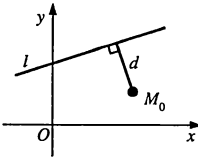


Рис. 7.11

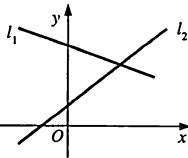


Рис. 7.12

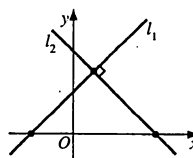


Рис. 7.14

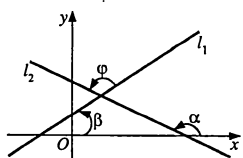


Рис. 7.15

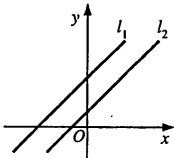


Рис. 7.13

б) параллельны, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad (\text{рис. 7.13});$$

в) совпадают, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;

г) перпендикулярны, когда $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ (рис. 7.14).

3. Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ соответственно (см. рис. 7.14), то они перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$k_1 k_2 = -1. \quad (7.25)$$

Один из углов между прямыми l_1 и l_2 находится по формуле (рис. 7.15)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (k_1 k_2 \neq -1). \quad (7.26)$$

7.2.5. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Множество всех точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки этой плоскости, т.е. центра, называется *окружностью*.

Расстояние от любой точки окружности до ее центра называется *радиусом окружности*.

Если на плоскости заданы декартова система координат xOy и окружность γ , то уравнение $f(x, y) = 0$ называется *уравнением окружности*, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки окружности, и только они.

Теорема 7.6. Окружность с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом R имеет уравнение (рис. 7.16):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (7.27)$$

Доказательство.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка окружности γ . Тогда по формуле (7.6)

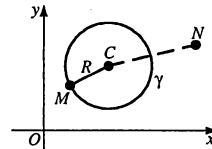


Рис. 7.16

$$\begin{aligned} MC = R &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \end{aligned}$$

Если точка $N(x_1, y_1)$ не лежит на окружности γ , то $NC \neq R$ и

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \neq R^2. \quad \text{QED.}$$

В частности, уравнение окружности с центром в начале координат точки O и радиусом R имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (7.28)$$

7.2.6. ПЛОСКОСТЬ И СФЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ

Если в пространстве заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и поверхность α , то уравнение $f(x, y, z) = 0$ называется *уравнением поверхности α* , если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности α , и только они.

Общее уравнение плоскости, перпендикулярной к ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (7.29)$$

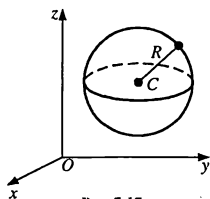


Рис. 7.17

Обратно, всякое уравнение вида $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) задает в пространстве плоскость, перпендикулярную к вектору $\vec{n}(a; b; c)$.

Сферой называется множество точек пространства, расстояние от каждой из которых до некоторой фиксированной точки (*центра сферы*) есть величина постоянная, называемая *радиусом сферы*.

Если в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$ и сфера α радиусом R с центром в точке $C(x_0; y_0; z_0)$, то она имеет уравнение:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \quad (7.30)$$

В частности, уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом R имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (7.31)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ТЕМА: ВЕКТОРЫ

7.001. Доказать теорему косинусов: в $\triangle ABC$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$ (рис. 7.18).

Решение.

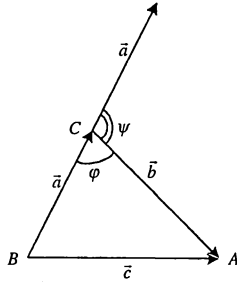


Рис. 7.18

Рассмотрим векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , идущие по сторонам $\triangle ABC$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow c^2 = \vec{c}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 + 2a \cdot b \cos \psi = \\ &= a^2 + b^2 + 2a \cdot b \cos(180^\circ - \varphi) = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi. \end{aligned}$$

QED.

7.002. Доказать теорему о средней линии трапеции: $EF \parallel AD$, $EF = \frac{BC + AD}{2}$, где E , F — соответственно середины боковых сторон AB и CD трапеции (рис. 7.19).

Решение.

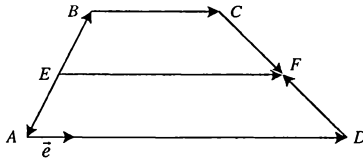


Рис. 7.19

Введем векторы, как это показано на рис. 7.19. Тогда $\vec{BC} = BC \cdot \vec{e}$, $\vec{AD} = AD \cdot \vec{e}$, где $|\vec{e}| = 1$. Далее имеем:

$$\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CF}, \quad \vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DF} \Rightarrow 2\vec{EF} = (\vec{EB} + \vec{EA}) + (\vec{BC} + \vec{AD}) + (\vec{CF} + \vec{DF}) = (BC + AD)\vec{e}.$$

Таким образом, $\vec{EF} = \frac{BC + AD}{2} \vec{e} \Rightarrow EF \parallel AD$, $EF = \frac{BC + AD}{2}$.

QED.

7.003. В четырехугольнике $ABCD$ вектор $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

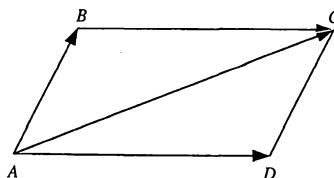


Рис. 7.20

Решение.

Разность векторов $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 7.20). По условию эта же разность векторов $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$, поэтому $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Из условия равенства векторов \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AD} следует, что $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ и $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$. Следовательно, по признаку параллелограмма, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

QED.

7.004. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

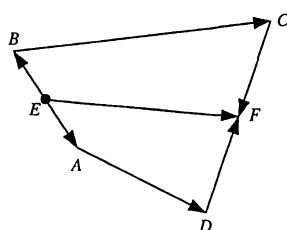


Рис. 7.21

Решение.

Вектор $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$ (рис. 7.21). С другой стороны, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$. Сложив почленно оба равенства, получим $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DF})$. Но $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{DF}$, значит $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$, откуда $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

QED.

7.005. В треугольнике ABC сторону AB точками M и N разделили на три равные части: $AM = MN = NB$. Выразить вектор \overrightarrow{CM} через векторы \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} .

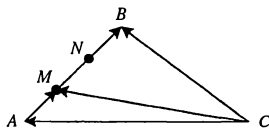


Рис. 7.22

Решение.

Вектор $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (рис. 7.22). Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, то $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

Ответ: $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

7.006. Доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC .

Решение.

Точкой пересечения медиан треугольника делятся в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому $|\overrightarrow{OA_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$ (рис. 7.23). Векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и \overrightarrow{OA} противоположно направлены, следовательно,

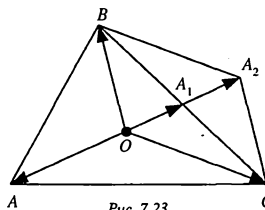


Рис. 7.23

$$\overrightarrow{OA_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.$$

(1)

На продолжении медианы AA_1 отложим точку A_2 так, чтобы $A_1A_2 = OA_1$. Четырехугольник $OB A_2 C$ — параллелограмм (диагонали OA_2 и BC в точке пересечения A_1 делятся пополам). Тогда

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$-\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \text{ или } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

QED.

7.007. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC и $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Выразить векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} через векторы \vec{a} и \vec{b} .

Решение.

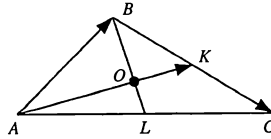


Рис. 7.24

Имеем $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AK}$ (так как O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$) (рис. 7.24). Тогда:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2} \vec{a}, \quad \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AK} = \vec{b} - \frac{3}{2} \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KC} = 2\vec{b} - 3\vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \vec{b} - (2\vec{b} - 3\vec{a}) = 3\vec{a} - \vec{b}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = 2\vec{b} - 3\vec{a}$.

7.008. Пусть K и M — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ и $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$. Разложить \overrightarrow{BD} и \overrightarrow{AD} по векторам \vec{a} и \vec{b} .

Решение.

Для $\triangle BCD$ KM — средняя линия (рис. 7.25), значит $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{KM}$. Так как $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = \vec{b} - \vec{a}$, то $\overrightarrow{BD} = 2(\vec{b} - \vec{a})$. В силу $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$ получаем систему этих уравнений относительно \overrightarrow{DM} и \overrightarrow{AD} , т.е.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM}, \\ \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \vec{b}, \\ 2(\vec{b} - \vec{a}) + 2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}.$$

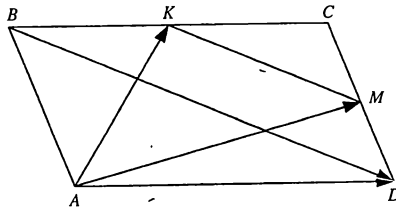


Рис. 7.25

Ответ: $\overrightarrow{BD} = 2(\vec{b} - \vec{a})$; $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$.

7.009. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника ABC .

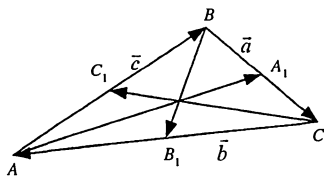


Рис. 7.26

Решение.

На сторонах $\triangle ABC$ построим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ (рис. 7.26). Выразим векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, построенные на медианах, через \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} :

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{a}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} =$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}, \quad \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}. \text{ Сложив эти равенства поч-$$

ленно, получим $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$ (так как векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют треугольник, то их сумма равна $\vec{0}$).

Это значит, что на векторах $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ можно построить треугольник.

QED.

7.010. Точка M — середина отрезка AB и O — произвольная точка пространства. Доказать векторную формулу для середины отрезка: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

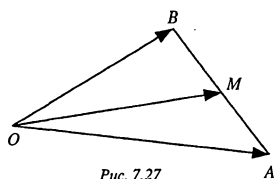


Рис. 7.27

Решение.

Используя рис. 7.27, получим

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad (1)$$

и

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \quad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2) почленно, получим $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

Но $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM}$, поэтому $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. QED.

7.011. Точки A_1, B_1, C_1 являются соответственно серединами сторон BC, AC, AB треугольника ABC . Доказать, что при любом выборе точки O выполняется равенство $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Решение.

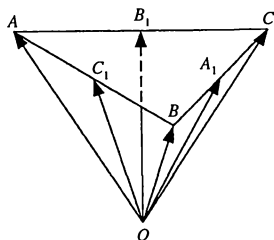


Рис. 7.28

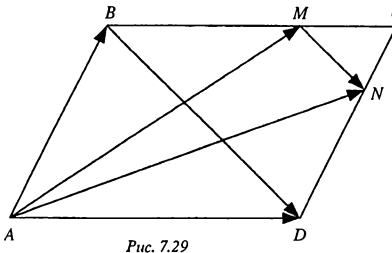
Применяя векторную формулу для середины отрезка (см. 7.010), получим $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (рис. 7.28). QED.

7.012. Дано: $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

Решение.

Вектор $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$, т.е. $\vec{AD} = \vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{a} - \vec{b} - 5\vec{a} - 3\vec{b} = -8\vec{a} - 2\vec{b}$. Векторы $\vec{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{AD} = -8\vec{a} - 2\vec{b}$ коллинеарны ($\vec{AD} = 2\vec{BC}$), а векторы $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$ неколлинеарны, т.е. стороны BC и AD параллельны, а AB и CD непараллельны. Значит, четырехугольник $ABCD$ — трапеция. **QED.**

7.013. В параллелограмме $ABCD$ дано: $M \in BC$ и $BM:MC = 2:1$; $N \in DC$, $DN:NC = 2:1$; $\vec{AM} = \vec{a}$; $\vec{AN} = \vec{b}$. Выразить векторы \vec{AB} , \vec{AD} , \vec{MN} и \vec{BD} через \vec{a} и \vec{b} .



Решение.

$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \vec{b} - \vec{a}$ (рис. 7.29). Так как $\frac{BM}{MC} = 2$; $\frac{DN}{NC} = 2$, то $\frac{MC}{BC} = \frac{1}{3}$, $\frac{NC}{CD} = \frac{1}{3}$ и угол C — общий у треугольников NCM и DCB . Следовательно, $\triangle NCM \sim \triangle DCB$. Поэтому $\frac{MN}{BD} = \frac{1}{3}$ и $\vec{BD} = 3\vec{MN}$, т.е. $\vec{BD} = 3(\vec{b} - \vec{a})$.

Пусть $\vec{AD} = \vec{x}$, $\vec{AB} = \vec{y}$. Имеем $\vec{AD} - \vec{AB} = \vec{BD}$ или

$$\vec{x} - \vec{y} = 3(\vec{b} - \vec{a}) \quad (1)$$

$$\text{и } \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AM} \text{ или } \vec{y} + \frac{2}{3}\vec{x} = \vec{a} \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2) относительно \vec{x} и \vec{y} , находим:

$$\vec{x} = \vec{AD} = \frac{9}{5}\vec{b} - \frac{6}{5}\vec{a}, \quad \vec{y} = \vec{AB} = \frac{9}{5}\vec{a} - \frac{6}{5}\vec{b}.$$

$$\text{Отметим: } \vec{AB} = \frac{9}{5}\vec{a} - \frac{6}{5}\vec{b}, \quad \vec{AD} = \frac{9}{5}\vec{b} - \frac{6}{5}\vec{a}, \quad \vec{MN} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \vec{BD} = 3(\vec{b} - \vec{a}).$$

7.014. Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC и O — произвольная точка пространства. Доказать векторную формулу для точки пересечения медиан треугольника: $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.

Решение.

Используя рис. 7.30, запишем векторные равенства:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AA_1}, \quad (1)$$

$$\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM} = \vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{BB_1}, \quad (2)$$

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = \vec{OC} + \frac{2}{3}\vec{CC_1}. \quad (3)$$

Складывая равенства (1)–(3), получаем $3\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \frac{2}{3}(\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1}) = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ (см. 7.009).

$$\text{Следовательно, } \vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}). \quad \text{QED.}$$

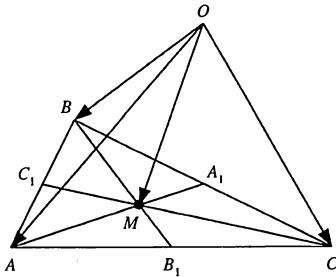


Рис. 7.30

7.015. Треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость α . Известно: $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$. Найти расстояние между точками пересечения медиан этих треугольников.

Решение.

Обозначим точки пересечения медиан данных треугольников через M и M_1 (рис. 7.31). Выбрав произвольную точку O , применим векторную формулу для точки пересечения медиан треугольника. Имеем

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_1} &= \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}((\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC})) = \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}).\end{aligned}$$

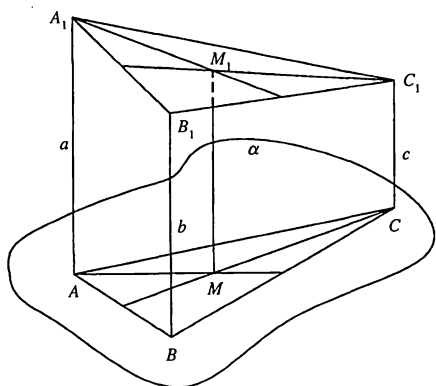


Рис. 7.31

Отсюда $|\overrightarrow{MM_1}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}|$. Векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ коллинеарны. Если вершины A, B, C расположены по одну сторону плоскости α , то эти векторы сонаправленные и $|\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}| = |\overrightarrow{AA_1}| + |\overrightarrow{BB_1}| + |\overrightarrow{CC_1}| = a + b + c$, а тогда $|\overrightarrow{MM_1}| = \frac{1}{3}(a + b + c)$. Другие случаи рассматриваются аналогично. Например, если плоскость α отделяет вершину C_1 от вершин A_1 и B_1 , то вектор $\overrightarrow{CC_1}$ противоположно направлен векторам $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$; в этом случае $|\overrightarrow{MM_1}| = \frac{1}{3}|a + b - c|$.

7.016. Точки E и F делят соответственно сторону AD и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ так, что $AD = 5AE$, $AC = 6AF$. Доказать, что точки B, E, F лежат на одной прямой. В каком отношении точка F делит отрезок BE ?

Решение.

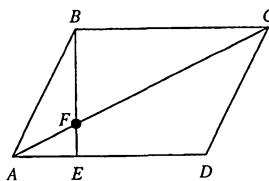


Рис. 7.32

Для доказательства принадлежности точек B, F, E одной прямой достаточно доказать коллинеарность векторов \overrightarrow{FB} и \overrightarrow{FE} (рис. 7.32). Так как

$$\overrightarrow{FA} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{30}\overrightarrow{BC}.$$

Из полученных равенств следует, что $\overrightarrow{FB} = -5\overrightarrow{FE}$. Следовательно, векторы \overrightarrow{FB} и \overrightarrow{FE} коллинеарны и точка F делит отрезок BE в отношении 5:1.

Ответ: 5:1.

7.017. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар $(A; B)$ этих точек взяты векторы \overline{AB} , причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Доказать, что сумма всех взятых векторов равна $\vec{0}$.

Решение.

Выберем где угодно точку O и представим каждый из взятых векторов \overline{AB} как $\overline{OB} - \overline{OA}$. В сумме всех векторов \overline{AB} каждый вектор \overline{OM} где M — одна из данных точек, будет встречаться со знаком «минус» столько же раз, сколько и со

знаком «плюс». Следовательно, сумма всех взятых векторов равна $\vec{0}$.

QED.

7.018. В пирамиде $OABC$ медиана AA_1 грани ABC делится точкой M так, что $AM:MA_1 = 3:7$. Выразить вектор \overline{OM} через векторы \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} .

Решение.

Из рис. 7.33 имеем

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}. \quad (1)$$

С другой стороны, $\overline{OM} = \overline{OA_1} + \overline{A_1M}$, но $\overline{OA_1} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC})$ (векторная формула для середины отрезка, см. 7.010). Следовательно,

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OC} + \overline{A_1M}. \quad (2)$$

Векторы \overline{AM} и $\overline{A_1M}$ противоположно направлены, а их длины (по условию) относятся как 3:7, т.е. они связаны соотношением $\overline{AM} = -\frac{3}{7}\overline{A_1M}$. Учитывая последнее равенство, перепишем (1) в виде

$$\overline{OM} = \overline{OA} - \frac{3}{7}\overline{A_1M}. \quad (3)$$

Умножив равенство (2) на $\frac{3}{7}$, сложим его почленно с равенством (3). Получим $\overline{OM} + \frac{3}{7}\overline{OM} = \overline{OA} - \frac{3}{7}\overline{A_1M} + \frac{3}{14}\overline{OB} + \frac{3}{14}\overline{OC} + \frac{3}{7}\overline{A_1M}$, откуда $\overline{OM} = \frac{7}{10}\overline{OA} + \frac{3}{20}\overline{OB} + \frac{3}{20}\overline{OC}$.

Ответ: $\overline{OM} = \frac{7}{10}\overline{OA} + \frac{3}{20}\overline{OB} + \frac{3}{20}\overline{OC}$.

7.019. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\overline{BB_1} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{BA} = \vec{c}$. Разложить вектор $\overline{A_1M}$ (где M — точка пересечения медиан треугольника ABC) по векторам \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

Решение.

$\overline{A_1M} = -(\overline{MA} + \overline{AA_1})$ (рис. 7.34). Так как M — точка пересечения медиан AM_1 и CM_2 треугольника ABC , то $\overline{MA} = \frac{2}{3}\overline{AM_1}$ и $\overline{MA} = \frac{2}{3}(\overline{BA} - \frac{1}{2}\overline{BC}) = \frac{2}{3}\overline{BA} - \frac{1}{3}\overline{BC}$. значит, $\overline{MA} = \frac{2}{3}(\overline{BA} - \frac{1}{2}\overline{BC}) = \frac{2}{3}\overline{BA} - \frac{1}{3}\overline{BC}$. Учитывая, что $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$, для вектора $\overline{A_1M}$ получаем разложение $\overline{A_1M} = -\left(\frac{2}{3}\overline{BA} - \frac{1}{3}\overline{BC} + \overline{BB_1}\right) = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$.

Ответ: $\overline{A_1M} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$.

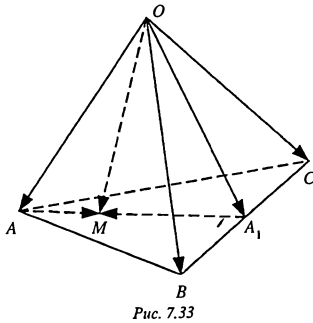


Рис. 7.33

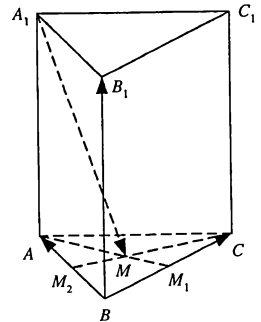


Рис. 7.34

7.020. Вершинами треугольника являются концы трех ребер данного параллелепипеда, выходящих из одной его вершины. Доказать, что точка пересечения медиан этого треугольника принадлежит диагонали параллелепипеда, выходящей из той же вершины, и делит ее в отношении 1:2.

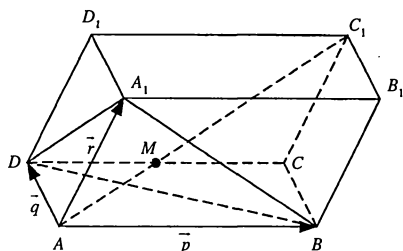


Рис. 7.35

Решение.

Рассмотрим $\triangle A_1BD$ и диагональ AC_1 (рис. 7.33). Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ и M — точка пересечения медиан $\triangle A_1BD$, тогда (см. 7.014)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}). \quad (1)$$

По правилу параллелепипеда

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Это равенство

показывает, что $\overrightarrow{AM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AC_1}$ и $|\overrightarrow{AM}| : |\overrightarrow{AC_1}| = 1:3$. Отсюда $M \in AC_1$ и $|\overrightarrow{AM}| : |\overrightarrow{MC_1}| = 1:2$.

QED.

7.021. SAB — треугольная пирамида, M — точка пересечения медиан грани ABC . Q — середина средней линии треугольника SAB , параллельной стороне SB . Выразить вектор \overrightarrow{MQ} через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{SC}$.

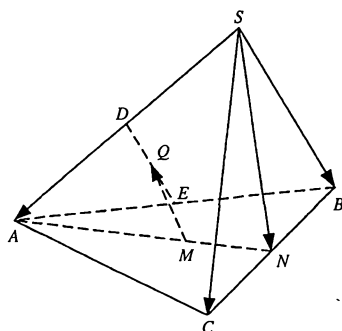


Рис. 7.36

Решение.

DE — средняя линия $\triangle ASB$, поэтому:

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}$ (рис. 7.36). Точка M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ делит AN на отрезки AM и MN так, что

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}. \text{ Значит, } \overrightarrow{MA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}\right) = -\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{2}{3}\vec{a}.$$

$$\text{Тогда } \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = -\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{12}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}.$$

$$\text{Ответ: } \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{12}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}.$$

7.022. В параллелограмме $ABCD$ — середина BC ; P — середина DC . Выразить сумму векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CB} через векторы $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AP} = \vec{b}$.

Решение.

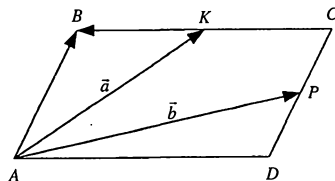


Рис. 7.37

При помощи рис. 7.37 получаем $\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overline{CB}$.

Но $\overline{CB} = \overline{DA} = \overline{DP} + \overline{PA} = \frac{1}{2}\overline{DC} - \overline{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \frac{1}{2}\overline{CB}) - \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\overline{CB} - \vec{b}$, откуда $\overline{CB} = \frac{4}{3}(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})$.

Поэтому $\overline{AB} + \overline{CB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \overline{CB} = \vec{a} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) = 2(\vec{a} - \vec{b})$.

Ответ: $\overline{AB} + \overline{CB} = 2(\vec{a} - \vec{b})$.

7.023. Параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ имеют общую вершину ($A = A_1$). Доказать, что прямые BB_1 , CC_1 , DD_1 параллельны одной плоскости.

Решение.

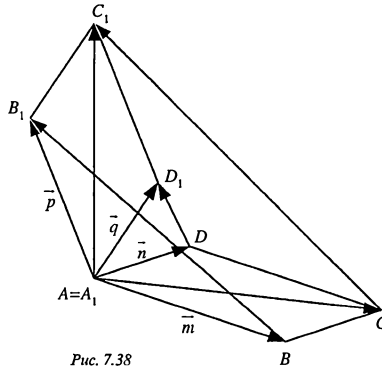


Рис. 7.38

Достаточно доказать компланарность векторов $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$ (рис. 7.38). Пусть $\overline{AB} = \vec{m}$, $\overline{AD} = \vec{n}$, $\overline{AB_1} = \vec{p}$, $\overline{AD_1} = \vec{q}$, тогда $\overline{AC} = \vec{m} + \vec{n}$, $\overline{AC_1} = \vec{p} + \vec{q}$. По формуле вычитания векторов имеем $\overline{BB_1} = \vec{p} - \vec{m}$, $\overline{CC_1} = (\vec{p} + \vec{q}) - (\vec{m} + \vec{n})$, $\overline{DD_1} = \vec{q} - \vec{n}$.

Заметим, что $\overline{CC_1} = \overline{BB_1} + \overline{DD_1}$, откуда и следует компланарность векторов $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$.

QED.

7.024. Через вершины A, B, C треугольника ABC проведены параллельные прямые. Пересечь их соответственно в точках A_1, B_1, C_1 прямой p , проходящей через данную точку D , чтобы $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$.

Решение.

Предположим, что прямая p построена. Проведем через середину M стороны AB прямую Q , параллельную данным прямым с направляющим вектором \vec{l} (рис. 7.39). Если $p \cap Q = N$, то $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} = 2\overline{MN} = \overline{CC_1}$. Следовательно, в $\triangle CC_0$ точка M — середина отрезка CC_0 . Таким образом, точку $C_0 \in p$ можно построить, удвоив медиану CM . Зная D и C_0 , проводим прямую p через точки D и C_0 .

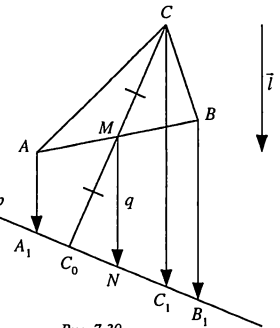


Рис. 7.39

Если $D \neq C_0$, то задача имеет единственное решение, однако при условии, когда прямая DC_0 не параллельна вектору \vec{l} .

Если $D = C_0$, то задача имеет бесконечное множество решений.

Заметим, что построение не зависит от направляющего вектора \vec{l} .

7.025. Из вершин B, C, D параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры BB_1, CC_1, DD_1 на прямую AM , не принадлежащую его плоскости. Доказать, что отрезки BB_1, CC_1, DD_1 могут служить сторонами треугольника.

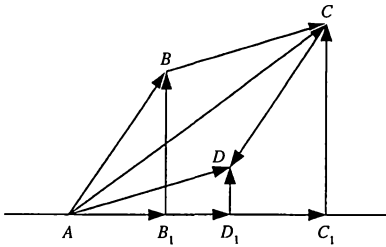


Рис. 7.40

Решение.

Пусть вершины B, C, D параллелограмма $ABCD$ проектируются на прямую AM в точки B_1, C_1, D_1 (рис. 7.40). Примем точку A за начало векторов, и пусть $\vec{AB} = \vec{a}_1, \vec{AD} = \vec{a}_2, \vec{AC} = \vec{a}, \vec{AB_1} = \vec{b}_1, \vec{AD_1} = \vec{b}_2, \vec{AC_1} = \vec{b}, \vec{B_1B} = \vec{d}_1, \vec{D_1D} = \vec{d}_2, \vec{C_1C} = \vec{d}$. Согласно условию задачи $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}$; кроме того, $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \vec{b}$, так как проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов. Из $\triangle ABB_1$ $\vec{d}_1 = \vec{a}_1 - \vec{b}_1$. Аналогично $\vec{d}_2 = \vec{a}_2 - \vec{b}_2, \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Поэтому $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\vec{a}_1 - \vec{b}_1) + (\vec{a}_2 - \vec{b}_2) = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) - (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$. Поскольку векторы $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}$ неколлинеар-

ные, причем $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$, то, отложив эти векторы от одной точки, получим параллелограмм; следовательно, длины этих векторов могут служить длинами сторон треугольника.

QED.

7.026. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC ($|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$). Доказать, что $a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC} = \vec{0}$.

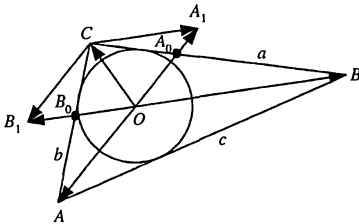


Рис. 7.41

Решение.

Разложим вектор \vec{OC} по векторам \vec{OA}, \vec{OB} (рис. 7.41). Имеем где

$$x = -\frac{|\vec{OA_1}|}{|\vec{OA}|}. \text{ Но } OB \parallel A_1C, \text{ поэтому } \vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = x\vec{OA} + y\vec{OB},$$

$$\frac{|\vec{OA_1}|}{|\vec{OA}|} = \frac{|\vec{CB_0}|}{|\vec{B_0A}|}. \text{ По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника } \frac{|\vec{CB_0}|}{|\vec{B_0A}|} = \frac{|BC|}{|BA|} = \frac{a}{c}. \text{ Итак, } x = -\frac{a}{c}. \text{ Аналогично}$$

доказываем, что $y = -\frac{b}{c}$. Следовательно, $\vec{OC} = -\frac{a\vec{OA} + b\vec{OB}}{c}$ и

$$a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC} = \vec{0}.$$

QED.

7.027. От точки O отложены три попарно неколлинеарных вектора \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} . Доказать, что если сумма первого и второго векторов коллинеарна третьему вектору, а сумма второго и третьего векторов коллинеарна первому вектору, то сумма первого и третьего векторов коллинеарна второму вектору. Чему равна сумма векторов \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} ?

Решение.

Пусть имеем три неколлинеарных вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Согласно условию, $\vec{a} + \vec{b} = \lambda \vec{c}$ и $\vec{b} + \vec{c} = \mu \vec{a}$, где λ, μ — действительные числа. Вычтем почленно из первого векторного равенства второе: $\vec{a} - \vec{c} = \lambda \vec{c} - \mu \vec{a}$. Из теоремы о единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам следует $\lambda = \mu - 1$. Отсюда $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{c} = -\vec{b}$, т.е. сумма первого и третьего векторов коллинеарна второму вектору.

Нетрудно видеть, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, и поэтому точка O — центр тяжести $\triangle ABC$.

Ответ: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

7.028. Стороны параллелограмма $ABCD$ разделены точками A_1, B_1, C_1, D_1 по обходу его границы в отношении k . Стороны четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ разделены точками A_2, B_2, C_2, D_2 по обходу его границ в отношении $\frac{1}{k}$. Доказать, что $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм, гомотетичный данному.

Решение.

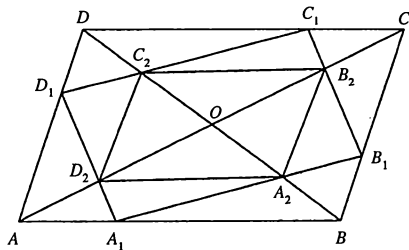


Рис. 7.42

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 7.42). Из условия задачи следует, что:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{1+k} \overrightarrow{OA} + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OB_1} = -\frac{k}{1+k} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1+k} \overrightarrow{OB}.$$

$$\text{Далее, } \overrightarrow{OA_2} = \frac{k}{1+k} \overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{1+k} \overrightarrow{OB_1} \text{ или } \overrightarrow{OA_2} = \frac{1+k^2}{(1+k)^2} \overrightarrow{OB}.$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{OB_2} = \frac{1+k^2}{(1+k)^2} \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OC_2} = \frac{1+k^2}{(1+k)^2} \overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{OD_2} = \frac{1+k^2}{(1+k)^2} \overrightarrow{OA}.$$

Значит, точки A_2, B_2, C_2, D_2 гомотетичны соответственно точкам B, C, D, A относительно точки O с коэффициентом

гомотетии $\frac{1+k^2}{(1+k)^2}$. Итак, $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм, гомотетичный параллелограмму $BCDA$.

QED.

7.029. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. От точки O отложены векторы $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{DD_1}$. Доказать, что $MNPQ$ — параллелограмм.

Решение.

Для того чтобы доказать, что четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, необходимо и достаточно убедиться, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Действительно, по правилу нахождения разности двух векторов имеем: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{AA_1}$.

Аналогично $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{DD_1}$. Учитывая, что $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1C_1}$, получаем: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D_1C_1}$. Так как $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, то $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ и четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм. QED.

7.030. Доказать, что для любых четырех точек A, B, C, D имеет место равенство $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Решение.

Из произвольной точки O проведем радиус-векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_2$, $\overrightarrow{OC} = \vec{r}_3$, $\overrightarrow{OD} = \vec{r}_4$.

Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \vec{r}_4 - \vec{r}_3$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$,

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \vec{r}_2 - \vec{r}_4, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_4 - \vec{r}_1, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2.$$

Далее находим $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{r}_4 - \vec{r}_3) = \vec{r}_2\vec{r}_4 - \vec{r}_1\vec{r}_4 - \vec{r}_2\vec{r}_3 + \vec{r}_1\vec{r}_3$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_4) = \vec{r}_3\vec{r}_2 - \vec{r}_1\vec{r}_2 - \vec{r}_3\vec{r}_4 + \vec{r}_1\vec{r}_4$,

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{r}_4 - \vec{r}_1)(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = \vec{r}_4\vec{r}_3 - \vec{r}_1\vec{r}_3 - \vec{r}_4\vec{r}_2 + \vec{r}_1\vec{r}_2.$$

Тогда сумма $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. QED.

7.031. При повороте вокруг начала координат точка $A(5; 5)$ переходит в точку $B(7; 1)$. Найти косинус угла поворота.

Решение.

Так как координаты векторов $\overrightarrow{OA}(5; 5)$ и $\overrightarrow{OB}(7; 1)$, а $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \angle AOB$, то:

$$\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{5 \cdot 7 + 5 \cdot 1}{\sqrt{25+25} \cdot \sqrt{49+1}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

7.032. Даны три вектора: $\vec{a}_1(-1; 2; 0)$, $\vec{a}_2(3; 1; 1)$, $\vec{a}_3(2; 0; 1)$. Найти координаты вектора $\vec{a} = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \frac{1}{3}\vec{a}_3$.

Решение.

Используя координаты векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, находим $-2\vec{a}_2(-6; -2; -2)$, $\frac{1}{3}\vec{a}_3(\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3})$, откуда $\vec{a}(-1 + (-6) + \frac{2}{3};$

$2 + (-2) + 0; 0 + (-2) + \frac{1}{3})$, т.е. $\vec{a}(-\frac{19}{3}; 0; -\frac{5}{3})$.

Ответ: $\vec{a}(-\frac{19}{3}; 0; -\frac{5}{3})$.

7.033. Найти координаты точки B и единичного вектора \overrightarrow{AB}_0 , если $\overrightarrow{AB}(2; -5; 3)$, $A(1; -2; 4)$.

Решение.

Пусть точка B имеет координаты $(x; y; z)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(x-1; y+2; z-4)$. По условию $\overrightarrow{AB}(2; -5; 3)$, значит, $x=3, y=-7, z=7$, т.е. $B(3; -7; 7)$. Находим длину вектора \overrightarrow{AB} по формуле 7.9: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38}$. Единичный вектор

$$\overrightarrow{AB}_0 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{38}} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{2}{\sqrt{38}}; -\frac{5}{\sqrt{38}}; \frac{3}{\sqrt{38}} \right).$$

Ответ: $B(3; -7; 7); \overrightarrow{AB_0} \left(\frac{2}{\sqrt{38}}; -\frac{5}{\sqrt{38}}; \frac{3}{\sqrt{38}} \right)$.

7.034. При каких значениях x и y вектор $\vec{a}(2; -1; x)$ перпендикулярен к вектору $\vec{b}(1; y; 1)$, если $|\vec{b}| = 4$?

Решение.

По условию $|\vec{b}| = 4$, тогда по формуле 7.9: $\sqrt{1^2 + y^2 + 1^2} = 4$, откуда $y = \pm\sqrt{2}$. Векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны тогда, когда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ т.е. $2 \cdot 1 + (-1) \cdot y + x \cdot 1 = 0$, откуда $x = y - 2$. При $y = -\sqrt{2}$ имеем $x = -\sqrt{2} - 2$; при $y = \sqrt{2}$ имеем $x = \sqrt{2} - 2$.

Ответ: $x = -\sqrt{2} - 2, y = -\sqrt{2}$ или $x = \sqrt{2} - 2, y = \sqrt{2}$.

7.035. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Найти вектор \vec{b} , противоположно направленный вектору \vec{a} , если $|\vec{b}| = 3$.

Решение.

По условию вектор \vec{b} коллинеарный вектору $\vec{a}(2; 3; -1)$. Значит, вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a} = (2\lambda; 3\lambda; -\lambda)$ и $\lambda < 0$, так как \vec{a} и \vec{b} — противоположно направленные векторы. Зная, что $|\vec{b}| = 3$, найдем λ : $\sqrt{(2\lambda)^2 + (3\lambda)^2 + (-\lambda)^2} = 3 \Rightarrow 14\lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Значит, $\vec{b} \left(-\frac{6}{\sqrt{14}}; -\frac{9}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$.

Ответ: $\vec{b} \left(-\frac{6}{\sqrt{14}}; -\frac{9}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$.

7.036. При каких значениях α векторы $(\alpha^3 - 1)\vec{a}$ и $2\alpha\vec{a}$ сонаправленные, если $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Решение.

Данные векторы сонаправленные, если $\alpha^3 - 1$ и 2α имеют одинаковые знаки, поэтому для определения искоемых значений α решаем неравенство $2\alpha(\alpha^3 - 1) > 0$, откуда имеем $\alpha \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$.

Ответ: $\alpha \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$.

7.037. При каком значении m векторы $\vec{a}(4; 6; m)$ и $\vec{b} \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; 3 \right)$ коллинеарные?

Решение.

Как известно, коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты. Поэтому $4 : \left(-\frac{1}{2} \right) = m : 3$, откуда $m = -24$.

Ответ: -24 .

7.038. При каких значениях x векторы $(x^2 - x - 2)\vec{a}$ и $x^3\vec{a}$ противоположно направленные, если $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Решение.

Векторы из условия противоположно направленные, если $x^2 - x - 2$ и x^3 имеют противоположные знаки. Для определения искоемых значений x решаем неравенство $x^3(x^2 - x - 2) < 0$, откуда $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (\infty; 2)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$.

7.039. При каких значениях m длины векторов $\vec{a}(2m; 2; 3)$ и $\vec{b}(-6; -2; m)$ равны?

Решение.

Длины векторов \vec{a} и \vec{b} найдем по формуле 7.9: $|\vec{a}| = \sqrt{(2m)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{4m^2 + 13}$, $|\vec{b}| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + m^2} = \sqrt{m^2 + 40}$.

По условию $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, поэтому $\sqrt{4m^2 + 13} = \sqrt{m^2 + 40} \Rightarrow 4m^2 + 13 = m^2 + 40 \Rightarrow 3m^2 = 27 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$.

Ответ: ± 3 .

7.040. При каких значениях y векторы $(5y - y^2)\vec{p}$ и \vec{p} сонаправленные и $|(y - 6)\vec{p}| \leq |2\vec{p}|$?

Решение.

Данные векторы сонаправленные, если $(5y - y^2) > 0$, откуда $0 < y < 5$. Далее решаем неравенство из условия задачи. Учитывая, что $|\vec{p}| > 0$ и $0 < y < 5$, получаем $6 - y \leq 2$, откуда $y \geq 4$. Окончательно получаем, что условию задачи

удовлетворяют $y \in [4; 5)$.

Ответ: $y \in [4; 5)$.

7.041. Даны точки $A(3; -1; 0)$, $B(2; 2; 4)$, $C(-5; 3; 2)$. Найти единичный вектор \vec{e}_0 , сонаправленный вектору $\vec{e} = 3\vec{AC} - 4\vec{BC}$.

Решение.

Определим координаты векторов \vec{AC} и \vec{BC} . Имеем $\vec{AC}(-5-3; 3-(-1); 2-0) = (-8; 4; 2)$, $\vec{BC}(-5-2; 3-2; 2-4) = (-7; 1; -2)$. Тогда вектор $\vec{e} = 3\vec{AC} - 4\vec{BC}$ имеет координаты $(-8 \cdot 3 - 4 \cdot (-7); 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1; 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-2)) = (4; 8; 14)$. По формуле

7.9: $|\vec{e}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 14^2} = 2\sqrt{69}$. Тогда единичный вектор \vec{e}_0 будет иметь координаты $\vec{e}_0 = \frac{1}{2\sqrt{69}}(4; 8; 14) =$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{69}}; \frac{4}{\sqrt{69}}; \frac{7}{\sqrt{69}} \right).$$

Ответ: $\vec{e}_0 \left(\frac{2}{\sqrt{69}}; \frac{4}{\sqrt{69}}; \frac{7}{\sqrt{69}} \right)$.

7.042. При каких значениях x векторы $(3x^2 - 11x + 6)\vec{a}$ и $(x^8 + 1)\vec{a}$ противоположно направлены, если $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Решение.

Данные векторы противоположно направлены, если $3x^2 - 11x + 6$ и $x^8 + 1$ имеют противоположные знаки. Для определения искомых значений x решаем неравенство $3x^2 - 11x + 6 < 0$ (так как $x^8 + 1 > 0$ при любых x). В итоге получаем, что $x \in (2/3; 3)$.

Ответ: $x \in (2/3; 3)$.

7.043. При каких значениях a и b векторы $(a; -2; 5)$ и $(1; b; -4)$ коллинеарные?

Решение.

Данные векторы коллинеарные, если их соответствующие координаты пропорциональные, т.е. если $\frac{a}{1} = \frac{-2}{b} = \frac{5}{-4}$, откуда

$$a = -\frac{5}{4}; b = \frac{8}{5}.$$

Ответ: $a = -\frac{5}{4}$; $b = \frac{8}{5}$.

7.044. При каких α верно неравенство $|(\alpha - 10)\bar{p}| > 5|\bar{p}|$, если $\bar{p} \neq \vec{0}$?

Решение.

Решаем неравенство $|(\alpha - 10)\bar{p}| > 5|\bar{p}|$. Так как $|\bar{p}| > 0$, то получаем $|\alpha - 10| > 5$, откуда $\alpha \in (-\infty; 5) \cup (15; \infty)$.

Ответ: $\alpha \in (-\infty; 5) \cup (15; \infty)$.

7.045. Найти сумму координат вектора $\sqrt{2}\vec{a} + 7\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{8}\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, где \vec{i} , \vec{j} — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Решение.

Имеем $\sqrt{2}\vec{a} + 7\vec{b} = \sqrt{2}(3\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{8}\vec{j}) + 7(\vec{i} - \vec{j}) = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{i} - 7\vec{j} = 13\vec{i} - 3\vec{j}$. Тогда сумма координат вектора $\sqrt{2}\vec{a} + 7\vec{b}$ равна $13 + (-3) = 10$.

Ответ: 10.

7.046. Векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ коллинеарны. Найти значение выражения $y + z$.

Решение.

Так как векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то $\frac{3}{1} = \frac{8}{-y} = \frac{-1}{z}$, откуда $y = -\frac{8}{3}$; $z = -\frac{1}{3}$. Поэтому $y + z = -3$.

Ответ: -3.

7.047. Даны четыре точки $A(5; 6; -8)$, $B(8; 10; -3)$, $C(1; -2; 4)$, $D(7; 6; 14)$. Коллинеарны ли векторы \overline{AB} и \overline{CD} ?

Решение.

Так как $\overline{AB} = (8-5; 10-6; -3-(-8)) = (3; 4; 5)$, $\overline{CD} = (7-1; 6-(-2); 14-4) = (6; 8; 10)$, то $\overline{CD} = 2\overline{AB}$ т.е. векторы \overline{AB} и \overline{CD} коллинеарны.

Ответ: да.

7.048. Даны два вектора $\vec{a}(8; -7; -2)$, $\vec{b}(7; -11; 8)$. Найти угол φ между ними.

Решение.

По формуле нахождения косинуса угла между векторами получаем:

$$\cos \varphi = \frac{8 \cdot 7 + (-7) \cdot (-11) + (-2) \cdot 8}{\sqrt{8^2 + (-7)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-11)^2 + 8^2}} = \frac{117}{117\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда } \varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

7.049. Доказать, что векторы $\vec{a}(2; -4; 6)$ и $\vec{b}(3; 3; 1)$ перпендикулярны.

Решение.

По формуле скалярного произведения векторов находим: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 0$. Так как выполнено условие $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны. QED.

7.050. Даны векторы $\vec{a}(2; -3; 5)$, $\vec{b}(-1; 1; -3)$, $\vec{c}(3; 7; 1)$. Найти координаты вектора $\vec{p}(x; y; z)$, если $\vec{p} \cdot \vec{a} = 12$, $\vec{p} \cdot \vec{b} = -6$ и $\vec{p} \perp \vec{c}$.

Решение.

По условию

$$\vec{p} \cdot \vec{a} = 2x - 3y + 5z = 12; \quad (1)$$

$$\vec{p} \cdot \vec{b} = -x + y - 3z = -6; \quad (2);$$

и $\vec{p} \perp \vec{c}$, т.е.

$$\vec{p} \cdot \vec{c} = 3x + 7y + z = 0. \quad (3)$$

Далее, решаем систему уравнений (1) – (3), откуда $x = 2$; $y = -1$; $z = 1$. Значит, вектор \vec{p} имеет координаты $(2; -1; 1)$.

Ответ: $\vec{p}(2; -1; 1)$.

7.051. Даны единичные векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} такие, что $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$ и угол между \vec{a} и \vec{c} равен 45° . Найти скалярное произведение векторов $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{q} = -2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Решение.

Имеем

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})(-2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = -6\vec{a}^2 + 3\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{c} + 4\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} - \vec{c}^2 = 6 + 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ + 0 - 2 + 0 - \\ &- 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ + 0 - 1 = -9 - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}(18 + 5\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}(18 + 5\sqrt{2})$.

7.052. Вектор \vec{OA} составляет с осями Ox , Oy и Oz углы, соответственно равные $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Точка B имеет координаты $(-2\sqrt{2}; -2; -\sqrt{2})$. Найти угол между векторами \vec{OA} и \vec{OB} .

Решение.

Пусть \vec{e} — единичный вектор, сонаправленный с вектором \vec{OA} ; тогда $\vec{e} \left(\cos \frac{\pi}{3}; \cos \frac{\pi}{3}; \cos \frac{\pi}{4} \right)$ или $\vec{e} \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

$$\text{Пусть } \angle(\vec{OA}; \vec{OB}) = \varphi; \text{ поэтому } \cos \varphi = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-2\sqrt{2}) + \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sqrt{2})}{1 \cdot \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2)^2 + (-\sqrt{2})^2}} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{14}} = -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Отсюда } \varphi = \arccos \left(-\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{7}} \right) = \arccos \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

7.053. Дан вектор $\vec{m}(1; -2; 5)$. Найти координаты вектора \vec{b} , лежащего в плоскости xOy и перпендикулярного к вектору \vec{m} , если $|\vec{n}| = 2\sqrt{5}$.

Решение.

Вектор \vec{n} лежит в плоскости xOy , поэтому он имеет координаты $(x; y; 0)$. По условию $|\vec{n}| = 2\sqrt{5}$ и $\vec{m} \perp \vec{n}$, поэтому имеем систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + 0^2 = (2\sqrt{5})^2, \\ x \cdot 1 + y \cdot (-2) + 0 \cdot 5 = 0. \end{cases}$ Решив полученную систему, имеем два вектора: $\vec{n}_1(-4; -2; 0)$ и $\vec{n}_2(4; 2; 0)$.

Ответ: $\vec{n}_1(-4; -2; 0)$ или $\vec{n}_2(4; 2; 0)$.

7.054. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей, и $\vec{p} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\sqrt{6}\vec{k}$. Найти косинусы углов, образуемых вектором \vec{p} с векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Решение.

По условию задачи получаем, что вектор \vec{p} имеет координаты $(4; 6; -2\sqrt{6})$. Пусть α, β, γ — углы между вектором \vec{p} и векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно. Тогда $\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{p}|}, \cos \beta = \frac{y}{|\vec{p}|}, \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{p}|}$, где $x = 4, y = 6, z = -2\sqrt{6}$, а $|\vec{p}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-2\sqrt{6})^2} = \sqrt{16 + 36 + 24} = 8$. Следовательно, $\cos \alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \cos \gamma = \frac{-2\sqrt{6}}{8} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}$.

7.055. Даны два вектора: $\vec{a}(x; 1; -1), \vec{b}(1; x; 1)$. При каких значениях x справедливо равенство $(\vec{a} + 3\vec{b})^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2$?

Решение.

По условию $\vec{a}(x; 1; -1), \vec{b}(1; x; 1)$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + 2}, |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + 2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2x - 1$. Далее, преобразуем данное в условии равенство: $(\vec{a} + 3\vec{b})^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2 \Rightarrow |\vec{a}|^2 + 6\vec{a}\vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \Rightarrow 10\vec{a}\vec{b} + 5|\vec{b}|^2 = 0$. Подставляя значения для $|\vec{b}|$ и $\vec{a}\vec{b}$ в последнее равенство, получим уравнение $10(2x - 1) + 5(x^2 + 2) = 0$, откуда $x = 0$ и $x = -4$.

Ответ: при $x = 0$ и $x = -4$.

7.056. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей, и $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3x\vec{k}, \vec{b} = x^2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$. При каких значениях x векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны?

Решение.

Имеем $\vec{a}\vec{b} = (2\vec{i} + \vec{j} + 3x\vec{k})(x^2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) = 2x^2 - 9x + 4$ (так как $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ и $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ по условию). Так как $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Значит, искомые значения x удовлетворяют условию $2x^2 - 9x + 4 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$ и $x = 4$.

Ответ: $1/2; 4$.

7.057. Даны векторы: $\vec{m}(6; -8; 5\sqrt{2}), \vec{n}(2; -4; \sqrt{2})$. Найти угол, образуемый вектором $\vec{m} - \vec{n}$ с осью Oz .

Решение.

Вектор $\vec{m} - \vec{n}$ имеет координаты $(4; -4; 4\sqrt{2})$. Пусть $\vec{k}(0; 0; 1)$ — единичный вектор, направленный вдоль оси Oz , и

$$\angle(\vec{m} - \vec{n}, \vec{k}) = \gamma. \text{ Тогда } \cos \gamma = \frac{(\vec{m} - \vec{n})\vec{k}}{|\vec{m} - \vec{n}| |\vec{k}|} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{64} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

7.058. Даны три ненулевых вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \parallel \vec{a}_3$ и $(\vec{a}_2 + \vec{a}_3) \parallel \vec{a}_1$.

Решение.

По условию $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \parallel \vec{a}_3 \Rightarrow \vec{a}_3 = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2$; $(\vec{a}_2 + \vec{a}_3) \parallel \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = n\vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_3 = n\vec{a}_1 - \vec{a}_2$. В силу единственности разложения \vec{a}_3 по \vec{a}_1 и \vec{a}_2 заключаем, что $m = n = -1$. Значит, $\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 - \vec{a}_2$. Тогда $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{0}$.

Ответ: $\vec{0}$.

7.059. Доказать истинность неравенства $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$.

Решение.

Пусть вектор \vec{a} имеет координаты $\left(\frac{2x}{1+x^2}; \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, вектор \vec{b} — координаты $\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}; \frac{2y}{1+y^2}\right)$. Легко проверить, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Из определения скалярного произведения векторов следует, что $|\vec{a}\vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$.

$$\text{Но } |\vec{a}\vec{b}| = \left| \frac{2x(1-y^2) + 2y(1-x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = \left| \frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = 1, \text{ так как } |\vec{a}| |\vec{b}| = 1.$$

$$\text{Тогда истинно двойное неравенство } -\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

QED.

7.060. Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна к каждой из них.

Решение.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — единичные векторы, направленные вдоль ребер трехгранного угла. Тогда направляющие векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ биссектрис трех плоских углов трехгранного угла запишутся в виде $\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{b}_2 = \vec{e}_3 + \vec{e}_1$, $\vec{b}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Так как $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$, то $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(\vec{e}_3 + \vec{e}_1) = 0 \Rightarrow \vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_1^2 + \vec{e}_2\vec{e}_1 = 0 \Rightarrow \vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_1 = -1$. (1) Далее, $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_3 = -1 + 1 = 0$ (см. (1)) $\Rightarrow \vec{b}_1 \perp \vec{b}_3$. Аналогично получаем, что $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0 \Rightarrow \vec{b}_2 \perp \vec{b}_3$. QED.

7.061. Найти модуль проекции вектора $\vec{m}(5; -3)$ на ось, параллельную вектору $\vec{n}(-6; 4)$.

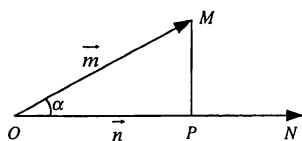


Рис. 7.43

Решение.

Пользуясь рис. 7.43, получаем: $\pm OP = |\vec{m}| \cos \alpha$. Так как $\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| |\vec{n}| \cos \alpha$, то $\pm OP = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$. В силу того, что \vec{n} — направляющий вектор оси, на которую

проектируется вектор \vec{m} , то $\pm OP = \frac{5 \cdot (-6) + (-3) \cdot 4}{\sqrt{(-6)^2 + 4^2}} = \frac{-42}{\sqrt{52}} = -\frac{21}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow OP = \frac{21}{\sqrt{13}}.$$

Ответ: $\frac{21}{\sqrt{13}}$.

7.062. Найти единичный вектор, перпендикулярный к векторам $\vec{m} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Решение.

Пусть $\vec{e}(x; y; z)$ — искомый единичный вектор. Тогда

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (1)$$

Векторы \vec{m} и \vec{n} имеют координаты (1; 1; 2) и (2; 1; 1) соответственно. По условию,

$$\vec{e} \cdot \vec{m} = 0 \Rightarrow x + y + 2z = 0 \quad (2)$$

и

$$\vec{e} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 2x + y + z = 0. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1) – (3), находим $x = \frac{1}{\sqrt{11}}$, $y = -\frac{3}{\sqrt{11}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{11}}$ или $x = -\frac{1}{\sqrt{11}}$, $y = \frac{3}{\sqrt{11}}$, $z = -\frac{1}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}; -\frac{3}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ или $\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{3}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

7.063. Даны векторы: $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(1; -3; 2)$, $\vec{c}(3; 2; -4)$. Найти вектор \vec{p} , если $\vec{p} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{p} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{p} \cdot \vec{c} = 20$.

Решение.

Пусть вектор \vec{p} имеет координаты $(x; y; z)$. По условию

$$\vec{p} \cdot \vec{a} = -5 \Rightarrow 2x - y + 3z = -5, \quad (1) \quad \vec{p} \cdot \vec{b} = -11 \Rightarrow x - 3y + 2z = -11, \quad (2) \quad \vec{p} \cdot \vec{c} = 20 \Rightarrow 3x + 2y - 4z = 20. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1) – (3), находим $x = 2$, $y = 3$, $z = -2$.

Ответ: (2; 3; -2).

7.064. Даны векторы $\vec{m}(3; 2; 2)$ и $\vec{n}(18; -22; -5)$. Найти вектор \vec{a} , если он перпендикулярен к векторам \vec{m} и \vec{n} , образует с осью Ox тупой угол, а его длина равна 14.

Решение.

Пусть $(x; y; z)$ — координаты вектора \vec{a} . Используя условия задачи, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{a} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{a} = 0, \\ |\vec{a}| = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0, \\ 18x - 22y - 5z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14^2 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 6, z = -12 \text{ или } x = -4, y = -6, z = 12.$$

Если $\vec{j}(0; 1; 0)$ — единичный вектор, направленный вдоль оси Oy , то $\vec{a} \cdot \vec{j} = y < 0$ (так как вектор \vec{a} образует тупой угол с осью Oy). Следовательно, вектор \vec{a} имеет координаты $(-4; -6; 12)$.

Ответ: $(-4; -6; 12)$.

7.065. Дан равносторонний треугольник ABC . На продолжении стороны AB взята точка M такая, что $\angle BCM = 15^\circ$. Найти k , если $k \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}$.

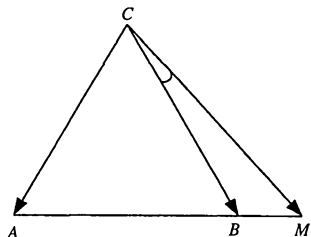


Рис. 7.44

Решение.

Пусть $|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = a$, тогда $|\overrightarrow{CM}| = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ (это следует из теоремы синусов для $\triangle BCM$ (рис. 7.44)). Учитывая равенство $k \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}$, получим $\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}}{1+k}$. Действительно, $k \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow k(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}) = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}}{1+k}$. Тогда $\overrightarrow{CM}^2 = \frac{1}{(1+k)^2} (\overrightarrow{CA}^2 + 2k\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + k^2\overrightarrow{CB}^2)$ или $a^2 \frac{3}{2} = \frac{1}{(1+k)^2} (a^2 + ka^2 + k^2 a^2)$. Отсюда: $k^2 + 4k + 1 = 0$ и $k = -2 - \sqrt{3}$.

Ответ: $-2 - \sqrt{3}$.

7.066. В произвольном четырехугольнике $ABCD$ имеем $|AB| = a, |CD| = b, |EF| = c$, где E и F — середины отрезков AC и BD . Найти угол между прямыми AB и CD .

Решение.

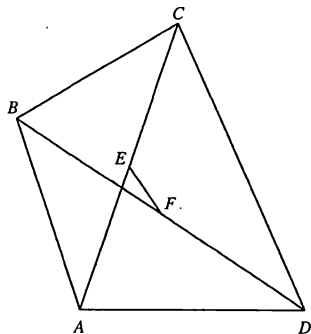


Рис. 7.45

Из условия задачи имеем (рис. 7.45): $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}$.

Сложив эти равенства, получим $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$. Возведем полученное равенство в квадрат: $4c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB})$. Отсюда находим, что

$$\cos \angle(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{a^2 + b^2 - 4c^2}{2ab}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \angle(DC, AB) = \frac{|a^2 + b^2 - 4c^2|}{2ab} \Rightarrow \angle(DC, AB) =$$

$$= \arccos \frac{|a^2 + b^2 - 4c^2|}{2ab}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{|a^2 + b^2 - 4c^2|}{2ab}.$$

7.067. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Известно, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$. Доказать, что треугольник ABC правильный.

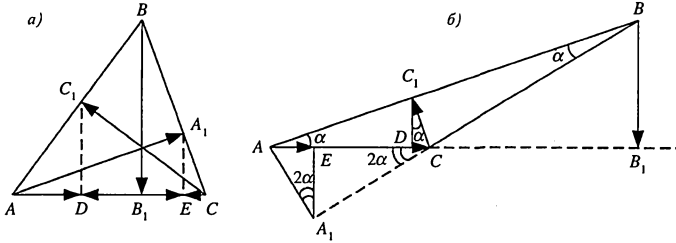


Рис. 7.46

Решение.

Рассмотрим сначала остроугольный $\triangle ABC$, удовлетворяющий условиям задачи. Спроектируем каждый из векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ на прямую AC . Так как проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых, получаем $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ (рис. 7.46, а). Следовательно, $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) + (\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}) = \vec{0}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CE}$. Пусть $\angle ACB = \gamma$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $|CE| = |CA_1| \cos \gamma = |AC| \cos^2 \gamma$, $|AD| = |AA_1| \cos \alpha = |AC| \cos^2 \alpha$, а так как $|AD| = |CE|$, то $\cos^2 \gamma = \cos^2 \alpha \Rightarrow \gamma = \alpha$. Аналогично доказывается, что $\angle BAC = \angle ABC$. Следовательно, $\triangle ABC$ является правильным.

Предположим теперь, что $\triangle ABC$ тупоугольный и удовлетворяет условиям задачи (рис. 7.46, б). Для определенности $\angle ACB > 90^\circ$. Проектируем векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ на прямую AB и, рассуждая аналогично предыдущему, доказываем, что $\angle ABC = \angle BAC = \alpha$. Проектируя эти же векторы на прямую AC , получаем: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$. Легко видеть (см. рис. 7.46, б), что $|DC| = |AC| \sin^2 \alpha$, $|AE| = |AC| \sin^2 2\alpha$. Уже было доказано, что $|AE| = |DC|$, отсюда $\sin^2 \alpha = \sin^2 2\alpha$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$. Угол $\angle BAC$ острый, поэтому $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Но тогда $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$, что противоречит предположению, что угол $\angle ACB$ тупой. Легко также видеть, что $\angle ACB$ не может быть и прямым. Следовательно, $\triangle ABC$ обязан быть остроугольным и, по доказанному, правильным. **QED.**

7.068. Дан прямоугольный тетраэдр $DABC$ с прямым трехгранным углом D . Найти множество точек M , для которых $2|MD|^2 = |MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$.

Решение.

Имеем $2\overrightarrow{MD}^2 = (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DM})^2 + (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DM})^2 + (\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DC})^2$. Отсюда $\overrightarrow{DM}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 - 2\overrightarrow{DM}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = 0$,

Так как $(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})^2 = \overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2$, то $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$. Итак, искомое множество точек есть одна точка M , являющаяся вершиной прямоугольного параллелепипеда, построенного на ребрах DA , DB и DC .

7.069. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к конгруэнтным сторонам, взаимно перпендикулярные. Найти величину угла между конгруэнтными сторонами этого треугольника.

Решение.

Пусть $|AB| = |AC|$ (рис. 7.47). По условию медианы BB_1 и CC_1 перпендикулярные, поэтому

$$\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0. \quad (1)$$

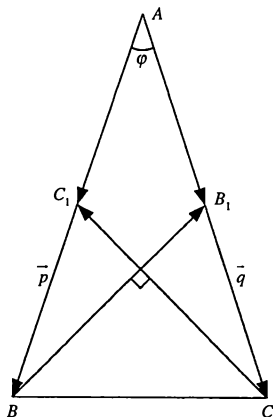


Рис. 7.47

Разложим векторы $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ по векторам $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AC}$. Имеем: $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{q} - \vec{p}$, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{p} - \vec{q}$. Тогда равенство (1) примет вид $\left(\frac{1}{2}\vec{q} - \vec{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{p} - \vec{q}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\vec{q}\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{p}^2 - \frac{1}{2}\vec{q}^2 + \vec{p}\vec{q} = 0 \Rightarrow \frac{5}{4}\vec{p}\vec{q} - \frac{1}{2}\vec{p}^2 - \frac{1}{2}\vec{q}^2 = 0$. Обозначив $|\vec{p}| = |\vec{q}| = m$ и $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \varphi$, из определения скалярного произведения получим $\frac{5}{4}m^2 \cos \varphi - m^2 = 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow \varphi = \arccos 0,8$.

Ответ: $\arccos 0,8$.

7.070. Даны неперпендикулярные прямые a и b . Из различных точек A_1, A_2, A_3 прямой a на прямую b проведены перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 . Доказать, что $\frac{|A_1A_2|}{|A_2A_3|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_2B_3|}$.

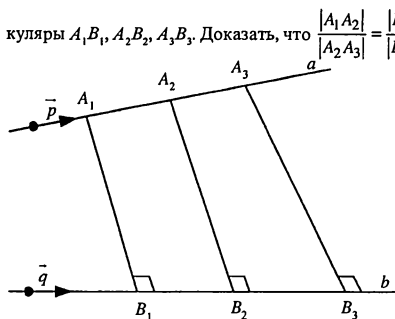


Рис. 7.48

Решение.

Из условия задачи следует, что точки B_1, B_2, B_3 различные. По правилу многоугольника имеем (рис. 7.46):

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2A_2}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2B_3} + \overrightarrow{B_3A_3}. \quad (2)$$

Пусть \vec{p} и \vec{q} — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ соответственно; угол между ними обозначим через φ .

Умножив обе части равенства (1) на \vec{q} , получим $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{q} = \overrightarrow{B_1B_2} \cdot \vec{q}$.

Но $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{q} = |A_1A_2| \vec{p}\vec{q} = |A_1A_2| \cos \varphi$ и $\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \vec{q} = |B_1B_2|$, поэтому

$|A_1A_2| \cos \varphi = |B_1B_2|$. Умножив на \vec{q} обе части равенства (2), аналогично получим $|A_2A_3| \cos \varphi = |B_2B_3|$. Из двух последних равенств вытекает истинность доказываемого равенства. **QED.**

7.071. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, у которого диагональ CD проходит через середину диагонали AB . Доказать, что $2|CD|^2 = |AC|^2 + |CB|^2 + |BD|^2 + |DA|^2$.

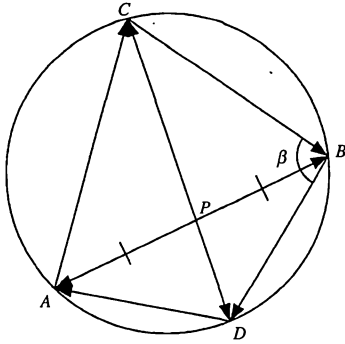


Рис. 7.49

Решение.

Пусть $S = |AC|^2 + |CB|^2 + |BD|^2 + |DA|^2$, тогда $S = (\overline{PC} - \overline{PA})^2 + (\overline{PB} - \overline{PC})^2 + (\overline{PD} - \overline{PB})^2 + (\overline{PA} - \overline{PD})^2$ (рис. 7.49). Раскрывая скобки и упрощая, получим: $S = 2\overline{PC}^2 + 4\overline{PA}^2 + 2\overline{PD}^2$. Так как $\overline{PB} = -\overline{PA}$, то $S = 2(\overline{PC}^2 - 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{PD}^2)$. Но из свойства отрезков хорд окружности следует, что $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$. Значит, $S = 2(\overline{PC}^2 - 2\overline{PC} \cdot \overline{PD} + \overline{PD}^2) = 2(\overline{PD} - \overline{PC})^2 = 2\overline{CD}^2$. Итак, $2|CD|^2 = |AC|^2 + |CB|^2 + |BD|^2 + |DA|^2$.

QED.

7.072. Доказать, что плоскость, проходящая через концы трех ребер куба, имеющих общую точку, перпендикулярна к диагонали куба, выходящей из этой же точки.

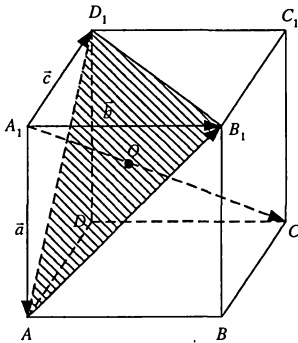


Рис. 7.50

Решение.

Рассмотрим диагональ куба A_1C_1 и сечение AB_1D_1 (рис. 7.50). Для доказательства того, что $A_1C_1 \perp AB_1D_1$, достаточно доказать, что $A_1C_1 \perp AB_1$ и $A_1C_1 \perp AD_1$. Разложим векторы $\overline{A_1C_1}$ и $\overline{AB_1}$ по векторам $\overline{A_1A} = \vec{a}$, $\overline{A_1B_1} = \vec{b}$, $\overline{A_1D_1} = \vec{c}$: $\overline{A_1C_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overline{AB_1} = \vec{b} - \vec{a}$. Тогда $\overline{A_1C_1} \cdot \overline{AB_1} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}^2 - \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b}^2 - \vec{a}^2$ (так как $\vec{b} \perp \vec{c}$ и $\vec{a} \perp \vec{c}$). Поэтому $\overline{A_1C_1} \cdot \overline{AB_1} = |A_1B_1|^2 - |A_1A|^2 = 0$, значит, $A_1C_1 \perp AB_1$. Аналогично доказывается, что $A_1C_1 \perp AD_1$.

Следовательно, $A_1C_1 \perp AB_1D_1$.

QED.

7.073. Концы отрезка AB принадлежат граням двугранного угла, равного φ . Расстояния $|AA_1|$ и $|BB_1|$ от точек A и B до ребра соответственно равны a и b , $|A_1B_1| = c$. Найти $|AB|$.

Решение.

Обозначим $\overline{A_1A} = \vec{a}$, $\overline{B_1B} = \vec{b}$, $\overline{A_1B_1} = \vec{c}$ (рис. 7.51). По правилу многоугольника $\overline{AB} = -\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$; отсюда $\overline{AB}^2 = (-\vec{a})^2 + c^2 + b^2 - 2\vec{a}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c}$. Так как отрезки A_1A и B_1B перпендикулярны к отрезку A_1B_1 , то $\vec{a}\vec{c} = 0$, $\vec{b}\vec{c} = 0$ и

$$|AB|^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2\vec{a}\vec{b}. \quad (1)$$

Векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены сторонам линейного угла, поэтому $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$. Из равенства (1) следует, что

$$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \varphi}.$$

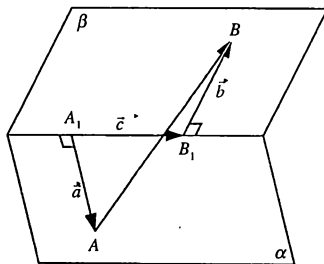


Рис. 7.51

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \varphi}$.

7.074. Лучи a, b, c, d имеют общее начало. Доказать, что

$$\cos \angle(a, b) + \cos \angle(a, c) + \cos \angle(a, d) + \cos \angle(b, c) + \cos \angle(b, d) + \cos \angle(c, d) \geq -2.$$

Решение.

На данных лучах отложим единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$. Преобразовав очевидное неравенство $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)^2 \geq 0$ с помощью формулы $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$ и учтя, что $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = |\vec{e}_4| = 1$, получим доказываемое неравенство. QED.

7.075. Сумма двух плоских углов трехгранного угла равна 180° . Доказать, что их общее ребро перпендикулярно к биссектрисе третьего плоского угла.

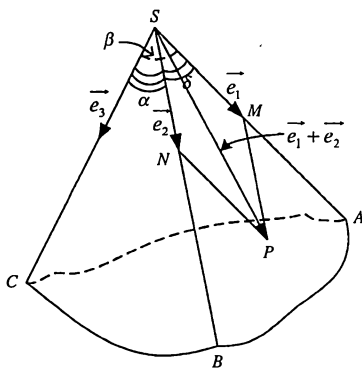


Рис. 7.52

Решение.

Пусть дан трехгранный угол $SABC$ (рис. 7.52), в котором $\alpha + \beta = 180^\circ$. Отложим на ребрах от вершины единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Направление биссектрисы угла ASB можно задать с помощью вектора $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ (параллелограмм

$SMPN$ — ромб). Поэтому достаточно доказать, что

$$\overrightarrow{e_3} \cdot (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = 0. \quad (1)$$

Имеем $\overrightarrow{e_1 e_3} = \cos \beta$, $\overrightarrow{e_2 e_3} = \cos \alpha$. Но $\cos \beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Следовательно, $\overrightarrow{e_1 e_3} + \overrightarrow{e_2 e_3} = 0$ и равенство (1) верно.

QED.

7.076. Даны три единичные компланарные вектора $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, для которых $\overrightarrow{e_1 e_2} + \overrightarrow{e_2 e_3} + \overrightarrow{e_3 e_1} = -1$. Доказать, что два из этих векторов противоположно направленные.

Решение.

Из условия задачи следует:

$$\overrightarrow{e_1 e_2} + \overrightarrow{e_2 e_3} + \overrightarrow{e_3 e_1} + \overrightarrow{e_1}^2 = 0, \quad (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}) = 0;$$

$$\overrightarrow{e_1 e_2} + \overrightarrow{e_2 e_3} + \overrightarrow{e_3 e_1} + \overrightarrow{e_2}^2 = 0, \quad (\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}) = 0;$$

$$\overrightarrow{e_1 e_2} + \overrightarrow{e_2 e_3} + \overrightarrow{e_3 e_1} + \overrightarrow{e_3}^2 = 0, \quad (\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1})(\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2}) = 0.$$

Если допустить, что $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \neq 0$, $\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \neq 0$, $\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1} \neq 0$, то приходим к выводу, что векторы $\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ и $\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1}$ перпендикулярны к вектору $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$. Но по условию векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ компланарные, поэтому векторы $\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ и $\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1}$ должны быть коллинеарными. Между тем эти векторы перпендикулярные (см. последнее равенство). Полученное противоречие и указывает, что среди данных трех векторов два вектора противоположно направленные, а третий — произвольный единичный вектор.

QED.

7.077. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Известно, что

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}. \quad (1)$$

Доказать, что треугольник ABC правильный.

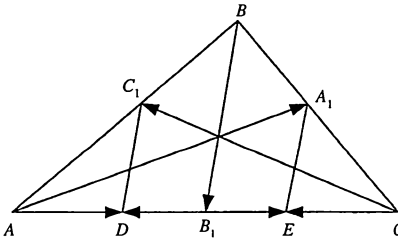


Рис. 7.53

Решение.

Спроектируем векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ на прямую AC параллельно прямой B_1B . Так как проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых, то, воспользовавшись равенством (1), получаем (рис. 7.53): $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Следовательно, $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) + (\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}) = \vec{0}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CE}$.

Пусть $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$. Так как биссектриса делит сторону на отрезки, длины которых пропорциональны длинам прилежащих к ним сторон, то $|BA_1| = kc$, $|A_1C| = kb$, $|BC_1| = na$, $|C_1A| = nb$, где k и n — коэффициенты пропорциональности. При-

меня теорему Фалеса, имеем: $\frac{|B_1E|}{|EC|} = \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \Rightarrow \frac{|B_1E|}{|EC|} = \frac{c}{b}$. Следовательно, $|B_1E| = lc$, $|EC| = lb$. Аналогично,

$\frac{|AD|}{|DB_1|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{b}{a}$, $|AD| = mb$, $|DB_1| = ma$. Выше было доказано, что $|AD| = |EC|$, тогда $mb = lb$ и $m = l$, $|DB_1| = la$. Снова

применим теорему о делении стороны биссектрисой: $\frac{|B_1C|}{|AB_1|} = \frac{|BC|}{|AB|}$, $\frac{|B_1E| + |EC|}{|AD| + |DB_1|} = \frac{|BC|}{|AB|}$. Подставляя во второе равенство

найденные значения для $|B_1E|$, $|EC|$, $|AD|$, $|DB_1|$, получим $\frac{c+b}{b+a} = \frac{a}{c}$;

тогда $c(c+b) - a(b+a) = 0 \Rightarrow (c-a)(a+b+c) = 0 \Rightarrow a = c$. Аналогично доказывается, что $a = b$. Таким образом, утверждение задачи доказано. **QED.**

7.078. Найти угол между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} , если $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 56$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$.

Решение.

По условию $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 56$. Преобразуем левую часть этого равенства: $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (2\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 + 4\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 5\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 - 6|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}; \vec{b})$. Учитывая условие задачи и то, что $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ и $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$, имеем $56 = 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 2 \cdot 3 \cos\angle(\vec{a}; \vec{b}) \Rightarrow \cos\angle(\vec{a}; \vec{b}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \arccos(-\frac{1}{2}) = 120^\circ$.

Ответ: 120° .

7.079. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Разложить вектор \vec{AC} по векторам \vec{AB} и \vec{AE} .

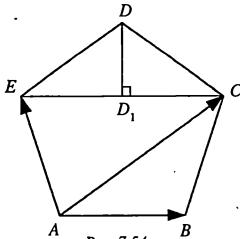


Рис. 7.54

Решение.

Пользуясь рис. 7.54, запишем очевидное разложение $\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{EC}$. Так как дан правильный пятиугольник, то легко установить, что $EC \parallel AB$, т.е. $\vec{EC} = k\vec{AB}$, и тогда

$$\vec{AC} = k\vec{AB} + \vec{AE}, \quad (1)$$

$$\text{где } k = \frac{EC}{AB}. \quad (2)$$

Пусть $AB = a$. Проведя $DD_1 \perp CE$, в $\triangle CDD_1$ имеем $CD_1 = CD \cos \angle D_1CD$. Так как $\angle CDE = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ$, то $\angle D_1CD = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$, откуда

$$EC = 2CD_1 = 2a \cos 36^\circ.$$

По тригонометрическим формулам находим, что $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Подставляя это значение в (3), получим $EC = a \frac{\sqrt{5}+1}{4}$;

затем из (2) находим $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, и тогда (1) запишется в виде $\vec{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{AB} + \vec{AE}$.

$$\text{Ответ: } \vec{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{AB} + \vec{AE}.$$

7.080. Точки E и F — середины отрезков AB и CD . Доказать, что

$$EF \leq \frac{1}{2}(AC + BD), \quad EF \leq \frac{1}{2}(BC + DA).$$

Решение.

Проведем $AM \parallel BD$ и $DM \parallel AB$ (рис. 7.55). Тогда $\vec{AM} = \vec{BD}$, $\vec{DM} = \vec{BA}$.

Так как $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$, $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$, то, сложив их почленно, получим

$$\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}. \quad (1)$$

Далее запишем разложение:

$$\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}, \quad \vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DF} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC}. \quad (2)$$

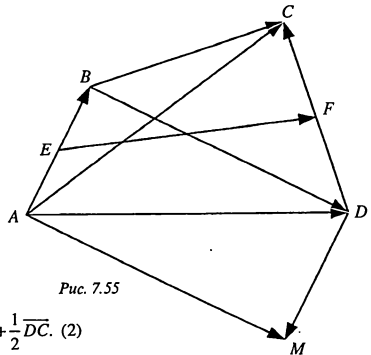


Рис. 7.55

Учитывая, что $\overline{AB} = -\overline{BA}$, $\overline{CD} = -\overline{DC}$, сложим разложения (2) и получим $2\overline{EF} = \overline{BC} + \overline{AD}$ или $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})$, откуда из-за (1) имеем $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$. Теперь, воспользовавшись неравенством $|\overline{a+b}| \leq |\overline{a}| + |\overline{b}|$, окончательно получим

$$EF \leq \frac{1}{2}(BC + DA) \text{ и } EF \leq \frac{1}{2}(AC + BD).$$

QED.

7.081. Дан треугольник ABC , P — точка пересечения его медиан. Доказать, что $OP < \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$, где O — произвольная точка пространства.

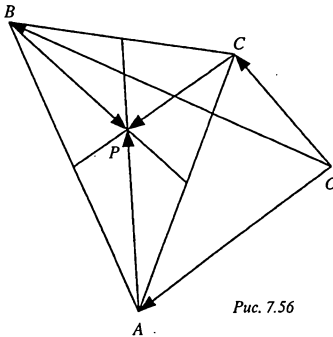


Рис. 7.56

Решение.

Запишем разложения (рис. 7.56): $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$, $\overline{OP} = \overline{OB} + \overline{BP}$, $\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$. Складывая почленно эти разложения, имеем

$$3\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} \Rightarrow \overline{OP} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) + \frac{1}{3}(\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}).$$

Воспользовавшись неравенством $|\overline{a+b}| \leq |\overline{a}| + |\overline{b}|$, получим

$$OM \leq \frac{1}{3}(OA + OB + OC) + \frac{1}{3}(AP + BP + CP) \Rightarrow OM < \frac{1}{3}(OA + OB + OC).$$

QED.

ТЕМА: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

7.082. Вычислить периметр треугольника с вершинами в точках $A(1; 3)$, $B(2; 3)$, $C(2; 1)$.

Решение.

По формуле 7.10 $a = BC = \sqrt{(2-2)^2 + (1-3)^2} = 2$, $b = AC = \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{2}$, $c = AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-3)^2} = 1$. Следовательно, $p = a + b + c = 3 + \sqrt{2}$.

Ответ: $3 + \sqrt{2}$.

7.083. Даны две точки $M_1(1; 2)$, $M_2(3; 4)$. На прямой M_1M_2 найти точку M , которая в три раза ближе к M_1 , чем к M_2 , и находится вне отрезка M_1M_2 . Найти середину этого отрезка.

Решение.

Искомая точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $l = -\frac{1}{3}$. Координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении l , определяются формулами 7.13: $x = \frac{-1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)} = -3$, $y = \frac{-2 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 4}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)} = -5$; следовательно, $M(-3; -5)$. С помощью формулы 7.14 находим точку $N(1; 1)$ — середину отрезка M_1M_2 .

Ответ: $M(-3; -5)$, $N(1; 1)$.

7.084. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами в точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

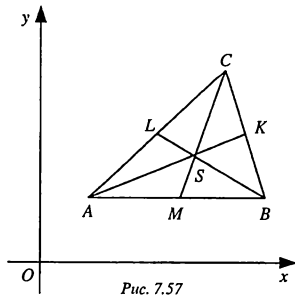


Рис. 7.57

Решение.

Пусть $S(x; y)$ — точка пересечения медиан AK , BL , CM $\triangle ABC$ (рис. 7.57). Так как точка L — середина отрезка AC , то она имеет координаты $x_L = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$, $y_L = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)$. Отрезок BL точкой S делится в отношении $l = \frac{2}{1} = 2$. Считая точку B первой, точку L второй, по формуле 7.13 находим $x = \frac{x_2 + 2(x_1 + x_3)/2}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_2 + 2(y_1 + y_3)/2}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)\right)$.

7.085. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(4; 3)$, $M_2(2; 5)$.

Решение.

Пусть $M(x; y)$ произвольная точка данного геометрического множества. По условию $|M_1M| = |M_2M|$. По формуле 7.10 получаем: $|M_1M| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2}$, $|M_2M| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$. Подставляя эти выражения в равенство $|M_1M| = |M_2M|$, находим уравнение данного множества точек: $\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$. Упростив это уравнение (возводя в квадрат, раскрывая скобки, производя преобразования), получим $3x + y - 1 = 0$. Это уравнение прямой линии.

Ответ: $3x + y - 1 = 0$.

7.086. Точка M движется так, что в любой момент времени ее расстояние до точки $A(4; 0)$ вдвое больше расстояния до точки $B(1; 0)$. Найти уравнение траектории движения точки M .

Решение.

Текущие координаты точки M обозначим через x, y . По условию $|MA| = 2|MB|$. По формуле 7.10 находим $|MA| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, $|MB| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Следовательно, уравнение траектории движения точки M : $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Упростив это уравнение, получаем $x^2 + y^2 = 4$. Итак, траекторией движения точки M является окружность радиусом $R = 2$ с центром в начале координат.

Ответ: $x^2 + y^2 = 4$.

7.087. Найти точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$, $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 32$.

Решение.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4x - 12y + 8 = 0. \end{cases}$ Вычитая второе уравнение из первого, получим $14x + 28 = 0 \Rightarrow x = -2$. Второе уравнение при $x = -2$ сводится к квадратному относительно y : $y^2 - 12y + 20 = 0 \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = 10$.

Ответ: $(-2; 2)$ и $(-2; 10)$.

7.088. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами $(4; 1)$, $(-6; 2)$.

Решение.

Подставив координаты заданных точек в уравнение прямой 7.18, получим систему уравнений: $\begin{cases} -1 = 4k + b, \\ 2 = -6k + b, \end{cases}$ решив которую, находим $k = 0,3$, $b = 0,2$ и получаем уравнение $3x + 10y - 2 = 0$ искомой прямой.

Ответ: $3x + 10y - 2 = 0$.

7.089. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(3; 4)$, $B(5; 2)$, $C(1; 2)$. Найти координаты четвертой вершины D .

Решение.

Точка O пересечения диагоналей — середина каждой из диагоналей, поэтому она является серединой отрезка AC . По формулам 7.14 найдем ее координаты: $x_0 = \frac{-3-1}{2} = -2$, $y_0 = \frac{4-2}{2} = 1$. Так как точка O является серединой диагонали BD , то по той же формуле можно найти координаты четвертой вершины D : $\frac{-5+x_D}{2} = -2$, $\frac{2+y_D}{2} = 1$, откуда $x_D = 1$, $y_D = 0$, т.е. $D(1; 0)$.

Ответ: $D(1; 0)$.

7.090. Найти угловой коэффициент k и отрезки a и b , отсекаемые на осях Ox и Oy прямой $x + 2y + 1 = 0$.

Решение.

Преобразуем данное уравнение прямой к виду $y = kx + b$: $x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -x - 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, откуда $k = -\frac{1}{2}$. Для нахождения отрезков a и b подставим в уравнение прямой координаты $(a; 0)$ и $(0; b)$ соответственно. Получим:

$$a + 2 \cdot 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1; \quad 0 + 2 \cdot b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $k = -\frac{1}{2}$; $a = -1$; $b = -\frac{1}{2}$.

7.091. Дана окружность $x^2 + y^2 = 5$. Составить уравнение прямой p , параллельной оси абсцисс и пересекающей окружность в таких точках A и B , что $AB = 2$.

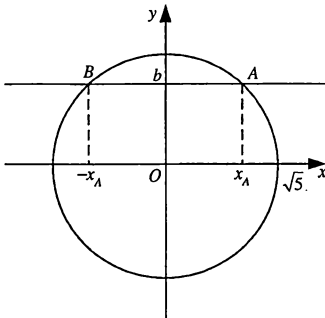


Рис. 7.58

Решение.

Так как прямая $p \parallel Ox$, то ее уравнение имеет вид $y = b$. Пусть точка A имеет координаты $(x_A; b)$, а точка B — $(-x_A; b)$ (рис. 7.58). По условию $AB = 2$, т.е. $2 = \sqrt{(x_A - (-x_A))^2 + (b - b)^2}$, откуда $x_A = 1$. Так как точка $A(1; b)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = 5$, то ее координаты удовлетворяют этой окружности, т.е. $1^2 + b^2 = 5 \Rightarrow b = \pm 2$.

Ответ: $y = \pm 2$.

7.092. Какое множество точек плоскости определяет уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 29 = 0$?

Решение.

Так как это уравнение сводится к уравнению $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 0$, которому удовлетворяют лишь координаты $x = 2$, $y = -5$, то оно определяет единственную точку с координатами $(2; -5)$.

Ответ: $(2; -5)$.

7.093. Даны четыре точки: $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 4)$, $D(1; 2)$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

Решение.

Вычислив длины диагоналей $AC = \sqrt{(0-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$, $BD = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$ и координаты середины отрезков

AC и BD $x_1 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, получаем, что $ABCD$ — прямоугольник. QED.

7.094. Даны координаты трех вершин равнобедренной трапеции $ABCD$: $A(2; 1)$, $B(3; 1)$, $C(4; 0)$. Найти координаты точки D , если $\overline{AB} = \alpha \overline{CD}$.

Решение.

Так как $\overline{AB} = \alpha \overline{CD}$, то $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Пусть $D(x; y)$. По условию $ABCD$ — равнобедренная трапеция, то $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ и вектор \overline{AC} не параллелен вектору \overline{AC} . Находим координаты векторов \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{AC} , \overline{BD} : $\overline{AB}(1; -2)$, $\overline{CD}(x+4; y)$, $\overline{AC}(-6; -1)$, $\overline{BD}(x-3; y+1)$. Из параллельности векторов \overline{AB} и \overline{CD} следует, что

$$\frac{1}{x+4} = \frac{-2}{y} \Rightarrow y = -2x - 8 \quad (1).$$

Так как $|\overline{AC}|^2 = |\overline{BD}|^2$, то

$$36 + 1 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y = 27. \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2), находим $x_1 = 1,4$ и $y_1 = 5,2$ или $x_2 = 3$ и $y_2 = 2$. Этим значениям соответствуют два вектора: $\overline{BD}(-4,4; -4,2)$ и $\overline{BD}(-6; -1)$, но последний вектор — коллинеарный \overline{AC} , т.е. не удовлетворяет условию непараллельности этих векторов.

Ответ: $D(1,4; 5,2)$.

7.095. Доказать, что в четырехугольнике с вершинами в точках $A(2; 3)$, $B(3; 1)$, $C(7; 7)$, $D(3; 0)$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, и стороны BC и AD параллельны между собой.

Решение.

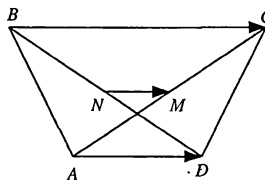


Рис. 7.59

Чтобы доказать, что $NM \parallel BC \parallel AD$, достаточно убедиться в коллинеарности векторов \overline{NM} , \overline{BC} , \overline{AD} (рис. 7.59). Найдем координаты векторов \overline{BC} и \overline{AD} : $\overline{BC}(4; 6)$, $\overline{AD}(5; 3)$. Векторы \overline{BC} и \overline{AD} связаны равенством $\overline{BC} = 2\overline{AD}$, откуда заключаем, что они коллинеарны. Координаты точек N и M (середины диагоналей AC и BD) найдем по формулам 7.14: $N\left(\frac{-2+7}{2}; \frac{-3+7}{2}\right) \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; 2\right)$

$$M\left(\frac{-3+3}{2}; \frac{1+0}{2}\right) \Rightarrow M\left(0; \frac{1}{2}\right) \text{ Тогда } \overline{NM}\left(0 - \frac{5}{2}; \frac{1}{2} - 2\right) \Rightarrow \overline{NM}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Сравнив координаты векторов \overline{AD} и \overline{NM} , заключаем, что $\overline{AD} = -2\overline{NM}$, следовательно, эти векторы коллинеарны. Таким образом, коллинеарные векторы \overline{NM} , \overline{BC} , \overline{AD} , а значит, $NM \parallel BC \parallel AD$.

QED.

7.096. Дан треугольник ABC : $A(2; 3)$, $B(4; 1)$, $C(6; 5)$. Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A .

Решение.

Найдем координаты точки $M(x; y)$ — середины стороны BC : $M\left(\frac{4+6}{2}; \frac{1+5}{2}\right) \Rightarrow M(5; 2)$. Искомому уравнению медианы будут удовлетворять две точки A и M . Следовательно, подставив координаты этих точек в уравнение прямой 7.18, получим систему уравнений: $\begin{cases} 3 = -2k + b, \\ -3 = 5k + b, \end{cases}$ откуда $k = -\frac{5}{7}$, $b = \frac{11}{7}$. Следовательно, уравнение медианы имеет вид

$$y = -\frac{5}{7}x + \frac{11}{7} \Rightarrow 5x + 7y - 11 = 0.$$

Ответ: $5x + 7y - 11 = 0$.

7.097. Вершины треугольника находятся в точках $A(3; 4)$, $B(2; 1)$, $C(3; 5)$. Составить уравнение прямой, на которой лежит высота, опущенная из вершины B на сторону AC .

Решение.

Сначала найдем угловой коэффициент k_1 прямой, содержащей сторону AC . Для этого подставим координаты точек A и C в уравнение прямой $y = kx + b$; получим систему уравнений: $\begin{cases} 4 = 3k_1 + b, \\ -5 = -3k_1 + b, \end{cases}$ откуда $k_1 = \frac{3}{2}$. Искомая прямая, на которой лежит высота, будет перпендикулярна к прямой, содержащей сторону AC . Угловой коэффициент прямой, содержащей высоту, $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{2}{3}$. Подставив координаты точки B и угловой коэффициент k_2 в уравнение прямой $y = kx + b$, получим $1 = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + b \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$. Следовательно, уравнение прямой, на которой лежит высота, имеет вид: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \Rightarrow 2x + 3y + 1 = 0$.

Ответ: $2x + 3y + 1 = 0$.

7.098. Даны стороны треугольника a, b, c . Найти медиану m_b , проведенную к стороне b .

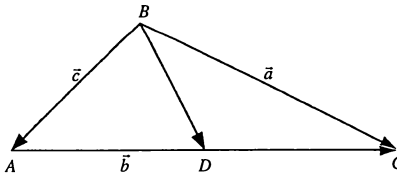


Рис. 7.60

Решение.

Введем векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ (рис. 7.60). Используя правила действия над векторами, запишем: $\begin{cases} \vec{a} + \vec{c} = 2\vec{m}_b, \\ \vec{a} - \vec{c} = \vec{b}. \end{cases}$ Возведя

оба равенства в квадрат, получим: $\begin{cases} a^2 + 2\vec{a}\vec{c} + c^2 = 4m_b^2, \\ a^2 - 2\vec{a}\vec{c} + c^2 = b^2. \end{cases}$ Сложив

их, получим $2a^2 + 2c^2 = 4m_b^2 + b^2$, откуда $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$.

Ответ: $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$.

7.099. Через точку $(2; 1)$ провести прямую, отрезок которой, заключенный между осями координат, делился бы в данной точке пополам.

Решение.

Пусть $(x_1; 0)$ и $(0; y_2)$ — координаты концов отрезка, заключенного между осями координат. По условию точка $(2; 1)$ делит этот отрезок пополам, следовательно, по формулам 7.14 находим x_1 и y_2 : $2 = \frac{x_1 + 0}{2} \Rightarrow x_1 = 4$; $-1 = \frac{0 + y_2}{2} \Rightarrow y_2 = -2$. Таким образом, искомая прямая проходит через точки $(4; 0)$ и $(0; 2)$. Подставляя координаты этих точек в уравнение прямой 7.18, получаем систему уравнений: $\begin{cases} 0 = 4k + b, \\ -2 = 0 \cdot k + b, \end{cases}$ откуда $k = \frac{1}{2}$, $b = -2$. Поэтому уравнение искомой прямой имеет вид: $y = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow x - 2y - 4 = 0$.

Ответ: $x - 2y - 4 = 0$.

7.100. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1; 0)$ и $B(3; 0)$ и касающейся оси Oy .

Решение.

Пусть $P(a; b)$, R — центр и радиус окружности соответственно. По условию точки A и B принадлежат окружности, поэтому получаем систему уравнений: $\begin{cases} (1-a)^2 + (0-b)^2 = R^2, \\ (3-a)^2 + (0-b)^2 = R^2, \end{cases}$ откуда $a = 2$. Так как окружность касается оси Oy , то $R = |a| = 2$. Из первого уравнения системы находим b : $(1-2)^2 + b^2 = 2^2 \Rightarrow b^2 = 3 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}$. Таким образом, $(x-2)^2 + (y \pm \sqrt{3})^2 = 4$ — уравнение искомых окружностей.

Ответ: $(x-2)^2 + (y \pm \sqrt{3})^2 = 4$.

7.101. Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 6, а угол при основании равен 60° . Принимая за ось абсцисс большее основание трапеции, за начало координат — середину этого основания, а за положительное направление оси ординат — вектор, идущий из середины большего основания в середину меньшего основания, написать в этой системе координат уравнения всех сторон трапеции.

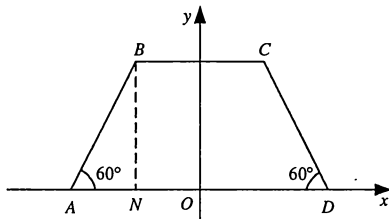


Рис. 7.61

Решение.

Согласно условию, система координат расположена относительно трапеции следующим образом (рис. 7.61). Уравнение прямой имеет вид: $y = kx + b$. Для стороны AD имеем: $k = 0$, $b = 0 \Rightarrow y = 0$.

Для стороны BC $k = 0$, $b = AN \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{2}(AD - BC) \operatorname{tg} 60^\circ$. По условию $AD = 10$, $BC = 6$, поэтому $b = \frac{1}{2}(10 - 6)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Таким

образом, для стороны BC уравнение имеет вид: $y = 2\sqrt{3}$.

По условию $AD = 10$ и $AO = OD$, значит, точка A имеет координаты $(-5; 0)$. Угловой коэффициент прямой AB равен $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$. Подставив координаты точки A и коэффициент k в уравнение прямой, получим $0 = -5 \cdot \sqrt{3} + b \Rightarrow b = 5\sqrt{3}$.

Следовательно, уравнение прямой AB имеет вид: $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$. Далее, точка D имеет координаты $(5; 0)$, а угловой коэффициент прямой CD равен: $k = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$. Поэтому имеем: $0 = 5 \cdot \sqrt{3} + b \Rightarrow b = -5\sqrt{3}$. Значит, уравнение прямой CD имеет вид: $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.

Ответ: $y = 0$; $y = 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$; $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.

7.102. Составить уравнение прямой, образующей с осью Ox угол 135° и проходящей через точку $(3; 4)$. Найти площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат.

Решение.

Так как прямая образует с осью Ox угол 135° , то ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} 135^\circ = 1$. Подставив значение k и координаты точки $(3; 4)$ в уравнение прямой, получим $4 = (-1) \cdot 3 + b \Rightarrow b = 7$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид $y = x + 7$.

Если эта прямая пересекает оси Ox и Oy в точках $A(x_1; 0)$ и $B(0; y_2)$ соответственно, то площадь $\triangle AOB$ ($\angle O = 90^\circ$) находится по формуле

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |x_1| \cdot |y_2|. \quad (1)$$

Подставив координаты точки A в уравнение прямой, находим $0 = x_1 + 7 \Rightarrow x_1 = -7$. Аналогично, подставив координаты

точки B , получим $y_2 = (1) \cdot 0 + 7 \Rightarrow y_2 = 7$. Таким образом, $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = 24,5$ (кв. ед.).

Ответ: $y = x + 7$; 24,5 кв. ед.

7.103. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 5y = 0$ и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна 5 кв. ед.

Решение.

Угловой коэффициент k_1 прямой $2x + 5y = 0$ равен $k_1 = -\frac{2}{5}$. Так как искомая прямая параллельна данной прямой, то ее

угловой коэффициент $k = k_1 = -\frac{2}{5}$. Следовательно, треугольник, образованный этой прямой с осями координат, расположен в I или III квадранте, где его площадь находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} x_1 y_2. \quad (1)$$

(см. № 7.102). Подставив координаты точек пересечения прямой с осями координат в уравнение прямой $y = kx + b$, получим

$$0 = -\frac{2}{5} x_1 + b \quad (2)$$

$$\text{и } y_2 = -\frac{2}{5} \cdot 0 + b. \quad (3)$$

Решив систему уравнений (1) — (3), находим $b = \pm 2$. Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид:

$$y = -\frac{2}{5} x \pm 2 \Rightarrow 2x + 5y \pm 10 = 0.$$

Ответ: $2x + 5y \pm 10 = 0$.

7.104. В окружность $x^2 + y^2 = 25$ вписан квадрат $ABCD$. Найти координаты вершин B , C и D , если $(3; 4)$ — координаты вершины A .

Решение.

Центр данной окружности — это точка $O(0; 0)$ (см. 7.28), поэтому прямая, содержащая диагональ AC квадрата, проходит через точку O . Уравнение этой прямой найдем из системы уравнений: $\begin{cases} 0 = 0 \cdot k_1 + b_1, \\ 4 = 3k_1 + b_1 \end{cases} \Rightarrow k_1 = \frac{4}{3}, b_1 = 0$. Значит, $y = \frac{4}{3}x$ —

уравнение прямой, содержащей диагональ AC . Координаты точки C найдем из системы уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = \frac{4}{3}x, \end{cases}$ откуда $x_1 = 3, y_1 = 4$ или $x_2 = -3, y_2 = -4$, но первым решением являются координаты точки A , поэтому $(3; 4)$ — координаты точки C .

Прямая, содержащая диагональ BD , перпендикулярна к прямой, содержащей диагональ AC , и проходит через точку O .

Значит, $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{4}$ и $0 = 0 \cdot k_2 + b_2 \Rightarrow b_2 = 0$. Следовательно, уравнение прямой, содержащей диагональ BD , имеет вид:

$$y = -\frac{3}{4}x. \text{ Тогда координаты точек } B \text{ и } D \text{ находим из системы уравнений: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = -\frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow x_1 = -4, y_1 = 3 \text{ или } x_2 = 4, y_2 = -3.$$

Ответ: $B(4; 3)$, $C(3; 4)$, $D(4; 3)$.

7.105. Даны два квадрата $ABCD$ и $BMNP$, где $B \in AM$, $P \in BC$. Найти угол между прямыми AP и DN ; вычислить отношение $|DN|:|AP|$.

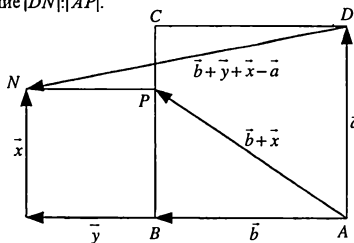


Рис. 7.62

Решение.

Введем обозначения: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{y}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{x}$ (рис. 7.62).

Очевидно, что $a = b$, $x = y$. Имеем: $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \vec{x}$, $\overrightarrow{DN} = \vec{b} + \vec{y} + \vec{x} - \vec{a}$. От-

сюда: $|\overrightarrow{AP}|^2 = \vec{b}^2 + \vec{x}^2$ или $|\overrightarrow{AP}|^2 = b^2 + x^2$ ($\vec{b}\vec{x} = 0$, так как $\vec{b} \perp \vec{x}$),

$$|\overrightarrow{DN}|^2 = a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - 2\vec{a}\vec{x} + 2\vec{b}\vec{y} = 2(b^2 + x^2) \quad \text{и} \quad |\overrightarrow{DN}|^2 : |\overrightarrow{AP}|^2 = 2 \Rightarrow |\overrightarrow{DN}| : |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Далее, } \cos \angle(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{DN}) = \frac{\overrightarrow{AP} \overrightarrow{DN}}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{DN}|} = \frac{b^2 + \vec{b}\vec{y} - \vec{a}\vec{x} + x^2}{\sqrt{2}(b^2 + x^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{DN}) = 45^\circ.$$

Ответ: 45° ; $\sqrt{2}$.

7.106. Дана окружность $x^2 + y^2 = 16$. Составить уравнение окружности, проходящей через начало координат и точку $P(2; 0)$, касающейся данной окружности.

Решение.

Радиус данной окружности $x^2 + y^2 = 16$ равен 4. Точка касания данной окружности и искомой окружности лежит на линии их центров, поэтому радиус искомой окружности равен 2. По условию искомая окружность проходит через точку $P(2; 0)$ и начало координат $O(0; 0)$, то координаты центра этой окружности находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} (0-a)^2 + (0-b)^2 = 2^2, \\ (2-a)^2 + (0-b)^2 = 2^2 \end{cases} \Rightarrow a = 1, \quad b = \pm\sqrt{3}.$$

Ответ: $(x-1)^2 + (y \pm \sqrt{3})^2 = 4$.

7.107. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Через вершины B и C проведены перпендикулярные прямые p и q , пересекающие прямые AC и AB соответственно в точках P и Q . Найти зависимость между s и k , где $s = \overrightarrow{CP} : \overrightarrow{PA}$, $k = \overrightarrow{BQ} : \overrightarrow{QA}$.

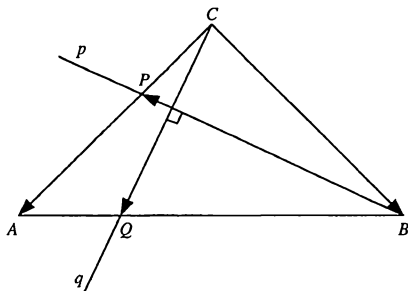


Рис. 7.63

Решение.

Имеем (рис. 7.63): $\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{QA} \Rightarrow \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CB} = k(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CQ}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CQ} = \frac{\overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{CA}}{1+k} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC} = s(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BP}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BA}}{1+s}. \quad \text{Отсюда} \quad \overrightarrow{CQ} \overrightarrow{BP} = \frac{1}{(1+k)(1+s)} \cdot (-\overrightarrow{CB}^2 +$$

$+ s\overrightarrow{CB}\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{CA}\overrightarrow{BA} = 0$. Но $\overrightarrow{CB}\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC}^2$, $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2$, поэтому $-\overrightarrow{CB}^2 - s\overrightarrow{CB}^2 + ks\overrightarrow{AC}^2 = 0$. По условию задачи $\overrightarrow{CB}^2 = \overrightarrow{AC}^2$, следовательно, $ks = 1 + s$.

Ответ: $ks = 1 + s$.

7.108. Даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые: 1) были параллельными; 2) пересекались; 3) были перпендикулярными.

Решение.

Угловые коэффициенты данных прямых соответственно равны $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ и $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. Тогда

1) данные прямые параллельные, если $k_1 = k_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ или $A_1B_2 = A_2B_1 \neq \frac{C_1}{C_2}$;

2) данные прямые пересекаются, если $k_1 \neq k_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$ или $A_1B_2 \neq A_2B_1$;

3) данные прямые перпендикулярные, если $k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow -\frac{A_1}{B_1} = \frac{B_2}{A_2}$ или $A_1A_2 = -B_1B_2$.

Ответ: 1) $A_1B_2 = A_2B_1 \neq \frac{C_1}{C_2}$; 2) $A_1B_2 \neq A_2B_1$; 3) $A_1A_2 = -B_1B_2$.

7.109. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(1; 2)$ и касающейся осей координат.

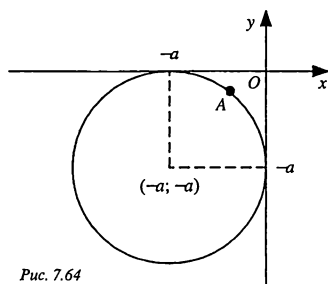


Рис. 7.64

Решение.

Так как окружность проходит через точку $A(1; 2)$, у которой каждая координата меньше нуля, то искомая окружность расположена в III квадранте (рис. 7.64). Пусть $(-a; 0)$ — точка касания окружности с осью Ox , тогда $(0; -a)$ и a — точка касания окружности с осью Oy и радиус окружности соответственно. Значит, уравнение окружности по формуле 7.27 имеет вид: $(x + a)^2 + (y + a)^2 = a^2$. Подставив в это уравнение координаты точки A , получим $(1 + a)^2 + (2 + a)^2 = a^2 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 5$.

Ответ: $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ или $(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

7.110. Прямые p и q заданы соответственно уравнениями $(1 - \alpha)x + (3\alpha - 6)y + 3 = 0$ и $(2\alpha + 3)x + \frac{1}{3}y + 5 = 0$. При каких значениях α прямые p и q перпендикулярны?

Решение.

Прямые p и q перпендикулярные, если $A_1 \cdot A_2 = -B_1 \cdot B_2$ (см. 7.108), где $A_1 = 1 - \alpha$, $A_2 = 2\alpha + 3$, $B_1 = 3\alpha - 6$, $B_2 = \frac{1}{3}$, поэтому

имеем уравнение относительно α : $(1 - \alpha)(2\alpha + 3) = -\frac{1}{3}(3\alpha - 6)$. Решив его, находим $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7.111. На прямой $5x - 2y + 9 = 0$ найти точку A , равноудаленную от точек $B(2; 3)$ и $C(4; 1)$, и вычислить площадь треугольника ABC .

Решение.

Пусть $A(x_1; y_1)$. По условию $AB = AC$, т.е. $\sqrt{(x_1 - 2)^2 + (y_1 - 3)^2} = \sqrt{(x_1 - 4)^2 + (y_1 - 1)^2} \Rightarrow (x_1 - 2)^2 + (y_1 - 3)^2 = (x_1 - 4)^2 + (y_1 - 1)^2$. (1)

Так как точка A принадлежит данной прямой, то

$$5x_1 - 2y_1 + 9 = 0. \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2): $\begin{cases} (x_1+2)^2 + (y_1+3)^2 = (x_1-4)^2 + (y_1-1)^2 \\ 5x_1 - 2y_1 + 9 = 0 \end{cases}$, находим $x_1 = 1, y_1 = 2$, т.е. $A(1; 2)$. Далее

находим длины сторон $\triangle ABC$: $AB = \sqrt{26}, AC = \sqrt{26}, BC = 2\sqrt{13}$. По теореме косинусов имеем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB \Rightarrow \cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \\ = \frac{26 + 4 \cdot 13 - 26}{2 \cdot \sqrt{26} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle ACB = 45^\circ.$$

Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{26} \cdot 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 13$ (кв. ед.).

Отметим: $A(-1; 2)$; 13 кв. ед.

7.112. Доказать, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\operatorname{ctg} \angle C = 2(\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B)$.

Решение.

Пусть $AB = c, BC = a, AC = b, AA_1 \perp BB_1$ (рис. 7.65), тогда $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$. Очевидно,

что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, поэтому $(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}) = 0$

$$\text{или } 2bc \cos \angle A + ab \cos \angle C + 2ac \cos \angle B = 4c^2 \Rightarrow \frac{2bc \cos \angle A}{2S} + \frac{ab \cos \angle C}{2S} + \\ + \frac{2ac \cos \angle B}{2S} = \frac{4c^2}{2S}, \text{ где } S — \text{площадь } \triangle ABC. \text{ Учитывая, что } 2S = bc \sin \angle A = \\ = ab \sin \angle C = ac \sin \angle B = ch_c, \text{ где } h_c — \text{высота, проведенная к стороне } AB, \text{ по-}$$

лучаем: $\frac{2bc \cos \angle A}{bc \sin \angle A} + \frac{ab \cos \angle C}{ab \sin \angle C} + \frac{2ac \cos \angle B}{ac \sin \angle B} = \frac{4c^2}{ch_c} \Rightarrow 2 \operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle C + 2 \operatorname{ctg} \angle B = \frac{4c}{h_c}$. С другой стороны, из $\triangle ACD$ и $\triangle DCB$, где $CD \perp AB$, следует, что $c = h_c(\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B)$. Тогда $2 \operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle C + 2 \operatorname{ctg} \angle B = 4(\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B)$. Значит, $\operatorname{ctg} \angle C = 2(\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B)$.

Нетрудно провести рассуждения в обратном порядке и показать, что если $\operatorname{ctg} \angle C = 2(\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B)$, то $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$, а тогда $AA_1 \perp BB_1$. QED.

7.113. Длины диагоналей ромба равны 28 и 10 см. Первая диагональ принята за ось Ox , вторая за ось Oy . Составить уравнения сторон ромба и найти расстояние от начала координат до стороны ромба.

Решение.

По условию $AC = 28$ см, $BD = 10$ см, откуда координаты вершин ромба $A(-14; 0), B(0; 5), C(14; 0), D(0; -5)$ (рис. 7.64). Для прямой

$$BC \text{ угловой коэффициент } k_1 = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle BCO) = -\operatorname{tg} \angle BCO = \\ = -\frac{5}{14}. \text{ Зная координаты точки } B, \text{ по формуле 7.19 имеем:}$$

$$y - 5 = -\frac{5}{14}(x - 0) \Rightarrow 5x + 14y - 70 = 0. \text{ Для прямой } AD \text{ угловой}$$

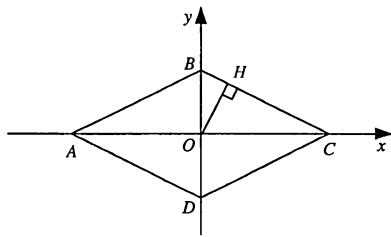


Рис. 7.66

коэффициент $k_1 = -\frac{5}{14}$ (так как $AD \parallel BC$), и, зная координаты точки D , получаем $y + 5 = -\frac{5}{14}(x - 0) \Rightarrow 5x + 14y + 70 = 0$. Угловым коэффициентом прямой AB есть $k_2 = \operatorname{tg} \angle BAO = \frac{5}{14}$, и уравнение стороны запишется в виде $5x - 14y + 70 = 0$. Аналогично, уравнение стороны DC запишется в виде $5x - 14y - 70 = 0$.

Для нахождения длины отрезка OH , перпендикулярного к BC , воспользуемся тем, что $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} OC \cdot OB = \frac{1}{2} OH \cdot BC$, откуда $OH = \frac{OC \cdot OB}{BC}$. Так как $BC = \sqrt{25 + 196} = \sqrt{221}$, то находим $OH = \frac{14 \cdot 5}{\sqrt{221}} = \frac{70}{\sqrt{221}}$ (см).

Ответ: $5x + 14y \pm 70 = 0$ и $5x - 14y \pm 70 = 0$; $\frac{70}{\sqrt{221}}$ см.

7.114. Два квадрата $ABCD$ и $AKLM$ (вершины указаны по часовой стрелке) имеют общую вершину A . Доказать, что их центры и середины отрезков BM и DK являются вершинами некоторого квадрата.

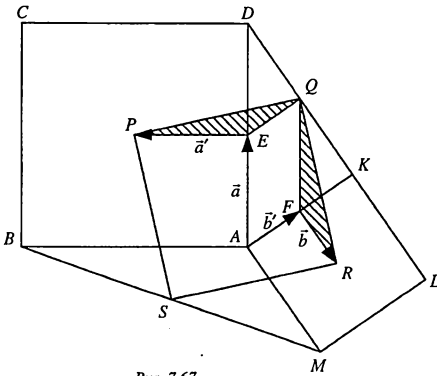


Рис. 7.67

Решение.

Введем векторы $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{FR} = \vec{b}$ (рис. 7.67). Обозначим через \vec{a}' вектор, получающийся из вектора \vec{a} поворотом на угол 90° против часовой стрелки. Отметим, что $(\vec{a} + \vec{b})' = \vec{a}' + \vec{b}'$, $(\vec{a}')' = -\vec{a}$ и $(k\vec{a})' = k\vec{a}'$, где k — действительное число. Имеем $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EQ} = \vec{b}$, $\overrightarrow{EP} = \vec{a}'$, $\overrightarrow{FQ} = \vec{a}$. Отсюда $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EQ} = -\vec{a}' + \vec{b}$, $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FQ} = -\vec{b} + \vec{a}$ и поэтому $(\overrightarrow{PQ})' = (-\vec{a}' + \vec{b})' = (-\vec{a}')' + (\vec{b}')' = -(-\vec{a})' - \vec{b} = \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{RQ}$.

Следовательно, вектор \overrightarrow{RQ} получается из вектора \overrightarrow{PQ} поворотом на угол 90° против часовой стрелки. Это означает, что $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RQ}|$ и $\angle PQR = 90^\circ$. Точно так же доказывается,

что вектор \overrightarrow{PS} получается из вектора \overrightarrow{RS} поворотом на угол

90° против часовой стрелки. Следовательно, четырехугольник $PQRS$ — квадрат.

Мы рассмотрели один из возможных случаев взаимного расположения квадратов $ABCD$ и $AKLM$. Другие случаи рассматриваются аналогично. QED.

7.115. Составить уравнение окружности, вписанной в треугольник, стороны которого лежат на прямых $x = 0$, $y = 0$ и $5x + 12y - 60 = 0$.

Решение.

Найдем координаты вершин треугольника, решив следующие системы уравнений: $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0; 0)$; $\begin{cases} x = 0, \\ 5x + 12y - 60 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0; 5)$;

$\begin{cases} y = 0, \\ 5x + 12y - 60 = 0 \end{cases} \Rightarrow (12; 0)$. Этот треугольник прямоугольный, так как прямые $x = 0$ и $y = 0$ перпендикулярны. Кроме того, он расположен в I квадранте, так как координаты вершин треугольника неотрицательные. Пусть r — радиус вписанной окружности в этот треугольник, S — его площадь, p — полупериметр. Тогда $p = \frac{1}{2}(5 + 12 + \sqrt{5^2 + 12^2}) = 15$,

$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ и $r = \frac{S}{p} = 2$. Так как окружность касается прямых $x = 0$ и $y = 0$ и расположена в I квадранте, то $(r; r)$ или $(2; 2)$ — координаты центра окружности. Следовательно, уравнение окружности имеет вид $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Ответ: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

7.116. Пусть N — точка пересечения прямых $x + y - 5 = 0$ и $2x + y - 11 = 0$; O — начало координат. Найти расстояние ON и составить уравнение прямой ON .

Решение.

Найдем координаты точки N , решив систему уравнений: $\begin{cases} x+y-5=0, \\ 2x+y-11=0 \end{cases} \Rightarrow x=6, y=-1$, т.е. $N(6; -1)$. Тогда

$ON = \sqrt{(6-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{37}$. Так как прямая ON проходит через точки O и N , то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = 0 \cdot k + b, \\ -1 = 6k + b \end{cases} \Rightarrow b = 0, k = -\frac{1}{6}. \text{ Следовательно, уравнение прямой } ON \text{ имеет вид: } y = -\frac{1}{6}x \text{ или } x + 6y = 0.$$

Ответ: $\sqrt{37}$, $x + 6y = 0$.

7.117. Даны вершины равностороннего треугольника $A(-1; 1)$, $B(-1; -2)$. Найти координаты третьей вершины треугольника и его площадь.

Решение.

Пусть $C(x; y)$ — неизвестная вершина равностороннего $\triangle ABC$. Так как $AB = AC$ и $AC = BC$, то получаем систему урав-

$$\text{нений для нахождения координат точки } C: \begin{cases} (-1-1)^2 + (-2-1)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 = (x+1)^2 + (y-1)^2, \\ (y-1)^2 = (y+2)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}, x = -1 \pm \frac{\sqrt{43}}{2}, \text{ т.е. } C\left(-1 + \frac{\sqrt{43}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ или } C\left(-1 - \frac{\sqrt{43}}{2}; -\frac{1}{2}\right). \text{ Далее, найдем } AB — \text{длину стороны треуголь-}$$

ника $AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Тогда площадь данного треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot \sin 60^\circ = \frac{13\sqrt{3}}{4}$ (кв. ед).

$$\text{Ответ: } \left(-1 + \frac{\sqrt{43}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ или } \left(-1 - \frac{\sqrt{43}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \frac{13\sqrt{3}}{4} \text{ кв. ед.}$$

7.118. Найти координаты середины хорды, образующейся при пересечении прямой $x + y - 5 = 0$ и окружности $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 40$.

Решение.

Пусть AB — хорда, образующаяся при пересечении прямой и окружности. Координаты точек A и B найдем, решив

$$\text{систему уравнений: } \begin{cases} x+y-5=0, \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = 40, \end{cases} \text{ откуда } x_1 = 2, y_1 = 6 \text{ и } x_2 = 6, y_2 = 2, \text{ т.е. } A(-2; -6), B(-6; -2). \text{ Если точка } N —$$

середина хорды AB , то по формулам 7.14 получаем: $N\left(\frac{-2+(-6)}{2}; \frac{-6+(-2)}{2}\right)$ или $N(4; 4)$.

Ответ: $(4; 4)$.

7.119. Известны координаты середин сторон треугольника: $A_1(1; 2)$, $B_1(2; 3)$, $C_1(3; 1)$. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника.

Решение.

Пусть $M(x; y)$ — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (рис. 7.68). Четырехугольник $BA_1B_1C_1$ — параллелограмм, так как A_1B_1 и B_1C_1 являются средними линиями $\triangle ABC$. Следовательно, $A_1O_1 = C_1O_1$, т.е. B_1O_1 — медиана $\triangle A_1B_1C_1$. Рассуждая аналогично, замечаем, что A_1O_2 — медиана $\triangle A_1B_1C_1$. Значит, точка M является точкой пересечения

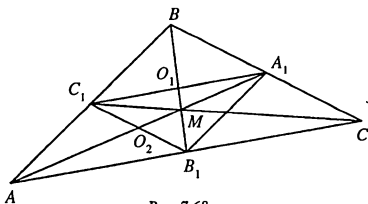


Рис. 7.68

медиан $\triangle A_1B_1C_1$. Координаты точки M найдем по формулам, полученным при решении задачи 7.084:

$$x = \frac{-1+2-3}{3} = -\frac{2}{3}, \quad y = \frac{2-3-1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

7.120. Даны координаты $A(1; 9)$, $B(8; 2)$ двух вершин треугольника и координаты $M(1; 6)$ пересечения медиан этого треугольника. Найти координаты вершины $C(x; y)$.

Решение.

Используя формулы, полученные в задаче 7.084, имеем: $1 = \frac{1+8+x}{3} \Rightarrow x = -6$, $6 = \frac{9+2+y}{3} \Rightarrow y = 7$, т.е. $C(-6; 7)$.

Ответ: $C(-6; 7)$.

7.121. Даны вершины треугольника: $A(1; 8)$, $B(1; 1)$, $C(0; 3)$. Найти скалярное произведение \overrightarrow{AB} на \overrightarrow{AC} и площадь треугольника ABC .

Решение.

Находим координаты векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} : $\overrightarrow{AB}(0; -7)$, $\overrightarrow{AC}(-1; -5)$. Тогда по формулам скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \cdot (-1) + (-7) \cdot (-5) = 35$. По определению скалярного произведения векторов $\cos \angle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) =$

$$= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \Rightarrow \cos \angle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{35}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}. \quad \text{Тогда} \quad \sin \angle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{26}}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 35; 3,5 кв. ед.

7.122. Даны координаты вершин четырехугольника: $A(2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(7; 7)$, $D(7; 1)$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция, и найти длину ее средней линии.

Решение.

Находим координаты векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} : $\overrightarrow{AB}(-5; 3)$, $\overrightarrow{BC}(10; 6)$, $\overrightarrow{CD}(0; -6)$, $\overrightarrow{DA}(-5; -3)$. Так как $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{DA}$, то $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$, а векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} не параллельны, то $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и DA .

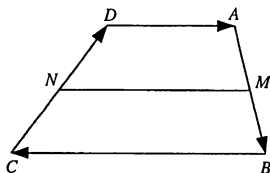


Рис. 7.69

Пусть MN — средняя линия трапеции (рис. 7.69). Тогда точка M имеет координаты $M\left(\frac{2-3}{2}; \frac{-2+1}{2}\right)$ или $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, а точка N имеет координаты $N\left(\frac{2-3}{2}; \frac{-2+1}{2}\right)$ или $N(7; 4)$. Следовательно, $MN = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{34}$.

7.123. Составить уравнение окружности, для которой точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ являются концами ее диаметра.

Решение.

Так как центр искомой окружности делит диаметр окружности пополам, то найдем его координаты: $O\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Радиус окружности найдем как половину длины диаметра, а именно: $R = \frac{1}{2}M_1M_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$, откуда $R^2 = \frac{1}{4}((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2)$. Таким образом, уравнение искомой окружности имеет вид: $\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2)$. Преобразовав полученное уравнение, перепишем его в виде $x^2 + y^2 - (x_1+x_2)x - (y_1+y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Ответ: $x^2 + y^2 - (x_1+x_2)x - (y_1+y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

7.124. Составить уравнения касательных, проведенных к окружности $x^2 + y^2 = 16$ из точки $M(6; 0)$.

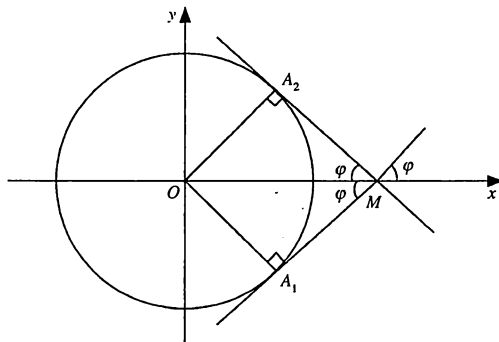


Рис. 7.70

Решение.

Пусть A_1 и A_2 — точки касания искомых прямых к окружности (рис. 7.70). Так как точки A_1 и A_2 принадлежат окружности, то $OA_1 = OA_2 = 4$ и $OM = \sqrt{(6-0)^2 + (0-0)^2} = 6$. Рассмотрим прямоугольный $\triangle OA_1M$ ($\angle A_1 = 90^\circ$). По теореме Пифагора $MA_1 = \sqrt{OM^2 - OA_1^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Тогда $\tan \varphi = \frac{OA_1}{MA_1} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Прямая MA_1 имеет угловой коэффициент

$k_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и проходит через точку $M(6; 0)$, поэтому по формуле 7.19 ее уравнение имеет вид $y - 0 = \frac{2}{\sqrt{5}}(x - 6)$ или $2x - \sqrt{5}y - 6\sqrt{5} = 0$. Для прямой MA_2 угловой коэффициент $k_2 = \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и ее уравнение имеет вид $y - 0 = -\frac{2}{\sqrt{5}}(x - 6) \Rightarrow 2x + \sqrt{5}y - 6\sqrt{5} = 0$.

Ответ: $2x \pm \sqrt{5}y - 6\sqrt{5} = 0$.

7.125. При каком необходимом и достаточном условии уравнение $Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ определяет действительную окружность? Предполагая это условие выполнимым, найти центр этой окружности и ее радиус.

Решение.

Уравнение окружности имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \quad (1)$$

где $(a; b)$ — координаты центра окружности, R — радиус окружности. Если в данном уравнении $A = 0$, то оно определяет прямую, поэтому $A \neq 0$. Преобразуем данное в условии уравнение. Имеем:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{2E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \Rightarrow \left(x^2 + 2\frac{D}{A}x + \frac{D^2}{A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{E}{A}y + \frac{E^2}{A^2}\right) - \\ &- \frac{D^2}{A^2} - \frac{E^2}{A^2} + \frac{F}{A} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Сравнивая уравнения (1) и (2), видим, что уравнение (2) будет уравнением окружности тогда и только тогда, когда

$$\frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2} > 0 \text{ или } D^2 + E^2 - AF > 0. \quad (3)$$

Допустим, что условие (3) выполнено, тогда центр окружности (2) — это точка $\left(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{A}\right)$, а ее радиус — это

$$\sqrt{\frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}} \text{ или } \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - AF}}{|A|}.$$

$$\text{Ответ: } D^2 + E^2 - AF > 0; \left(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{A}\right); \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - AF}}{|A|}.$$

7.126. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, образованного прямой $5x - y + 7 = 0$ и осями координат.

Решение.

Найдем координаты вершин данного треугольника, решив следующие системы уравнений: $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow O(0; 0)$,

$\begin{cases} x=0, \\ 5x-y+7=0 \end{cases} \Rightarrow A(0; 7)$; $\begin{cases} y=0, \\ 5x-y+7=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{7}{5}; 0\right)$. Далее, так как $\triangle AOB$ прямоугольный (оси координат перпендикулярны), то центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, делит гипотенузу AB на два равных

отрезка. Следовательно, радиус окружности равен $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2 + (-7)^2} = \frac{7\sqrt{26}}{10}$, а центр имеет координаты

$$\begin{aligned} &\left(\frac{0+(-7/5)}{2}; \frac{7+0}{2}\right) \text{ или } \left(-\frac{7}{10}; \frac{7}{2}\right). \text{ Таким образом, уравнение искомой окружности имеет вид } \left(x + \frac{7}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1274}{100} \Rightarrow (x + 0,7)^2 + (y - 3,5)^2 = 12,74. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (x + 0,7)^2 + (y - 3,5)^2 = 12,74.$$

7.127. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1; 9)$, $B(7; 5)$, зная, что ее центр лежит на прямой $x + 6y + 12 = 0$.

Решение.

Пусть $(a; b)$ — центр искомой окружности, R — ее радиус. Тогда $a + 6b + 12 = 0$, (1)

$$(1-a)^2 + (9-b)^2 = R^2, \quad (2)$$

$$(7-a)^2 + (5-b)^2 = R^2. \quad (3)$$

Для вычисления координат центра окружности и радиуса окружности необходимо решить систему уравнений (1) — (3):

$$\begin{cases} a + 6b + 12 = 0, \\ (1-a)^2 + (9-b)^2 = R^2, \\ (7-a)^2 + (5-b)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6b - 12, \\ a^2 + b^2 - 2a - 18b + 82 = R^2, \\ a^2 + b^2 - 14a - 10b + 74 = R^2. \end{cases}$$

Из последних двух уравнений системы имеем $a^2 + b^2 - 2a - 18b + 82 = a^2 + b^2 - 14a - 10b + 74$.

$-18b + 82 = a^2 + b^2 - 14a - 10b + 74 \Rightarrow 12a - 8b + 8 = 0 \Rightarrow 3a - 2b + 2 = 0$. Подставив в полученное уравнение выражение для a из первого уравнения последней системы, получаем $3(-6b - 12) - 2b + 2 = 0$. Отсюда $b = -\frac{17}{10}$ и

$a = -6 \cdot \left(-\frac{17}{10}\right) - 12 = -\frac{18}{10}$. Таким образом, центр окружности — это точка $\left(-\frac{18}{10}; -\frac{17}{10}\right)$. Подставив координаты центра

во второе уравнение системы, найдем R^2 : $\left(1 + \frac{18}{10}\right)^2 + \left(9 + \frac{17}{10}\right)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{12233}{100}$.

Итак, искомое уравнение окружности имеет вид $(x + 1,8)^2 + (y + 1,7)^2 = 122,33$.

Ответ: $(x + 1,8)^2 + (y + 1,7)^2 = 122,33$.

7.128. Доказать, что треугольник с вершинами $A(2; 1)$, $B(3; 0)$, $C(1; 5)$ тупоугольный, и найти косинус тупого угла.

Решение.

Найдем координаты векторов $\overline{AB}(1; -1)$, $\overline{AC}(-1; 4)$, $\overline{BC}(-2; 5)$, $\overline{BA}(-1; 1)$, $\overline{CA}(1; -4)$, $\overline{CB}(2; -5)$. Тогда по определению

скалярного произведения векторов имеем: $\cos \angle A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{-1-4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = -\frac{5}{\sqrt{34}}$; $\cos \angle B = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{7}{\sqrt{58}}$; $\cos \angle C =$

$= \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| |\overline{CB}|} = \frac{22}{\sqrt{493}}$. Так как $\cos \angle A < 0$, то угол при вершине A больше 90° , что и требовалось доказать.

Ответ: $-\frac{5}{\sqrt{34}}$.

7.129. Дан произвольный треугольник ABC . Отрезок AC делится точкой B_1 в отношении λ , а отрезок CB делится точкой A_1 в том же отношении λ . Найти множество середин отрезков A_1B_1 .

Решение.

Из условия задачи следует (рис. 7.71): $\overline{OB_1} = \frac{\lambda \overline{OC} + \overline{OA}}{\lambda + 1}$, $\overline{OA_1} = \frac{\overline{OC} + \lambda \overline{OB}}{\lambda + 1}$, где O

произвольная точка. Пусть M — середина A_1B_1 , тогда $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA_1} + \overline{OB_1}) =$

$= \frac{(\lambda + 1)\overline{OC} + \overline{OA} + \lambda \overline{OB}}{\lambda(\lambda + 1)}$. Совместим точку O с точкой C , тогда $\overline{CM} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{CA} + \lambda \overline{CB}}{\lambda + 1}$. Но $\frac{\overline{CA} + \lambda \overline{CB}}{\lambda + 1} = \overline{CC_1}$, где точка C_1 делит AB в отношении λ . Отсюда

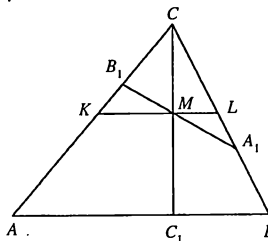


Рис. 7.71

следует, что M — середина CC_1 . Ввиду того что $\lambda \in [0; +\infty)$, то множество точек M есть средняя линия KL (кроме точки L) треугольника, параллельная AB .

Ответ: средняя линия KL (кроме точки L) треугольника ABC , параллельная AB .

7.130. Даны точки $A(1; 1)$, $B(6; 6)$, $C(5; 4)$, $D(2; 1)$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция, и найти угол α между ее диагоналями.

Решение.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}(5; 5)$, $\overrightarrow{BC}(-1; -2)$, $\overrightarrow{CD}(-3; -3)$, $\overrightarrow{DA}(1; 0)$. Так как векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} коллинеарные, а векторы \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} неколлинеарные, то $ABCD$ — трапеция с диагоналями AC , DB . Угол между диагоналями AC и DB равен углу между векторами, лежащими на этих диагоналях. Так как $\overrightarrow{AC}(4; 3)$ и $\overrightarrow{DB}(4; 5)$, то $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{DB}|} = \frac{16+15}{5\sqrt{41}} =$

$$= \frac{31}{5\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{31}{5\sqrt{41}}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{31}{5\sqrt{41}}.$

7.131. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Найти множество точек M пространства таких, для которых $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Решение.

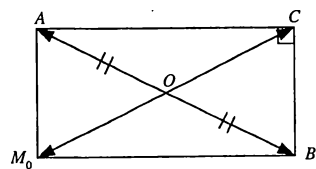


Рис. 7.72

Пусть O — середина гипотенузы AB (рис. 7.72). Тогда $OA = OB = OC = R$, где R — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности. Тогда из условия следует, что $(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC})^2$. После возведения в квадрат, получим $\overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OM} \overrightarrow{OA} + R^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OM} \overrightarrow{OB} + R^2 = \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OM} \overrightarrow{OC} + R^2$. Но $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$, поэтому $\overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{OM} \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2 = 0$. Отсюда $(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC})^2 = 0$ или $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OC}$.

Итак, искомое множество состоит из одной точки M_0 — вершины прямоугольника $ACBM_0$.

Ответ: точка M_0 — вершина прямоугольника $ACBM_0$.

7.132. Медианы боковых сторон равнобедренного треугольника пересекаются под углом 60° . Найти угол при вершине треугольника.

Решение.

По условию $BA = BC$, $\angle(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{CM_2}) = 60^\circ$, где AM_1 , CM_2 — медианы $\triangle ABC$ (рис. 7.71). Требуется вычислить $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. Пусть

$BA = a$, $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \alpha$. Для нахождения угла α воспользуемся формулой $\cos 60^\circ = \frac{\overrightarrow{AM_1} \overrightarrow{CM_2}}{|\overrightarrow{AM_1}| |\overrightarrow{CM_2}|}$. (1)

С помощью рис. 7.73 запишем $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{BM_1} - \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CM_2} = \overrightarrow{BM_2} - \overrightarrow{BC}$.

Значит, $\overrightarrow{AM_1} \overrightarrow{CM_2} = \overrightarrow{BM_1} \overrightarrow{BM_2} - \overrightarrow{BA} \overrightarrow{BM_2} - \overrightarrow{BM_1} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \overrightarrow{BC} =$

$$= \frac{9}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cos \alpha - a \cdot \frac{1}{2}a \cos 0^\circ - \frac{1}{2}a \cos 0^\circ + a \cdot a \cos \alpha = a^2 \left(\frac{5}{4} \cos \alpha - 1 \right). \quad (2)$$

Рис. 7.73

Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то $AM_1 = CM_2$, откуда $|\overline{AM_1}| |\overline{CM_2}| = |\overline{AM_1}|^2 = \overline{AM_1}^2 = (\overline{BM_1} - \overline{BA})^2 = BM_1^2 - 2\overline{BM_1}\overline{BA} + BA^2 = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha + a^2 = a^2 \left(\frac{5}{4} - \cos \alpha \right)$.

(3)

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим $\cos 60^\circ = \frac{a^2 \left(\frac{5}{4} \cos \alpha - 1 \right)}{a^2 \left(\frac{5}{4} - \cos \alpha \right)} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{13}{14} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{13}{14}$.

Ответ: $\arccos \frac{13}{14}$.

7.133. Дана окружность радиусом R и точка M , $OM < R$, где O — центр окружности. Через M проведены прямые a, b, c , образующие попарно углы по 60° и пересекающие окружность в парах точек A и A_1, B и B_1, C и C_1 , являющихся вершинами выпуклого шестиугольника $ABCA_1B_1C_1$. Доказать, что $MA + MC + MB_1 = MA_1 + MC_1 + MB$.

Решение.

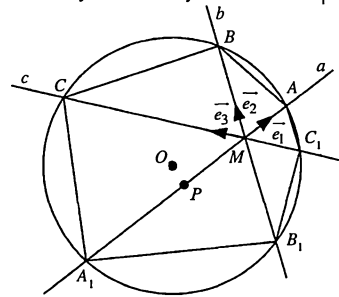


Рис. 7.74

Отложим от точки M на прямых a, b, c единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис. 7.74). Очевидно, что $\overline{OA} = \overline{OM} + MA\vec{e}_1$, $\overline{OA_1} = \overline{OM} - MA_1\vec{e}_1$. Сложив почленно эти равенства, получим $2\overline{OP} = 2\overline{OM} + (MA - MA_1)\vec{e}_1$, где P — середина $\overline{AA_1}$. Умножим скалярно последнее равенство на \vec{e}_1 :

$$0 = 2\overline{OM}\vec{e}_1 + MA - MA_1 \text{ или}$$

$$2\overline{OM}\vec{e}_1 = MA_1 - MA. \quad (1)$$

Аналогично запишем еще два равенства:

$$2\overline{OM}\vec{e}_2 = MB_1 - MB, \quad (2)$$

$$2\overline{OM}\vec{e}_3 = MC_1 - MC. \quad (3)$$

Сложим (1), (3) и вычтем (2); учитывая, что $\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$, получим $0 = MA_1 - MA - MB_1 + MB + MC_1 - MC$, откуда $MA + MC + MB_1 = MA_1 + MC_1 + MB$.

(4)

Если провести $2n + 1$ прямых ($n > 1$) через точку M , образующие попарно равные углы, то будет выполняться равенство, аналогичное (4). **QED.**

7.134. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AC} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$. Выразить через \vec{a} и \vec{b} единичный вектор, направленный по высоте треугольника, проведенного из вершины A .

Решение.

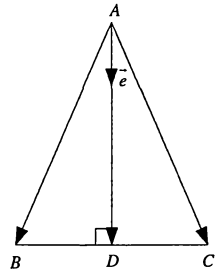


Рис. 7.75

Вектор \vec{e} (рис. 7.75) будем искать по формуле $\vec{e} = \frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}$. (1) Из условия задачи следует, что

$\triangle ABC$ — равносторонний. Поэтому $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ и $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} =$

$$= \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}. \text{ Далее, } |\overline{AD}| = \sqrt{\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ)} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Полученные выражения подставим в (1): } \vec{e} = \frac{\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{a} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{a} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{b}.$$

7.135. В прямоугольнике $ABCD$ проведен перпендикуляр BK на диагональ AC . Точки M и N — середины AK и CD . Доказать, что угол BMN прямой.

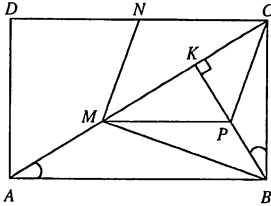


Рис. 7.76

Решение.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BK} = \vec{c} \text{ (рис. 7.76). Тогда } \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \\ &+ \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}. \quad \text{Поэтому } \overrightarrow{MN} \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) = \\ &= \frac{1}{4}(2\vec{ab} - \vec{ac} + 2\vec{bc} - \vec{c}^2) = \frac{1}{4}(2\vec{ab} + (\vec{b} - \vec{a})\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c})\vec{c}). \end{aligned}$$

Но по условию задачи $\vec{ab} = 0$, $(\vec{b} - \vec{c})\vec{c} = 0$, $(\vec{b} - \vec{a})\vec{c} = 0$, следовательно:

$$\overrightarrow{MN} \overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow \angle BMN = 90^\circ.$$

QED.

7.136. В треугольнике ABC дано: $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, где \vec{i} , \vec{j} — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный, и вычислить его площадь.

Решение.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{i} - 2\vec{j} = -\vec{i} + 2\vec{j}. \quad \text{Тогда } \overrightarrow{AB} \overrightarrow{BC} = (4\vec{i} + 2\vec{j})(-\vec{i} + 2\vec{j}) = -4\vec{i}^2 + 6\vec{i}\vec{j} + 4\vec{j}^2 = 0 \quad (\text{так как } \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \\ &= 1, \vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{i}\vec{j} = 0). \text{ Значит, } \triangle ABC \text{ прямоугольный и } \angle B = 90^\circ. \text{ Следовательно, } S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16+4}\sqrt{1+4} = 5 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Ответ: 5 кв. ед.

7.137. Дан косой четырехугольник $ABCD$, у которого $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$. Доказать, что $AD = BC$, $BD = AC$.

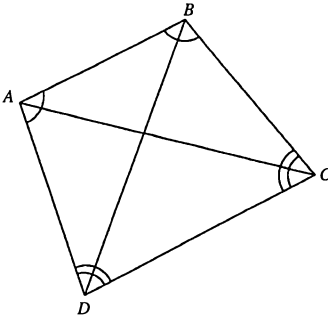


Рис. 7.77

Решение.

$$\text{Имеем (рис. 7.77): } \cos \angle A = \frac{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}, \quad \cos \angle B = \frac{\overrightarrow{BA} \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}. \quad \text{Поскольку}$$

$$\angle A = \angle B, \text{ то } \frac{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{\overrightarrow{BA} \overrightarrow{BC}}{BC}. \quad (1)$$

Аналогично,

$$\frac{\overrightarrow{CB} \overrightarrow{CD}}{CB} = \frac{\overrightarrow{DA} \overrightarrow{DC}}{DA}. \quad (2)$$

Примем произвольную точку O за начало векторов. Из (1) и (2) следует:

$$\frac{(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})}{AD} = \frac{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})}{BC}, \quad (3)$$

$$\frac{(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})}{CB} = \frac{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})}{DA}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получим:

$$\frac{\overrightarrow{OB} \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}^2}{AD} = \frac{\overrightarrow{OA} \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}^2}{BC}, \quad (5)$$

$$\frac{\overrightarrow{OB} \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC} \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}^2}{CB} = \frac{\overrightarrow{OA} \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD} \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}^2}{DA}. \quad (6)$$

После почленного сложения равенств (5) и (6) приходим к равенству $\frac{(\overline{OA} - \overline{OD})^2 + \overline{OAOC} - \overline{ODOC} + \overline{OBOD} - \overline{OBOA}}{AD} =$
 $= \frac{(\overline{OB} - \overline{OC})^2 + \overline{OAOC} - \overline{OAOB} + \overline{OBOD} - \overline{OCOD}}{CB}$, из которого после несложных преобразований следует, что
 $AD + \frac{(\overline{OC} - \overline{OB})(\overline{OA} - \overline{OD})}{AD} = BC + \frac{(\overline{OC} - \overline{OB})(\overline{OA} - \overline{OD})}{CB}$. Отсюда $(AD - BC) \left(1 - \frac{CBDA}{BC \cdot AD} \right) = 0$. Но векторы \overline{BC} и \overline{DA} неколлинеарные, поэтому $\overline{BCDA} \neq BC \cdot DA$. Следовательно, $AD = BC$. Из конгруэнтности треугольников ABC и ABD следует, что $AC = BD$. QED.

7.138. В окружности проведены радиусы OA, OB, OC . Найти величину угла AOB , если $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$.

Решение.

По условию $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC} \Rightarrow (\overline{OA} + \overline{OB})^2 = \overline{OC}^2$, т.е. $\overline{OA}^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2$ или $\overline{OA}^2 + 2|\overline{OA}||\overline{OB}|\cos \angle AOB + \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2$. Но $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = r$, где r — радиус окружности. Значит, последнее равенство запишется в виде $r^2 + 2r \cdot r \cdot \cos \angle AOB + r^2 = r^2 \Rightarrow \cos \angle AOB = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOB = 120^\circ$.

Ответ: 120° .

7.139. Дан треугольник ABC , в котором $AC = 3, BC = 4, \angle ACB = 120^\circ$. Найти расстояние от вершины C до точки M , делящей сторону AB в отношении 1:3, считая от вершины A .

Решение.

Имеем $\overline{CM} = \frac{3}{4}\overline{CA} + \frac{1}{4}\overline{CB}$. Отсюда $CM^2 = \overline{CM} \cdot \overline{CM} = \frac{9}{16}CA^2 + \frac{1}{16}CB^2 + \frac{6}{16}\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{9}{16} \cdot 9 + \frac{1}{16} \cdot 16 + \frac{6}{16} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = \frac{61}{16}$ и $CM = \frac{\sqrt{61}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{61}}{4}$.

7.140. Дан прямоугольный треугольник $ABC, \angle C = 90^\circ, D$ — основание высоты, проведенной из вершины прямого угла. Выразить вектор \overline{CD} через векторы \overline{CA} и \overline{CB} .

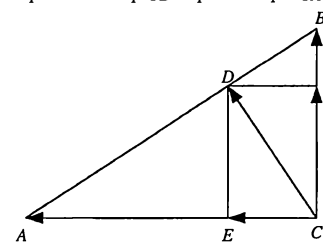


Рис. 7.78

Решение.

Проведем $DF \parallel CA$ и $DE \parallel CB$ (рис. 7.78). Тогда

$$\overline{CD} = \overline{CF} + \overline{CN} = \alpha \overline{CB} + \beta \overline{CA}. \quad (1)$$

Нам следует найти $\alpha = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{CB}|}$ и $\beta = \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{CA}|}$. Так как $\triangle EAD$ подобен $\triangle CAB$, то

$$\frac{ED}{CB} = \frac{EA}{CA} \quad \text{или} \quad \frac{CF}{CB} = \frac{EA}{CA} \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{CA - CE}{CA} = 1 - \frac{CE}{CA}, \quad \text{т.е.} \quad \alpha = 1 - \beta. \quad (2)$$

Так как $\overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0$, то $(\alpha \overline{CB} + \beta \overline{CA}) \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow \alpha \overline{CB} \cdot \overline{AB} + \beta \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \overline{BCBA} - \beta \overline{ACAB} = 0 \Rightarrow \alpha |\overline{BC}| |\overline{BA}| \cos B - \beta |\overline{AC}| |\overline{AB}| \cos A = 0$. Сокращая на $|\overline{AB}| \neq 0$ и используя равенство (2), имеем

$$(1 - \beta) |\overline{BC}| \cos B - \beta |\overline{AC}| \cos A = 0. \quad (3)$$

Так как $\cos B = \frac{BC}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$, то (3) примет вид $\frac{BC^2}{AB} - \frac{\beta BC^2}{AB} - \frac{\beta AC^2}{AB} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{CB^2}{AB^2}$ и, значит, $\alpha = 1 - \frac{CB^2}{AB^2} = \frac{CA^2}{AB^2}$.

Окончательно, выражение (1) принимает вид $\overline{CD} = \frac{CA^2 \overline{CB} + CB^2 \overline{CA}}{AB^2}$.

Ответ: $\frac{CA^2 \overline{CB} + CB^2 \overline{CA}}{AB^2}$.

7.141. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

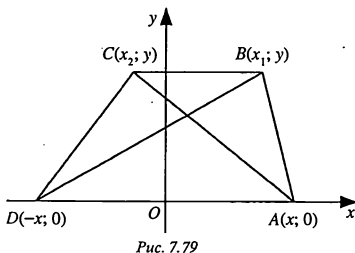


Рис. 7.79

Решение.

Расположим оси координат так, чтобы основание AD трапеции $ABCD$ находилось на оси абсцисс, а началом координат служила середина AD (рис. 7.79). Тогда $A(x; 0)$, $B(x_1; y)$, $C(x_2; y)$, $D(-x; 0)$, где $x > 0$, $x_1 > x_2$. Требуется доказать, что $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC$. (1)

Действительно, на основании формулы 7.10 имеем:

$$AC^2 + BD^2 = (x_2 - x)^2 + y^2 + (x_1 + x)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) + x_1^2 + x_2^2 + 2x(x_1 - x_2). \quad (2)$$

$$AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC = (x_1 - x)^2 + y^2 + (x_2 + x)^2 + y^2 + 2 \cdot 2x(x_1 - x_2) = 2(x^2 + y^2) + x_1^2 + x_2^2 + 2x(x_1 - x_2). \quad (3)$$

Очевидно, что из соотношений (2) и (3) вытекает соотношение (1).

QED.

7.142. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доказать, что две медианы треугольника перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение?

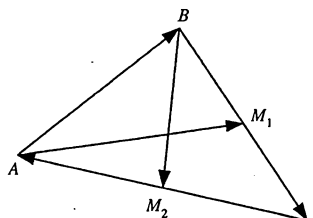


Рис. 7.80

Решение.

Пусть $\overline{AB} = \vec{c}$, $\overline{BC} = \vec{a}$, $\overline{CA} = \vec{b}$, $\overline{AM_1} = \vec{m_1}$, $\overline{BM_2} = \vec{m_2}$, где AM_1, BM_2 — медианы $\triangle ABC$ (рис. 7.80). Имеем $\vec{m_1} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{m_2} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, поэтому

$$\overline{m_1 m_2} = \left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} \right) \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) = \vec{c}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{c}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}\vec{b}. \quad (1)$$

Для нахождения $\vec{c}\vec{a}$, $\vec{c}\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$ воспользуемся тем, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Поэтому

$$\vec{c} + \vec{a} = -\vec{b} \Rightarrow c^2 + a^2 + 2\vec{c}\vec{a} = b^2 \Rightarrow \vec{c}\vec{a} = \frac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2). \quad (2)$$

Аналогично получаем, что

$$\vec{c}\vec{b} = \frac{1}{2}(a^2 - c^2 - b^2), \quad (3)$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(c^2 - a^2 - b^2). \quad (4)$$

Подставим выражения (2) — (4) в (1): $\overline{m_1 m_2} = \frac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2) + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}(a^2 - c^2 - b^2) + \frac{1}{8}(c^2 - a^2 - b^2) = \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - 5c^2) = 0$ (по условию $a^2 + b^2 = 5c^2$), поэтому $m_1 \perp m_2$.

Справедливо и обратное утверждение. Действительно, пусть известно, что $m_1 \perp m_2$, т.е. $\overline{m_1 m_2} = 0$. Тогда, вычисляя

$$\overline{m_1 m_2} \text{ способом, указанным ранее, получим } \overline{m_1 m_2} = \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - 5c^2) = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5c^2. \quad \text{QED.}$$

7.143. Доказать, что сумма квадратов расстояний от фиксированной точки K , взятой в плоскости данной окружности, до концов произвольного диаметра этой окружности есть величина постоянная.

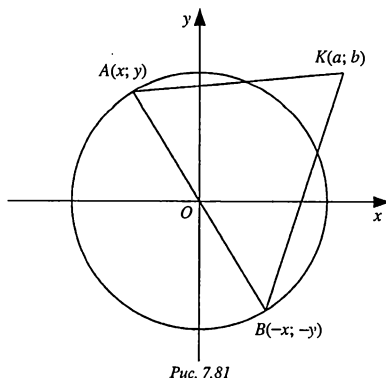


Рис. 7.81

Решение.

Поместим начало координат в центр O данной окружности (рис. 7.81). Пусть AB — произвольный диаметр этой окружности. Очевидно, если точка A имеет координаты $(x; y)$, то координаты точки B будут $(-x; -y)$. Пусть $K(a; b)$, а радиус окружности будет R . Тогда $KA^2 + KB^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (a+x)^2 + (b+y)^2 = 2(a^2 + b^2 + x^2 + y^2)$. Приравняв во внимание, что $a^2 + b^2 = KO^2$ и $x^2 + y^2 = R^2$, получим $KA^2 + KB^2 = 2(KO^2 + R^2)$. Так как KO и R сохраняют постоянную величину при любом положении диаметра AB , то утверждение задачи верно. **QED.**

7.144. В ромбе $ABCD$ длина стороны равна 6, а величина угла BAD равна 60° . На стороне BC взята точка N такая, что $NC = 2$. Найти расстояние от N до центра симметрии ромба.

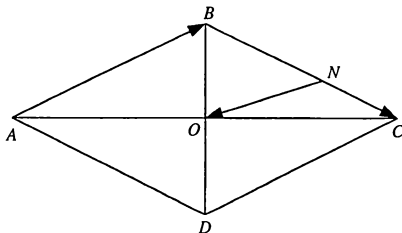


Рис. 7.82

Решение.

Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (рис. 7.82). Тогда $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$. Выразим вектор \overrightarrow{NO} через векторы \vec{a} и \vec{b} . Имеем:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BO} &= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}), \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{b} \\ (\text{так как } \frac{BC}{NC} &= \frac{6}{2} = \frac{3}{1}). \text{ Тогда } \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \\ &= -\frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{-\vec{b} - 3\vec{a}}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомое расстояние $|\overrightarrow{NO}| = \frac{1}{6}\sqrt{\vec{b}^2 + 6\vec{a}\vec{b} + 9\vec{a}^2} = \frac{1}{6}\sqrt{36 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \cos 60^\circ + 9 \cdot 36} = \sqrt{13}$ (так как $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6$).

Ответ: $\sqrt{13}$.

7.145. Окружность O и квадрат $ABCD$ имеют общий центр. Доказать, что для любой точки M окружности выражение $MA^2 \cdot MC^2 + MB^2 \cdot MD^2$ сохраняет постоянную величину.

Решение.

Выберем систему координат так, чтобы диагонали квадрата $ABCD$ лежали на осях координат (рис. 7.83). Если половину диагонали квадрата примем равной a , то вершины квадрата будут иметь следующие координаты: $A(a; 0)$, $B(0; a)$, $C(-a; 0)$, $D(0; -a)$. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка данной окружности с центром в начале координат и R — радиус

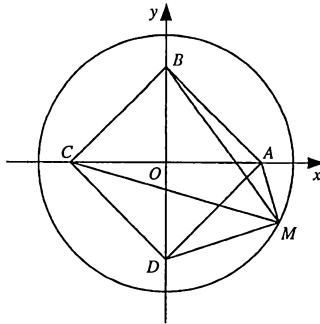


Рис. 7.83

этой окружности (т.е. $x^2 + y^2 = R^2$). Тогда $MA^2 \cdot MC^2 + MB^2 \cdot MD^2 = ((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2) + (x^2 + (y-a)^2)(x^2 + (y+a)^2) = (R^2 + a^2 - 2ax)(R^2 + a^2 + 2ax) + (R^2 + a^2 - 2ay)(R^2 + a^2 + 2ay) = (R^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 + (R^2 + a^2)^2 - 4a^2y^2 = 2(R^2 + a^2)^2 - 4a^2R^2 = 2(R^4 + a^4)$. Так как последнее выражение не зависит от координат точки M , то утверждение задачи верно. **QED.**

7.146. В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AB и $AK = 3KB$; медиана AM_1 пересекается с CK в точке O . Найти AB , если $AM_1 = CK = 7$ см и $\angle KOM_1 = \frac{\pi}{3}$.

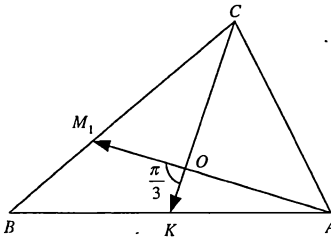


Рис. 7.84

Решение.

Так как AM_1 — медиана $\triangle ABC$, то $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (рис. 7.84). Далее, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CK}$. Подставляя полученное выражение в векторное выражение для медианы $\overrightarrow{AM_1}$, получим $\overrightarrow{AM_1} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CK} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{8}{7}\overrightarrow{AM_1} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CK}$. Следовательно, $AB^2 = \frac{64}{49}AM_1^2 + \frac{64}{49}AM_1CK + \frac{16}{49}CK^2 = \frac{64}{49} \cdot 49 + \frac{64}{49} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \frac{16}{49} \cdot 49 = 112$ т.е. $AB = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$ (см).

Ответ: $4\sqrt{7}$ (см).

7.147. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB построена высота CD и перпендикуляр DE к стороне BC ($E \in BC$). Точка M — середина отрезка DE . Доказать, что отрезки AE и CM перпендикулярны.

Решение.

Пусть $\angle CDE = \alpha$ (рис. 7.85). Очевидно, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE})$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$. Отсюда

$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CDAD} + \overrightarrow{CDDE} + \overrightarrow{CEAD} + \overrightarrow{CEDE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CEDB} - \overrightarrow{DCDE})$, так как $\overrightarrow{CDAD} = 0$, $\overrightarrow{CEDE} = 0$. Далее, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(CE \cdot DB \cdot \cos \alpha - DC \cdot DE \cdot \cos \alpha) = \frac{1}{2} \cos \alpha (CE \cdot DB - DC \cdot DE) = 0$, так как $CE \cdot DB = DC \cdot DE$ вследствие подобия треугольников CDE и DBE . Отсюда следует, что $CM \perp AE$. **QED.**

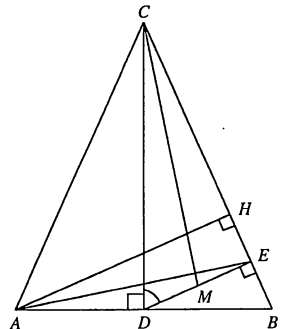


Рис. 7.85

7.148. В параллелограмме $ABCD$ точка P — середина стороны BC , а точка Q — середина стороны CD . Найти AD , если $AP = 6$ см, $AQ = 3$ см и $\angle PAQ = 60^\circ$.

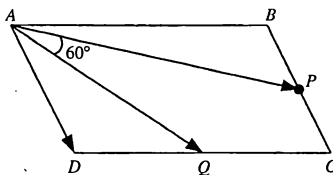


Рис. 7.86

Решение.

Используя рис. 7.86, выразим вектор \overrightarrow{AD} через векторы \overrightarrow{AP} и \overrightarrow{AQ} . Имеем

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AQ}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} \Rightarrow \overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AQ}. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), находим $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(2\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP})$. Далее, получа-

$$\text{ем } |\overrightarrow{AD}| = AD = \frac{2}{3}\sqrt{4AQ^2 - 4AQ \cdot AP \cdot \cos 60^\circ + AP^2} = \frac{2}{3}\sqrt{36 - 36 + 36} = 4 \text{ (см).}$$

Ответ: 4 (см).

7.149. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. Через середину M хорды AB и точку пересечения S диагоналей четырехугольника проведена прямая MS . Доказать, что $MS \perp CD$. (Решить задачу посредством векторов без применения скалярного произведения векторов.)

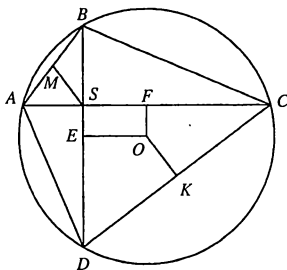


Рис. 7.87

Решение.

Пусть E и F — середины BD и AC соответственно (рис. 7.87), тогда $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Далее, $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OK}$, где K — середина DC , значит, $MS \parallel OK$. Так как $OK \perp CD$, то и $MS \perp CD$. QED.

7.150. Найти длину медианы AM_1 треугольника ABC , если $AB = 10$ см, $AC = 6$ см и $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

Выразим вектор $\overrightarrow{AM_1}$ через векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} . Имеем: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$. Тогда $AM_1 = |\overrightarrow{AM_1}| = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC + AB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 60} = 7 \text{ (см).}$

Ответ: 7 (см).

7.151. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Через середину M стороны AB проведена прямая MO , пересекающая сторону CD в точке N . Выразить отношение $k = CN:ND$ через $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $d = OD$.

Решение.

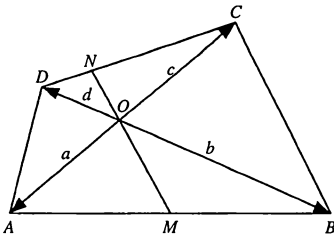


Рис. 7.88

Выберем векторы \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{OB} за базисные (рис. 7.88). Имеем:
 $\overrightarrow{OC} = -\frac{c}{a}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} = -\frac{d}{b}\overrightarrow{OB}$. Так как \overrightarrow{OM} и \overrightarrow{ON} коллинеарные векторы, то

$$\overrightarrow{ON} = x\overrightarrow{OM} \text{ или } \overrightarrow{ON} = \frac{x}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \quad (1)$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OD}}{1+k} = -\frac{c}{a(1+k)}\overrightarrow{OA} - \frac{kd}{b(1+k)}\overrightarrow{OB}. \quad (2)$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным век-

торам из (1) и (2) получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = -\frac{c}{a(1+k)}, \\ \frac{x}{2} = -\frac{kd}{b(1+k)} \end{cases} \Rightarrow k = \frac{bc}{ad}.$$

$$\text{Отметим: } \frac{bc}{ad}.$$

7.152. На сторонах BC, CA, AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) даны соответственно точки A_1, B_1, C_1 . Доказать, что отрезки CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны и равны, если точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника по обходу в равных отношениях.

Решение.

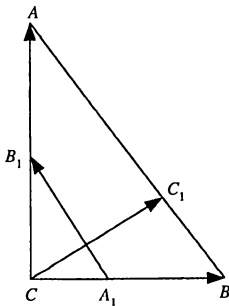


Рис. 7.89

Пусть $CA = CB = x$ (рис. 7.89), $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{a}{b} \Rightarrow \overrightarrow{CA_1} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB_1} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}$.

Разложим векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ по векторам \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} . Имеем:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CA_1} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} - \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BC_1} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{BA} = \frac{b}{a+b}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}). \text{ Значит,}$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{CB} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CA} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CB} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CA}. \quad (2)$$

$$\text{Используя (1) и (2), получаем } \overrightarrow{A_1B_1} \overrightarrow{CC_1} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \overrightarrow{CACB} - \frac{ab}{a+b} \overrightarrow{CB}^2 + \frac{ab}{a+b} \overrightarrow{CA}^2 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \overrightarrow{CBCA} = \frac{ab}{a+b} (x^2 - x^2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} \perp \overrightarrow{CC_1} \Rightarrow A_1B_1 \perp CC_1.$$

$$\text{Далее, } |\overrightarrow{A_1B_1}|^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 x^2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 x^2 = |\overrightarrow{CC_1}|^2 \Rightarrow A_1B_1 = CC_1.$$

QED.

7.153. Точки R и Q — проекции точки P , принадлежащей стороне AB равностороннего треугольника ABC , на его стороны BC и AC . Доказать, что медиана PM треугольника PQR проходит через центр треугольника ABC .

Решение.

Пусть точка O — центр $\triangle ABC$, AA_1 и BB_1 — его медианы (рис. 7.90), $BP:AB = \alpha$, $PA:AB = \beta$. Имеем:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = -\frac{2}{3}\alpha\overrightarrow{AA_1} - \frac{2}{3}\beta\overrightarrow{BB_1}, \text{ т.е.}$$

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{2}{3}(\alpha\overrightarrow{AA_1} + \beta\overrightarrow{BB_1}). \quad (1)$$

Далее, $\overrightarrow{PR} = \alpha\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{PQ} = \beta\overrightarrow{BB_1}$, поэтому

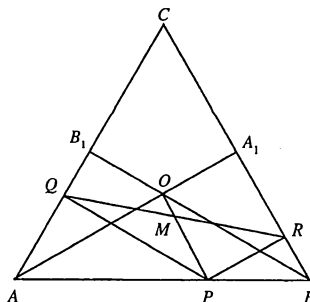


Рис. 7.90

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}(\alpha \overrightarrow{AA_1} + \beta \overrightarrow{BB_1}). \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\overrightarrow{PA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{PM}$, значит, прямая PM проходит через точку O .

QED.

7.154. Дан треугольник ABC : BM — медиана, $\angle MBC = 90^\circ$, $BM = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$. Найти $\angle ABM$.

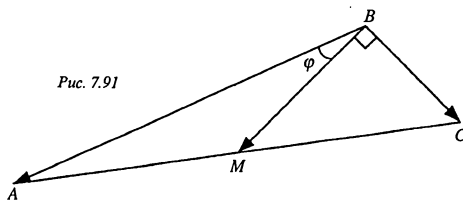


Рис. 7.91

Решение.

Пусть $\angle ABM = \varphi$ (рис. 7.91). Для его нахождения используем

формулу $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BM}|}$. Имеем $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC}$.

Значит,

$$\cos \varphi = \frac{(2\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BM}|} = \frac{2BM^2 - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BM}|} = \frac{2BM^2}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BM}|}, \quad (1)$$

так как $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BM}$. Из равенства $BM = \frac{\sqrt{3}}{4} AB \Rightarrow AB = \frac{4}{\sqrt{3}} BM$. Тогда (1) принимает вид $\cos \varphi = \frac{2BM^2}{\frac{4}{\sqrt{3}} BM^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

7.155. Доказать, что для всякого параллелограмма, у которого a и b — длины сторон, e и f — длины диагоналей, выполняется неравенство $a^2 - b^2 < ef$.

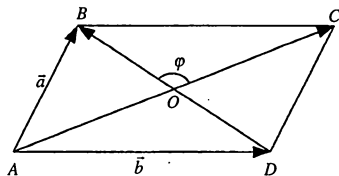


Рис. 7.92

Решение.

Если $ABCD$ — параллелограмм, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, то $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$ (рис. 7.92). Тогда $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = a^2 - b^2$. Но $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = ef \cos \alpha$, следовательно, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} < ef$ и $a^2 - b^2 < ef$.

QED.

7.156. На плоскости заданы точки $A(-6; -1)$, $B(-4; -4)$, $C(-1; -6)$, $D(-3; -3)$. Доказать, что $ABCD$ — ромб, и вычислить его площадь.

Решение.

Находим $AB = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{13}$, $CD = \sqrt{13}$, $DA = \sqrt{13}$. Так как $AB = BC = CD = DA$, то $ABCD$ — ромб или квадрат. У квадрата стороны перпендикулярны, т.е. $\overrightarrow{AB} \overrightarrow{BC} = 0$, но имеем $\overrightarrow{AB}(2; -3)$, $\overrightarrow{BC}(3; -2)$ и $\overrightarrow{AB} \overrightarrow{BC} = 12 \neq 0 \Rightarrow ABCD$ — ромб.

Площадь ромба $ABCD$ найдем по формуле $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ где AC, BD — диагонали ромба. Так как $AC = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$ и $BD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, то $S = \frac{1}{2} \sqrt{50} \sqrt{2} = 5$ (кв. ед.).

Ответ: 5 кв. ед.

7.157. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые PC, QD, RA, SB пересекаются в точках K, L, M, N . Доказать, что $KLMN$ — параллелограмм, и выразить векторы \overrightarrow{MK} и \overrightarrow{NL} через $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

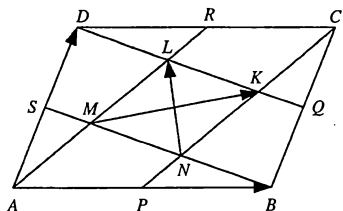


Рис. 7.93

Решение.

Заметим, что $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{PC} = \frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{SB} = \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}$, поэтому $AR \parallel PC$ и $DQ \parallel SB$; отсюда следует, что $KLMN$ — параллелограмм.

Имеем $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM}$ (рис. 7.93). Выразим через векторы \vec{a} и \vec{b} векторы \overrightarrow{AK} и \overrightarrow{AM} . Для вектора \overrightarrow{AK} получим: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \alpha\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)$, $\overrightarrow{AK} = \vec{b} + \beta\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$, или $\frac{1+\alpha}{2}\vec{a} + \alpha\vec{b} = \beta\vec{a} + \frac{2-\beta}{2}\vec{b}$, откуда $\frac{1+\alpha}{2} = \beta$, $\alpha =$

$= \frac{2-\beta}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{5}$, $\beta = \frac{4}{5}$ (теорема о единственности разложения вектора). Следовательно, $\overrightarrow{AK} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{5}$. Аналогично,

$\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{b}}{2} + \gamma\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{AM} = \delta\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)$, поэтому $\gamma\vec{a} + \frac{1-\gamma}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\delta\vec{a} + \delta\vec{b}$, откуда находим $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$. Окончательно получаем, что $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b})$.

Остается найти разложение вектора \overrightarrow{NL} . Имеем $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AN}$. Далее, $\overrightarrow{AL} = x\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{b} + y\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$. Отсюда $\frac{1}{2}x = y$, $x = 1 - \frac{1}{2}y$. Из этой системы находим $y = \frac{2}{5}$; тогда $\overrightarrow{AL} = \frac{2\vec{a} + 4\vec{b}}{5}$. Так как $KLMN$ параллелограмм, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AL}$. Следовательно, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{5}(\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{a} - 4\vec{b})$, т.е. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b})$. Итак, $\overrightarrow{NL} = \frac{1}{5}(-\vec{a} + 3\vec{b})$.

Ответ: $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{NL} = \frac{1}{5}(-\vec{a} + 3\vec{b})$.

7.158. Даны два вектора $\overrightarrow{OA}(-1; 2)$ и $\overrightarrow{OB}(-4; -2)$, где O — начало координат. Найти длину отрезка AB и площадь треугольника OAB .

Решение.

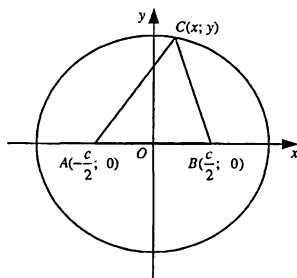
Так как $\overrightarrow{OA}(-1; 2)$, то $-1 = x_1 - 0$ и $2 = y_1 - 0$, где $(x_1; y_1)$ — координаты точки A . Значит, $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, т.е. $A(-1; 2)$.

Аналогично находим, что $B(-4; -2)$. Таким образом, $AB = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$.

Площадь $\triangle OAB$ найдем по формуле $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \varphi$, где $\varphi = \angle AOB$. Находим $OA = \sqrt{5}$, $OB = \sqrt{20}$ и $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (-1)(-4) + (-2) \cdot 2 = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$. Подставляя найденные величины в формулу для площади, получаем $S = \frac{1}{2} \sqrt{5} \sqrt{20} \sin 90^\circ = 5$ (кв. ед.).

Ответ: 5; 5 кв. ед.

7.159. Дан отрезок AB , $|AB| = c$. Найти множество таких точек C , для которых $CA^2 + CB^2 = 2c^2$.



Решение.

Будем решать эту задачу методом координат. Примем середину O отрезка AB за начало координат (рис. 7.94) и положим: $A(-\frac{c}{2}; 0)$, $B(\frac{c}{2}; 0)$, $C(x; y)$.

Тогда $\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = 2c^2$. Отсюда получаем $x^2 + y^2 = \frac{3c^2}{4}$.

Итак, искомое множество точек C есть окружность с центром в середине данного отрезка AB радиусом $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $x^2 + y^2 = \frac{3c^2}{4}$.

Рис. 7.94

7.160. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM_1}$ и $\overrightarrow{BM_2}$, если AM_1 и BM_2 — медианы равнобедренного треугольника ABC , площадь которого равна S , а $\angle A = 120^\circ$.

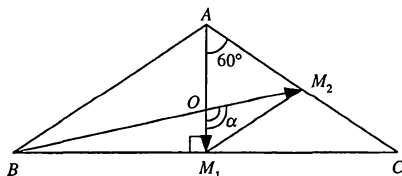


Рис. 7.95

Решение.

По условию $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = BC$. Следовательно, медиана $AM_1 \perp BC$ и $\angle M_1AC = 60^\circ$ (рис. 7.95). Скалярное произведение будем искать по формуле

$$\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{BM_2} = |\overrightarrow{AM_1}| |\overrightarrow{BM_2}| \cos \alpha, \quad (1)$$

где $\alpha = \angle M_1OM_2$. В $\triangle ABM_1$ имеем

$$\angle ABM_1 = 30^\circ \Rightarrow AM_1 = \frac{1}{2} AB. \quad (2)$$

Из разложения $\overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_2}$ находим $BM_2^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM_2} + AM_2^2$; но $AM_2 = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB$, следовательно,

$$BM_2^2 = \frac{5}{4} AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM_2} = \frac{5}{4} AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cos 120^\circ = \frac{7}{4} AB^2 \Rightarrow BM_2 = \frac{\sqrt{7}}{2} AB. \quad (3)$$

Далее, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, где $M_1M_2 = \frac{1}{2} AB$, $OM_2 = \frac{1}{3} BM_2 = \frac{\sqrt{7}}{6} AB$ (см. (3)), $OM_1 = \frac{1}{3} AM_1 = \frac{1}{6} AB$ (см. (2)). Значит:

$$M_1M_2^2 = OM_2^2 - 2\overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{OM_1} + OM_1^2 \Rightarrow \frac{1}{4} AB^2 = \frac{7}{36} AB^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{6} AB \cdot \frac{1}{6} AB \cos \alpha + \frac{1}{36} AB^2 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{7}}. \quad (4)$$

Подставляя (2) — (4) в (1), получим $\overline{AM_1BM_2} = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} AB \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{7}}\right) = -\frac{1}{8} AB^2$. Выразим AB^2 через данное значение S .

Имеем $S = \frac{1}{2} AB^2 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $\overline{AM_1BM_2} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} = -\frac{S\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $-\frac{S\sqrt{3}}{6}$.

7.161. В плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка M и рассматриваются попарно отрезки MA и MC , MB и MD , BC и CD . Доказать:

- 1) если отрезки одной пары взаимно перпендикулярные, то сумма квадратов длин отрезков второй пары равна сумме квадратов длин отрезков третьей пары;
- 2) если отрезки одной пары, а также отрезки второй пары взаимно перпендикулярные, то отрезки третьей пары также взаимно перпендикулярные.

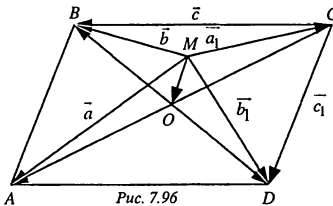


Рис. 7.96

Решение.

Проведем предварительные рассуждения. Введем в рассмотрение векторы $\overline{MA} = \vec{a}$, $\overline{MC} = \vec{a_1}$, $\overline{MB} = \vec{b}$, $\overline{MD} = \vec{b_1}$, $\overline{CB} = \vec{c}$, $\overline{CD} = \vec{c_1}$ и еще три вектора \overline{DB} , \overline{CA} и \overline{MO} , где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма (рис. 7.96). Так как MO — общая медиана $\triangle AMC$ и $\triangle BMD$, то $\vec{a} + \vec{a_1} = \vec{b} + \vec{b_1}$.

(1)

Из параллелограмма $ABCD$ и $\triangle AMC$ имеем $\vec{c} + \vec{c_1} = \overline{CA}$, $-\vec{a_1} + \vec{a} = \overline{CA}$. Следовательно,

$$\vec{c} + \vec{c_1} = \vec{a} - \vec{a_1}.$$

(2)

Из параллелограмма $ABCD$ и $\triangle BMD$ имеем $-\vec{c_1} + \vec{c} = \overline{DB}$, $-\vec{b_1} + \vec{b} = \overline{DB}$. Отсюда

$$\vec{b} - \vec{b_1} = \vec{c} - \vec{c_1}.$$

(3)

Возведем в квадрат обе части каждого из равенств (1) — (3) и вновь полученные равенства почленно сложим; тогда

$$\vec{a}\vec{a_1} + \vec{c}\vec{c_1} = \vec{b}\vec{b_1}.$$

(4)

Перейдем к непосредственному доказательству.

- 1) Пусть, например, $\vec{a} \perp \vec{a_1}$, тогда из (4) следует, что $\vec{c}\vec{c_1} = \vec{b}\vec{b_1}$. Возведя в квадрат обе части равенства (3), получим

$\vec{b}^2 + \vec{b_1}^2 - 2\vec{b}\vec{b_1} = \vec{c}^2 + \vec{c_1}^2 - 2\vec{c}\vec{c_1}$. Учитывая, что $\vec{c}\vec{c_1} = \vec{b}\vec{b_1}$ и что скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, получим $b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$. Аналогично доказывается, что если $\vec{b} \perp \vec{b_1}$ или $\vec{c} \perp \vec{c_1}$, то $a^2 + a_1^2 = c^2 + c_1^2$ или $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2$ соответственно.

- 2) Пусть $\vec{a} \perp \vec{a_1}$ и $\vec{b} \perp \vec{b_1}$, тогда $\vec{a}\vec{a_1} = \vec{b}\vec{b_1} = 0$ и из равенства (4) получаем, что $\vec{c}\vec{c_1} = 0$. Отсюда $\vec{c} \perp \vec{c_1}$.

QED.

7.162. В квадрат вписана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора этой точки. Найти эту сумму.

Решение.

Введем систему координат с началом в центре окружности O (рис. 7.97). Пусть сторона квадрата равна $2a$, тогда $A(a; a)$, радиус окружности равен a и уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = a^2$. Для произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей окружности, имеем $\overline{MA}(a - x_1; a - y_1)$. Тогда $MA^2 = 3a^2 - 2a(x_1 + y_1)$.

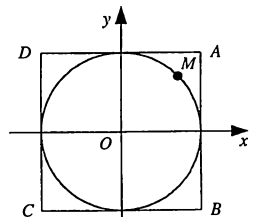


Рис. 7.97

Точка S симметрична точке A относительно точки O . Значит, $C(-a; a)$ и $\overline{MC}(-a-x_1; -a-y_1) \Rightarrow MC^2 = 3a^2 + 2a(x_1 + y_1)$.

Тогда $MA^2 + MC^2 = 6a^2$. Но $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 = 6a^2$. Значит, сумма квадратов расстояний от M до всех вершин квадрата постоянна и равна $6a^2 \cdot 2 = 12a^2$.

Ответ: $12a^2$, где $2a$ — длина стороны квадрата.

7.163. Пусть O — произвольная точка в плоскости треугольника ABC . Обозначим через P, Q, R точки пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COA (рис. 7.98). Доказать, что точка O и точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR лежат на одной прямой.

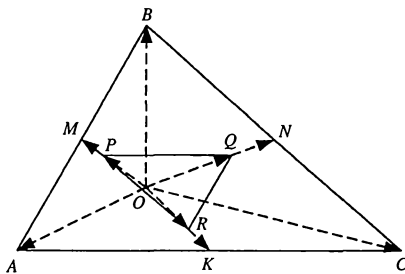


Рис. 7.98

Решение.

Пусть O_1 — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (на рис. 7.98 точка O_1 не показана). На основании задачи 7.014 запишем:

$\overline{OO_1} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$. Пусть O_2 — точка пересечения медиан $\triangle PQR$ (точка O_2 также не показана на рис. 7.98) и M, N, K — середины сторон AB, BC, AC соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{OO_2} &= \frac{1}{3}(\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR}) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overline{OM} + \frac{2}{3}\overline{ON} + \frac{2}{3}\overline{OK}\right) = \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} + \frac{\overline{OB} + \overline{OC}}{2} + \frac{\overline{OC} + \overline{OA}}{2}\right) = \frac{2}{9}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}). \end{aligned}$$

Таким образом, векторы $\overline{OO_1}$ и $\overline{OO_2}$ коллинеарны. Но так как они отложены от одной точки O , то точки O, O_1 и O_2 лежат на одной прямой. **QED.**

7.164. Около квадрата описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точек окружности до вершин квадрата не зависит от выбора этих точек. Найти эту сумму.

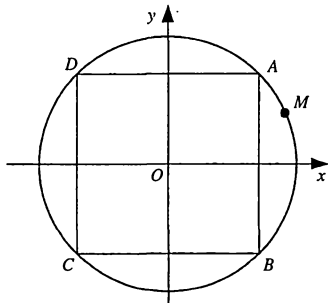


Рис. 7.99

Решение.

Введем систему координат с началом в центре окружности O (рис. 7.99).

Пусть сторона квадрата равна a ; тогда точка A имеет координаты $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$,

радиус равен $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ и уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$. Для произвольной точки $M(x_1; y_1)$, лежащей на окружности, имеем

$$\overline{MA}\left(\frac{a}{2} - x_1; \frac{a}{2} - y_1\right). \text{ Тогда } MA^2 = a^2 a(x_1 + y_1).$$

Точка S симметрична точке A относительно точки O ; значит, $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$

и $\overline{MC}\left(-\frac{a}{2} - x_1; -\frac{a}{2} - y_1\right) \Rightarrow MC^2 = a^2 + a(x_1 + y_1)$. Тогда $MA^2 + MC^2 =$

$= 2a^2$. Но $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 = 2a^2$. Значит, сумма квадратов расстояний от M до всех вершин квадрата постоянна и равна $2a^2 \cdot 2 = 4a^2$.

Ответ: $4a^2$, где a — сторона квадрата.

7.165. Даны две точки F_1 и F_2 , расстояние между которыми $2c$. Найти геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до точек F_1 и F_2 равна $2a$ при условии, что $a > c$.

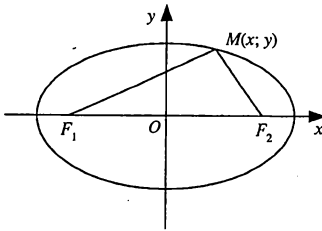


Рис. 7.100

Решение.

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox проходила через точки F_1 и F_2 и имела положительное направление от F_1 к F_2 , начало координат возьмем в середине отрезка F_1F_2 . Тогда $F_1(c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости, удовлетворяющая условию задачи. Тогда

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (1)$$

По условию $F_1M + F_2M = 2a$. Подставляя сюда значения F_1M и F_2M из формул (1), получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (2)$$

Это и есть уравнение искомого геометрического места точек. Множество всех точек плоскости, удовлетворяющих условию задачи, называется *эллипсом* (рис. 7.100).

Преобразуем уравнение (2). Перенесем второй радикал левой части уравнения в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат; после приведения подобных членов получим $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Возведем обе части этого равенства в квадрат и, приводя подобные члены, найдем:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение новую величину $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (по условию $a > c$). Тогда $b^2 = a^2 - c^2$ и уравнение (3) примет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$.

7.166. Найти длину биссектрисы AB_1 треугольника ABC , если $AB = c$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$.

Решение.

Так как AB_1 биссектриса $\triangle ABC$, то $\frac{BB_1}{BA} = \frac{B_1C}{AC} = \frac{BC - BB_1}{AC} = \frac{BC}{AC} - \frac{BB_1}{AC}$, т.е. $BB_1 = \frac{AB}{AB + BC} \cdot BC = \frac{c}{b + c} BC$. Это знач

чит, что векторы $\overrightarrow{BB_1}$ и \overrightarrow{BC} коллинеарны и сонаправлены, поэтому $\overrightarrow{BB_1} = \frac{c}{b + c} \overrightarrow{BC}$. Далее,

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b + c} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b + c} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{c}{b + c} \overrightarrow{AC} + \left(1 - \frac{c}{b + c}\right) \overrightarrow{AB} = \frac{1}{b + c} (c\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AB}).$$

$$\text{Отсюда } AB_1 = \frac{1}{b + c} \sqrt{(c\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AB})^2} = \frac{1}{b + c} \sqrt{c^2b^2 + 2c^2b^2 \cos \alpha + b^2c^2} = \frac{bc}{b + c} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)} = \frac{2bc}{b + c} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\frac{2bc}{b + c} \cos \frac{\alpha}{2}$.

7.167. Даны две точки F_1 и F_2 на расстоянии $2c$ друг от друга. Найти геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до точек F_1 и F_2 равна $2a$ при условии, что $c > a$.

Решение.

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox проходила через точки F_1 , F_2 и имела положительное направление от F_1 к F_2 ; начало координат O возьмем в середине отрезка F_1F_2 . Тогда $F_1(c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Пусть $M(x; y)$ произвольная точка плоскости, удовлетворяющая условию задачи. По условию $|F_1M - F_2M| = 2a$ или $F_1M - F_2M = \pm 2a$. (1)

Подставляя в (1) выражения $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, получим

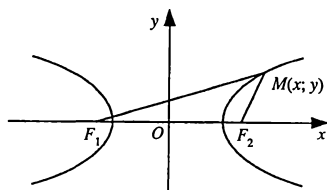


Рис. 7.101

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (2)$$

Это и есть уравнение искомого геометрического места точек. Множество всех точек плоскости, удовлетворяющих условию задачи, называется *гиперболой* (рис. 7.101).

Упростим уравнение (2). Перенесем второй радикал левой части равенства (2) вправо и возведем обе части полученного равенства в квадрат. Приведя подобные члены, получим $cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Возведя обе части этого равенства в квадрат и приведя подобные члены, приходим к уравнению

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \text{ или } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение новую величину $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (по условию $c > a$). Тогда $b^2 = c^2 - a^2$ и уравнение (3) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

7.168. Даны треугольник ABC и медиана CM . Прямая l пересекает отрезки CA , CB и CM в точках A_1 , B_1 и M_1 соответственно. Доказать равенство $\frac{1}{2} \left(\frac{CA}{CA_1} + \frac{CB}{CB_1} \right) = \frac{CM}{CM_1}$.

Решение.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{CM_1}$ (рис. 7.102): $\overrightarrow{CA_1} = k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB_1} = n\overrightarrow{CB}$,

$\overrightarrow{CM_1} = m \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$. Задача заключается в доказательстве истинности равенства

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{m}.$$

Легко увидеть, что $\overrightarrow{CM_1} = (1-s)\overrightarrow{CB_1} + s\overrightarrow{CA_1}$. Подставив в эту формулу указанные выше значения векторов $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{CM_1}$, получаем $\frac{m}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) =$

$= (1-s)n\overrightarrow{CB} + sk\overrightarrow{CA}$. На основании единственности разложения вектора по неко-

ллинеарным векторам \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} получаем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{m}{2} = sk, \\ \frac{m}{2} = (1-s)n \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{2k} = s, \frac{m}{2n} = 1-s$. После их почленно-

го сложения получим $\frac{m}{2k} + \frac{m}{2n} = 1$ или $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{m}$.

QED.

7.169. Дан треугольник ABC , точка O — центр описанной около него окружности, H — точка пересечения его высот. Доказать векторное равенство $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Решение.

Из условия задачи (рис. 7.103) следует, что $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2$ или $(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$, $(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$. После почленного вычитания получим $(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 0$. Аналогично из условий $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$,

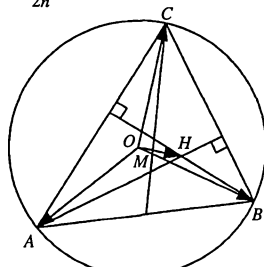


Рис. 7.103

$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2$ вытекает равенство $(\overline{OA} - \overline{OC})(\overline{OH} - \overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC}) = 0$. Но векторы $\overline{OC} - \overline{OB}$, $\overline{OA} - \overline{OC}$ ненулевые; поэтому вектор, перпендикулярный к каждому из них, может быть только нулевым, тогда $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

Если M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, то, учитывая решение задачи 7.014, получим $\overline{OH} = 3\overline{OM}$.

Итак, в неравностороннем треугольнике ($O \neq M$) центр описанной окружности, центр пересечения медиан и точка пересечения высот принадлежат одной прямой, причем $M \in OH$ и $OH:OM = 3$. Эта прямая называется *прямой Эйлера* треугольника ABC . **QED.**

7.170. Доказать, что для любого четырехугольника со сторонами a_1, a_2, a_3, a_4 имеет место соотношение

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > \frac{1}{3} a_4^2.$$

Решение.

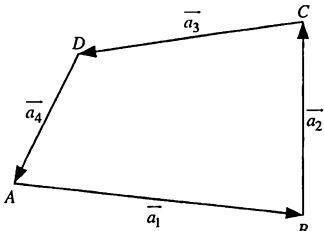


Рис. 7.104

Пусть $\overline{AB} = \overline{a_1}$, $\overline{BC} = \overline{a_2}$, $\overline{CD} = \overline{a_3}$, $\overline{DA} = \overline{a_4}$ (рис. 7.104), где $AB = a_1$, $BC = a_2$, $CD = a_3$, $DA = a_4$. По правилу сложения векторов имеем $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} = -\overline{a_4}$.

Тогда $\overline{a_4}^2 = (\overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3})^2 = \overline{a_1}^2 + \overline{a_2}^2 + \overline{a_3}^2 + 2(\overline{a_1 a_2} + \overline{a_1 a_3} + \overline{a_2 a_3})$, откуда $3(\overline{a_1}^2 + \overline{a_2}^2 + \overline{a_3}^2) = \overline{a_4}^2 + (\overline{a_1} - \overline{a_2})^2 + (\overline{a_1} - \overline{a_3})^2 + (\overline{a_2} - \overline{a_3})^2$.

Но $(\overline{a_1} - \overline{a_2})^2 > 0$, $(\overline{a_1} - \overline{a_3})^2 > 0$, $(\overline{a_2} - \overline{a_3})^2 > 0$,

поэтому $3(\overline{a_1}^2 + \overline{a_2}^2 + \overline{a_3}^2) > \overline{a_4}^2$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > \frac{1}{3} a_4^2$. **QED.**

7.171. Дана окружность и точки A, B , принадлежащие ей. Найти множество таких точек X в плоскости окружности, для которых выполняется равенство $\frac{\overline{AX}}{\overline{XY}} + \frac{\overline{BX}}{\overline{XZ}} = -2$, где Y и Z — вторые точки пересечения прямых AX и BX с окружностью.

Решение.

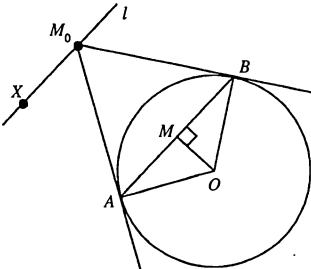


Рис. 7.105

Из условия следует, что $\frac{\overline{XA}^2}{\overline{XY} \overline{XA}} + \frac{\overline{XB}^2}{\overline{XZ} \overline{XB}} = 2$. Но, как известно,

$\overline{XY} \overline{XA} = \overline{XZ} \overline{XB} = \overline{XO}^2 - R^2$, где O — центр окружности, R — ее радиус, поэтому $\overline{XA}^2 + \overline{XB}^2 = 2\overline{XO}^2 - 2R^2$ или $(\overline{OA} - \overline{OX})^2 + (\overline{OB} - \overline{OX})^2 = 2\overline{XO}^2 - 2R^2$.

Далее, $\overline{OX}(\overline{OA} + \overline{OB}) = 2R^2$ или $\overline{OX} \overline{OM} = R^2$, (1) где M — середина AB . Пусть M_0 — точка пересечения касательных, проведенных в точках A и B (рис. 7.105), тогда $\overline{OM} \overline{OM_0} = R^2$. Учитывая (1), имеем $\overline{OX} \overline{OM} - \overline{OM} \overline{OM_0} = 0$. Отсюда $\overline{OM} M_0 X = 0$. Это значит, что искомое множество точек есть прямая l , проходящая через M_0 , перпендикулярная к OM .

7.172. Две окружности касаются в точке M . Прямая, проходящая через точку M , пересекает окружности соответственно в точках A и B . Найти множество всех точек X таких, что $\overline{XA} : \overline{XB} = k$, где k — данное, отличное от нуля, число.

Решение.

Пусть $k \neq 1$. Исходя из условия задачи, можно записать (рис. 7.106):

$$\frac{\overline{XM} + \overline{MA}}{\overline{XM} + \overline{MB}} = k \Rightarrow (1-k)\overline{XM} = k\overline{MB} - \overline{MA} \text{ или } (1-k)\overline{XM} = \overline{MA} \left(k \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} - 1 \right). \quad (1)$$

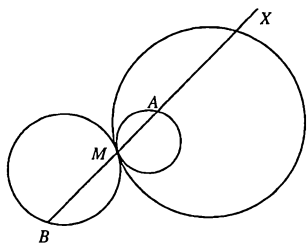


Рис. 7.106

Но $\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = \pm \frac{R}{r}$, где R, r — радиусы данных окружностей; знак в правой части зависит от того, является касание внутренним или внешним. Следовательно,

$$(k-1) \frac{\overline{MX}}{\overline{MA}} = -1 \pm k \frac{R}{r} \quad \text{или} \quad \frac{\overline{MX}}{\overline{MA}} = \frac{-1 \pm k \frac{R}{r}}{k-1}, \quad k \neq 1. \quad (2)$$

Из (2) следует, что если точка A описывает окружность радиусом r , то точка X описывает окружность, гомотетичную первой с центром гомотетии M и коэффи-

$$\text{циентом гомотетии } \rho = \frac{-1 \pm k \frac{R}{r}}{k-1}.$$

Если $k = 1$, то $A = B$. В этом случае множество точек X есть касательная к данным окружностям в точке M .

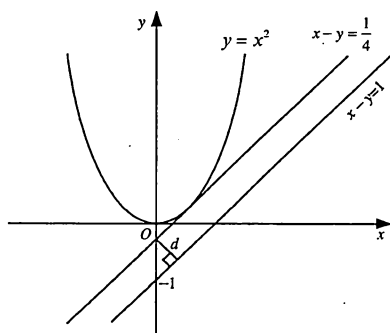


Рис. 7.107

7.173. Найти расстояние от прямой $x - y = 1$ до параболы $y = x^2$.
Решение.

Касательная к параболы, параллельная данной прямой, имеет уравнение $x - y = m$. Для нахождения m потребуется, чтобы система уравнений

$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x - m \end{cases}$ имела два одинаковых решения. Тогда дискриминант уравнения $x^2 - x + m = 0$ равен нулю, т.е. $m = \frac{1}{4}$.

Остается вычислить расстояние между параллельными прямыми $y = x - 1$ и $y = x - \frac{1}{4}$ (рис. 7.107). Длина отрезка оси Oy , заключенного между этими параллельными, равна $\frac{3}{4}$, а расстояние d между ними равно $\frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$, т.е. $d = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

7.174. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярные. Вычислить площадь этого четырехугольника, если $AB = 12$ см, $BC = 17$ см, $CD = 4$ см, $DA = 5$ см.

Решение.

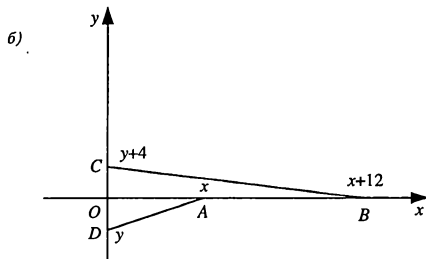
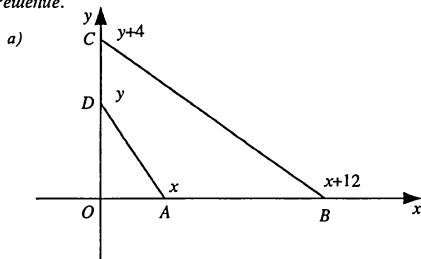


Рис. 7.108

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат xOy точка A имеет координаты $(x; 0)$, точка $D — (0; y)$. Тогда координаты точек B и C будут соответственно $(x + 12; 0)$ и $(0; y + 4)$. Используя формулу расстояния между точками

через их координаты и условия $BC = 17$ см, $DA = 5$ см, получим систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x+12)^2 + (y+4)^2 = 289, \end{cases} \quad \text{откуда}$$
 либо $x = 3, y = 4$, либо $x = 4,8, y = 1,4$.

В первом случае $S = S_1 - S_2$, где S_1 и S_2 соответственно площади треугольников OBC и OAD (рис. 7.108, а); во втором случае $S = S_1 + S_2$ (рис. 7.108, б). Вычислив S_1 и S_2 в первом и во втором случаях, получим либо $S = 54$ см², либо $S = 25,2$ см².

Ответ: 54 см² или 25,2 см².

7.175. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CC_1 . Точки M и N — середины отрезков соответственно C_1B и C_1C . Доказать, что $AN \perp CM$.

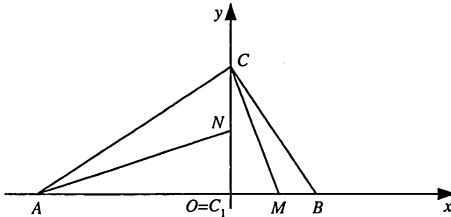


Рис. 7.109

Решение.

Выберем систему координат так, как показано на рис. 7.109. Тогда

$C(0; c), A(a; 0), B(b; 0), N(0; \frac{1}{2}c), M(\frac{1}{2}b; 0)$ (или $M(\frac{1}{2}a; 0)$),

где $c^2 = |a|b = a \cdot b$. Тогда $\overrightarrow{AN}(-a; \frac{1}{2}c), \overrightarrow{CM}(\frac{1}{2}b; -c)$. Вычис-

лим $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CM} = -\frac{ab}{2} - \frac{c^2}{2} = -\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = 0$. Значит, $AN \perp CM$.

QED.

7.176. На стороне AB треугольника ABC дана точка M . Доказать, пользуясь векторами, равенство $c^2 \cdot CM^2 = a^2 \cdot AM^2 + b^2 \cdot BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2) \cdot AM \cdot BM$.

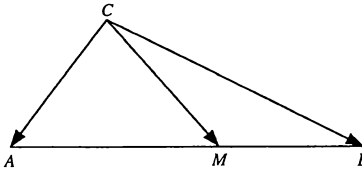


Рис. 7.110

Решение.

Пусть $BC = a, AC = b, AB = c$. Тогда, если $k = \frac{AM}{MB}$, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = k(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}) \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}}{1+k}$ (рис. 7.110). После под-

становки значения k получим $\overrightarrow{CM} = \frac{BM \overrightarrow{CA} + AM \overrightarrow{CB}}{AM + BM}$ или $c\overrightarrow{CM} =$

$= BM \overrightarrow{CA} + AM \overrightarrow{CB}$. Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$c^2 \cdot CM^2 = b^2 \cdot BM^2 + a^2 \cdot AM^2 + 2 \cdot AM \cdot BM \cdot (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})$. Так как $2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2 + b^2 - c^2$, то $c^2 \cdot CM^2 = a^2 \cdot AM^2 +$

$c^2 \cdot CM^2 = a^2 \cdot AM^2 + b^2 \cdot BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2) \cdot AM \cdot BM$.

QED.

7.177. Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках A и B . Прямая, проведенная через A , пересекает первую параболу в точке M_1 , а вторую — в точке M_2 ; прямая, проведенная через B , пересекает первую параболу в точке N_1 , а вторую — в точке N_2 . Доказать, что прямые M_1N_1 и M_2N_2 параллельны.

Решение.

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат xOy (рис. 7.111). Пусть $y = x^2$ и $y = ax^2 + bx + c$ уравнения

данных парабол ($a \neq 1$). Из системы уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ находим зависимость между координатами $(x_i; y_i)$ и

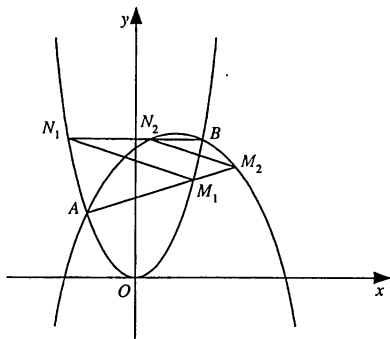


Рис. 7.111

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ y - y_2 = k_2(x - x_2) \end{cases} &\Rightarrow x_{N_2} + x_2 = \frac{k_2 - b}{a}, \quad y_{N_2} = ax_{N_2}^2 + bx_{N_2} + c. \text{ Сравним угловые коэффициенты прямых } M_1N_1 \text{ и } M_2N_2: \\ k_{M_1N_1} &= \frac{y_{M_1} - y_{N_1}}{x_{M_1} - x_{N_1}} = k_1 - x_1 + k_2 - x_2 = k_1 + k_2 - \frac{b}{1-a}; \\ k_{M_2N_2} &= \frac{y_{M_2} - y_{N_2}}{x_{M_2} - x_{N_2}} = a(x_{M_2} + x_{N_2}) + b = a\left(\frac{k_1 - b}{a} - x_1 + \frac{k_2 - b}{a} - x_2\right) + b = k_1 + k_2 - a(x_1 + x_2) - b = k_1 + k_2 - \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

Имеем $k_{M_1N_1} = k_{M_2N_2}$, следовательно, прямые M_1N_1 и M_2N_2 параллельные.

QED.

7.178. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого, пересекаясь в точке P , взаимно перпендикулярны. Доказать, что середины сторон AB и CD , центр O и точка P являются вершинами параллелограмма.

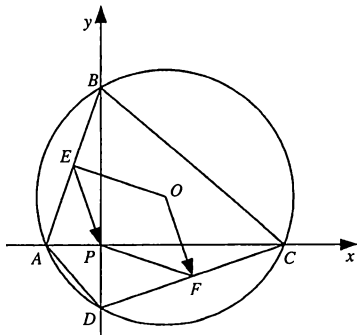


Рис. 7.112

Решение.

Выберем прямоугольную систему координат xPy таким образом, как показано на рис. 7.112. Тогда: $A(-x_1; 0)$, $B(0; y_1)$, $C(x_2; 0)$, $D(0; -y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$, $O(a; b)$ и уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$,

где R радиус. Находим координаты точек E и F : $E\left(-\frac{x_1}{2}; \frac{y_1}{2}\right)$, $F\left(\frac{x_2}{2}; -\frac{y_2}{2}\right)$. Четырехугольник $EOFP$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{OF}$, где $\overrightarrow{EP}\left(\frac{x_1}{2}; -\frac{y_1}{2}\right)$, $\overrightarrow{OF}\left(\frac{x_2}{2} - a; -\frac{y_2}{2} - b\right)$. Таким образом, $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{OF}$, если $\begin{cases} x_1 = x_2 - 2a, \\ y_1 = y_2 + 2b. \end{cases}$ Подставляя координаты точек A, B, C и D в уравнение окружности, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 + a)^2 + b^2 = R^2, \\ (x_2 - a)^2 + b^2 = R^2, \\ a^2 + (y_1 - b)^2 = R^2, \\ a^2 + (y_2 + b)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 + a)^2 - (x_2 - a)^2 = 0, \\ (y_1 - b)^2 + (y_2 + b)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)(x_1 - x_2 + 2a) = 0, \\ (y_1 + y_2)(y_1 - y_2 - 2b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2a, \\ y_1 = y_2 + 2b. \end{cases}$$

QED.

7.179. В равнобедренном треугольнике ABC площадью S проведены высоты AM и BN . Найти скалярное произведение $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$ при условии, что точки M и N лежат на боковых сторонах треугольника, а длина его основания равна c .

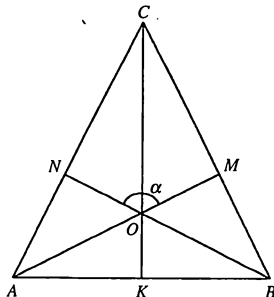


Рис. 7.113

Решение.

Пусть $\alpha = \angle MON$, где O — точка пересечения высот AM и BN $\triangle ABC$ (рис. 7.113); тогда

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = |\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{BN}| \cos \alpha. \quad (1)$$

Так как $\angle MON + \angle ACB = 180^\circ$, то $\alpha = 180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B = 2\angle B$ и, значит, $\cos \alpha = \cos 2B = 2\cos^2 B - 1$. (2)

По условию $S = \frac{1}{2} AB \cdot CK \Rightarrow CK = \frac{2S}{c}$. Из $\triangle CKB$ находим

$$BC = \sqrt{KB^2 + CK^2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{4S^2}{c^2}} = \frac{1}{2c} \sqrt{c^4 + 16S^2}. \quad (3)$$

Тогда

$$\cos B = \frac{KB}{BC} = \frac{c \cdot 2c}{2\sqrt{c^4 + 16S^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^4 + 16S^2}}. \quad (4)$$

Выражение (4) подставим в (2):

$$\cos \alpha = \frac{2c^4}{c^4 + 16S^2} - 1 = \frac{c^4 - 16S^2}{c^4 + 16S^2}. \quad (5)$$

Используя соотношение (3) и равенство $S = \frac{1}{2} BC \cdot AM$, найдем

$$AM = \frac{2S}{BC} = \frac{4cS}{\sqrt{c^4 + 16S^2}}. \quad (6)$$

Учитывая, что $AM = BN$, подставим выражения (6) и (5) в (1): $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\frac{4cS}{\sqrt{c^4 + 16S^2}} \right)^2 \frac{c^4 - 16S^2}{c^4 + 16S^2} = \frac{16c^2 S^2 (c^4 - 16S^2)}{(c^4 + 16S^2)^2}$.

Ответ: $\frac{16c^2 S^2 (c^4 - 16S^2)}{(c^4 + 16S^2)^2}$.

ТЕМА: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

7.180. Вершины треугольника находятся в точках $A(-1; 2; -1)$, $B(-3; 1; 1)$, $C(0; 4; -3)$. Найти длину медианы AM .

Решение.

Найдем координаты точки $M(x; y; z)$ как середины отрезка BC по формулам 7.12: $x = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$,

$z = \frac{-1-3}{2} = -2$, откуда $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -2\right)$. Длину медианы AM найдем по формуле 7.9:

$$AM = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + (-1 + 1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.181. Вычислить длину диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, если $A(1; -3; 0)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(-3; 1; 1)$.

Решение.

По формуле 7.9 найдем длину диагонали AC : $AC = \sqrt{(-3-1)^2 + (1+3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{33}$. Пусть O — середина диагонали AC , тогда координаты точки O найдем по формулам 7.12: $O\left(\frac{-3+1}{2}; \frac{1-3}{2}; \frac{1+0}{2}\right) \Rightarrow O\left(-1; -1; \frac{1}{2}\right)$. Следовательно, длина диагонали $BD = 2BO = 2\sqrt{1+25+0,25} = \sqrt{105}$.

Ответ: $\sqrt{33}$; $\sqrt{105}$.

7.182. Вершины треугольника находятся в точках $A(-1; 2; -1)$, $B(-3; 1; 1)$, $C(0; 4; -3)$. Найти его площадь.

Решение.

Длины сторон $\triangle ABC$ найдем по формуле 7.9: $AB = \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (1 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = 3$, $AC = 3$, $BC = \sqrt{34}$. По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle A$, т.е. $34 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos \angle A \Rightarrow \cos \angle A = -\frac{8}{9}$. По формуле $\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A}$ найдем $\sin \angle A = \frac{\sqrt{17}}{9}$ (при нахождении синуса перед корнем взят знак «+», так как при $0^\circ < \angle A < 180^\circ$ синус положителен). Тогда площадь треугольника $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle A = \frac{\sqrt{12}}{2}$ (кв. ед.).

Ответ: $\frac{\sqrt{12}}{2}$ (кв. ед.).

7.183. Составить уравнение сферы, проходящей через точку $A(1; -1; 4)$ и касающейся координатных плоскостей.

Решение.

Искомое уравнение сферы с центром $C(x_1; y_1; z_1)$ и радиусом R записывается в виде $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$. (1)

Так как сфера касается координатных плоскостей, то

$$|x_1| = |y_1| = |z_1| = R. \quad (2)$$

Из этого условия получаем $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 3R^2$. (3) Координаты точки A удовлетворяют условию (1), т.е. $(1 - x_1)^2 + (-1 - y_1)^2 + (4 - z_1)^2 = R^2 \Rightarrow 1 - 2x_1 + x_1^2 + 1 + 2y_1 + y_1^2 + 16 - 8z_1 + z_1^2 = R^2$. (4) Используя условие (3), равенство (4) принимает вид $9 - x_1 + y_1 - 4z_1 + R^2 = 0$. (5) Так как у точки A $x = 1 > 0$, $y = -1 < 0$, $z = 4 > 0$, то центр искомой сферы расположен в IV октанте, где $x_1 = -y_1 = z_1 = R$. Поэтому уравнение (5) примет вид $9 - R - R - 4R + R^2 = 0 \Rightarrow R_1 = R_2 = 3$, т.е. $C(3; -3; 3)$, а искомое уравнение сферы имеет вид $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

Ответ: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

7.184. Найти координаты точки M , лежащей на оси Ox , если известно, что расстояние от точки M до начала координат вдвое меньше расстояния от точки M до точки $N(3; -2; 1)$.

Решение.

Так как M лежит на оси Ox , то она имеет координаты $M(x; 0; 0)$. По условию $MO = \frac{1}{2} MN$, откуда

$$2\sqrt{(0-x)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (-2-0)^2 + (1-0)^2} \Rightarrow 2\sqrt{x^2} = \sqrt{(3-x)^2 + 5} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x^2 = 9 - 6x + x^2 + 5 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{51}}{3}.$$

Ответ: $\left(\frac{-3 \pm \sqrt{51}}{3}; 0; 0 \right)$.

7.185. Доказать, что существует единственная точка $C(x; y; z)$, сумма квадратов расстояний от которой до двух точек $A(2; 3; -1)$ и $B(1; -1; 3)$ постоянна и равна 16,5. Найти координаты точки C .

Решение.

По условию $AC^2 + BC^2 = 16,5 \Rightarrow (2-x)^2 + (3-y)^2 + (-1-z)^2 + (1-x)^2 + (-1-y)^2 + (3-z)^2 = 16,5 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y - 2z + 4,25 = 0$. Преобразуем полученное равенство:

$$(x^2 - 2 \cdot 1,5x + 2,25) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) + 4,25 - 2,25 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1,5)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0.$$

Так как в левой части последнего равенства стоит сумма неотрицательных чисел, то эта сумма равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, т.е. $(x - 1,5)^2 = 0$, $(y - 1)^2 = 0$, $(z - 1)^2 = 0$, откуда $x = 1,5$, $y = 1$, $z = 1$, т.е. $C(1,5; 1; 1)$.

Ответ: $C(1,5; 1; 1)$.

7.186. Доказать, что треугольник с вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$ равнобедренный, и найти его площадь.

Решение.

По формуле 7.9 найдем длины сторон $\triangle ABC$: $AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49}$, $BC = \sqrt{4^2 + 5^2 + 9^2} = \sqrt{122}$, $AC = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49}$. Так как $AB = AC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный.

По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \angle A$, т.е. $122 = 49 + 49 - 2\sqrt{49}\sqrt{49} \cos \angle A \Rightarrow \cos \angle A = -\frac{12}{49}$.

$$\text{Тогда } \sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{12^2}{49^2}} = \frac{\sqrt{49^2 - 12^2}}{49} = \frac{\sqrt{2257}}{49}.$$

$$\text{Следовательно, площадь треугольника } S = \frac{1}{2} \sqrt{49} \sqrt{49} \cdot \frac{\sqrt{2257}}{49} = \frac{1}{2} \sqrt{2257} \quad (\text{кв. ед.}).$$

Ответ: $\frac{1}{2} \sqrt{2257}$ (кв. ед.).

7.187. Даны точки $A_1(1; 2; 3)$, $A_2(4; 5; 6)$, $A_3(7; 8; 9)$, $A_4(10; 11; 12)$; M_1 и M_2 — середины A_1A_3 и A_2A_4 . Найти вектор $\overline{M_1M_2}$ и его модуль.

Решение.

По формуле 7.12 находим координаты точек M_1 и M_2 : $M_1\left(\frac{1+7}{2}; \frac{2+8}{2}; \frac{3+9}{2}\right) \Rightarrow M_1(4; 5; 6)$; $M_2\left(\frac{4+10}{2}; \frac{5+11}{2}; \frac{6+12}{2}\right) \Rightarrow M_2(7; 8; 9)$. Тогда вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты $\overline{M_1M_2} = (7-4; 8-5; 9-6) \Rightarrow \overline{M_1M_2} = (3; 3; 3)$. Далее, по формуле

$$7.9 \text{ получаем: } |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $\overline{M_1M_2}(3; 3; 3)$; $|\overline{M_1M_2}| = 3\sqrt{3}$.

7.188. Доказать, что плоскость, проходящая через концы трех ребер куба, имеющих общую точку, перпендикулярна к диагонали куба, выходящей из этой точки.

Решение.

Расположим систему координат так, как показано на рис. 7.114, тогда $A(0; 0; 0)$, $C(a; a; a)$, $A(0; 0; a)$. Составим уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору \overline{AC} и проходящей через точку A , по формуле 7.29. Поскольку $\overline{AC}(a; a; a)$, то

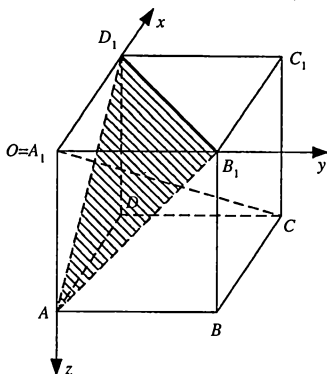


Рис. 7.114

$(x-0)a + (y-0)a + (z-a)a = 0 \Rightarrow ax + ay + az - a^2 = 0$. Очевидно, что координаты точек D_1, B_1 удовлетворяют этому уравнению. QED.

7.189. Доказать, что треугольник с вершинами $A(6; -4; 2), B(3; 2; 3), C(3; -5; 1)$ прямоугольный.

Решение.

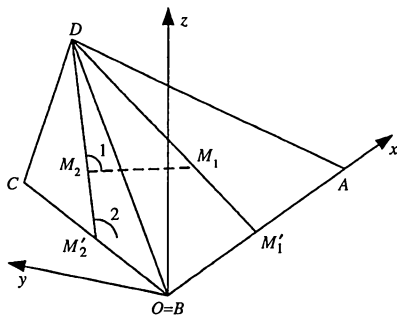


Рис. 7.115

Вычислим длины сторон $\triangle ABC$: $AB = \sqrt{9+36+1} = \sqrt{46}$, $BC = \sqrt{0+49+16} = \sqrt{65}$, $AC = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$. Так как $AC^2 + AB^2 = BC^2$, то $\triangle ABC$ — прямоугольный и $\angle A = 90^\circ$. QED.

7.190. Точки M_1 и M_2 являются соответственно точками пересечения медиан граней ABD и BCD тетраэдра $ABCD$. Доказать, что $M_1M_2 \parallel AC$. (Использовать векторный метод.)

Решение.

Поскольку M_1 и M_2 — точки пересечения медиан $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ (рис. 7.115), то $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, где O — произвольная точка пространства (см. 7.014). Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и \overrightarrow{AC} — сонаправленные, а значит, $M_1M_2 \parallel AC$. QED.

7.191. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина каждого ребра равна a . Точка $N \in SC$ и $SN:NC = 2:1$. Найти косинус угла между векторами \overrightarrow{DC} и \overrightarrow{AN} .

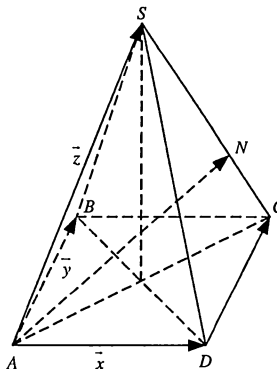


Рис. 7.116

Решение.

Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{z}$ и $\angle(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AN}) = \varphi$ (рис. 7.114). Косинус угла φ будем искать по формуле $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{DC} \overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{DC}| |\overrightarrow{AN}|}$. (1)

Разложим векторы \overrightarrow{DC} и \overrightarrow{AN} по векторам \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} . Имеем: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{y}$,
 $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \vec{x} + \vec{y} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CS}$, по $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AC} = \vec{z} - (\vec{x} + \vec{y})$, значит,

$$\overrightarrow{AN} = \vec{x} + \vec{y} + \frac{1}{3} \vec{z} - \frac{1}{3} \vec{x} - \frac{1}{3} \vec{y} = \frac{2}{3} \vec{x} + \frac{2}{3} \vec{y} + \frac{1}{3} \vec{z}. \quad \text{Тогда} \quad \overrightarrow{DC} \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3} \vec{y} (2\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}) =$$

$$= \frac{1}{3} (2\vec{x}\vec{y} + 2\vec{y}^2 + \vec{z}\vec{y}). \quad \text{Но } \vec{x}\vec{y} = 0 \text{ (так как } \vec{x} \perp \vec{y}), \vec{y}^2 = a^2, \vec{z}\vec{y} = a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}, \text{ по-}$$

этому $\overrightarrow{DC} \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3} \left(2a^2 + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{5}{6} a^2$. Далее, находим $|\overrightarrow{DC}| = a$, $|\overrightarrow{AN}| =$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} a^2 + \frac{4}{9} a^2 + \frac{1}{9} a^2 + \frac{8}{9} \vec{x}\vec{y} + \frac{4}{9} \vec{x}\vec{z} + \frac{4}{9} \vec{y}\vec{z}} = \sqrt{a^2 + \frac{8}{9} a^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

получаем $\cos \varphi = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

7.192. Точки M_1 и M_2 являются соответственно точками пересечения медиан граней ABD и BCD тетраэдра $ABCD$. Доказать, что $M_1 M_2 \parallel AC$. (Использовать координатный метод.)

Решение.

Мы имеем $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ (см. 7.014). Расположим систему координат так, как показано на рис. 7.117. Очевидно, $A(x_1; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(x_2; y_2; 0)$, $D(x_3; y_3; z_3)$. Так как $O = B$, то $\overrightarrow{OC} = (x_2; y_2; 0)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1; 0; 0)$,

$$\overrightarrow{OB} = (0; 0; 0), \quad \overrightarrow{OD} = (x_3; y_3; z_3), \quad \overrightarrow{OM_1} = \left(\frac{1}{3} (x_1 + x_3); \frac{1}{3} y_3; \frac{1}{3} z_3 \right), \quad \overrightarrow{OM_2} = \left(\frac{1}{3} (x_2 + x_3); \frac{1}{3} (y_2 + y_3); \frac{1}{3} z_3 \right).$$

Найдем $\overrightarrow{AC} = (x_2 - x_1; y_2; 0)$, $\overrightarrow{M_1 M_2} = \left(\frac{1}{3} (x_2 - x_1); \frac{1}{3} y_2; 0 \right)$. Отсюда вытекает, что векторы \overrightarrow{AC} и $\overrightarrow{M_1 M_2}$ сонаправленные; следовательно, $M_1 M_2 \parallel AC$. QED.

7.193. Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (вершины основания $ABCD$ расположены по ходу часовой стрелки); E — середина ребра AA_1 ; F — середина ребра AD ; M — центр грани $CC_1 D_1 D$. Найти скалярное произведение векторов \overrightarrow{EM} и $\overrightarrow{B_1 F}$.

Решение.

Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$ (см. рис. 7.117). Разложим векторы $\overrightarrow{B_1 F}$ и \overrightarrow{EM} по векторам \vec{m} , \vec{n} , \vec{p} .

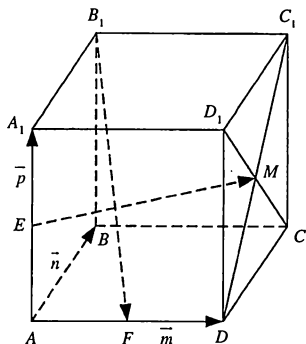


Рис. 7.117

Имеем

$$\overline{B_1F} = \overline{B_1A_1} + \overline{A_1A} + \overline{AF} = -\vec{n} - \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{m}, \quad \overline{EM} = \overline{EA_1} + \overline{A_1D_1} + \overline{D_1M} = \overline{EA_1} + \overline{A_1D_1} + \frac{1}{2}\overline{D_1C} =$$

$$= \overline{EA_1} + \overline{A_1D_1} + \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{AA_1}) = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{m} + \frac{1}{2}(\vec{n} - \vec{p}) = \vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}.$$

$$\text{Следовательно, } \overline{B_1FEM} = \left(\frac{1}{2}\vec{m} - \vec{n} - \vec{p}\right) \left(\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}\right) = \frac{1}{2}(\vec{m}^2 + \vec{n}^2) = 0, \text{ поскольку } \vec{p} \perp \vec{m}, \quad \vec{p} \perp \vec{n}, \quad |\vec{m}| = |\vec{n}|.$$

Ответ: 0.

7.194. Основанием параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит квадрат со стороной a , боковое ребро параллелепипеда AA_1 , равное b , образует с пересекающимися его сторонами основания острые углы, равные φ . Найти площадь диагонального сечения $AA_1 C_1 C$. (Применить векторный метод.)

Решение.

Сечение $AA_1 C_1 C$ параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 7.118)

является параллелограммом, причем $AC = a\sqrt{2}$, $AA_1 = b$. Найдем $\angle A_1 AC$. Пусть $\overline{AB} = \vec{m}$, $\overline{AD} = \vec{n}$, $\overline{AA_1} = \vec{p}$. По определению ска-

лярного произведения векторов $\cos \angle A_1 AC = \frac{\overline{AA_1} \overline{AC}}{|\overline{AA_1}| |\overline{AC}|}$, по

$$\overline{AA_1} \overline{AC} = \vec{p}(\vec{m} + \vec{n}) = \vec{p}\vec{m} + \vec{p}\vec{n} = 2ab \cos \varphi, \text{ поэтому } \cos \angle A_1 AC =$$

$$= \frac{2ab \cos \varphi}{ab\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos \varphi.$$

$$\text{Следовательно, } S_{AA_1 C_1 C} = \sqrt{2}ab\sqrt{1 - \cos^2 \angle A_1 AC} = ab\sqrt{-2 \cos 2\varphi}.$$

$$\text{Ответ: } ab\sqrt{-2 \cos 2\varphi}.$$

7.195. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AA_1 = 10$, $AD = 6$, $AB = 8$. Найти угол между векторами $\overline{DB_1}$ и $\overline{AD_1}$.

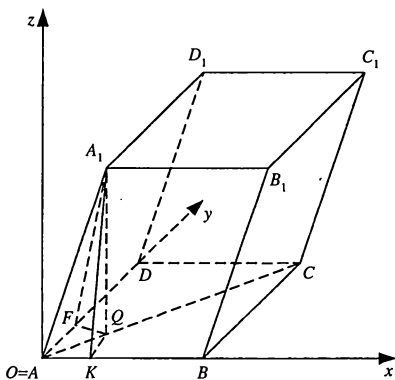


Рис. 7.118

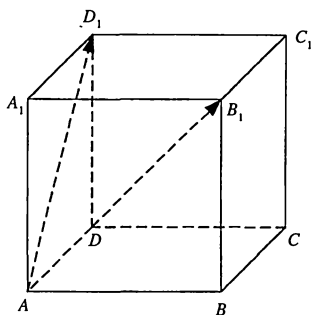


Рис. 7.119

Решение.

Пусть $\overline{AA_1} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AD} = \vec{c}$, $\angle(\overline{DB_1}, \overline{AD_1}) = \varphi$ (рис. 7.119). Разложим векторы $\overline{DB_1}$ и $\overline{AD_1}$ по векторам \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Имеем $\overline{DB_1} = \overline{DA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1B_1} = -\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$, $\overline{AD_1} = \overline{AA_1} + \overline{A_1D_1} = \vec{a} + \vec{c}$. По определению скалярного произведения векторов $\cos \varphi = \frac{|\overline{DB_1} \cdot \overline{AD_1}|}{|\overline{DB_1}| |\overline{AD_1}|}$.

$$\text{Таким образом, } \cos \varphi = \frac{(-\vec{c} + \vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{c})}{\sqrt{(-\vec{c} + \vec{a} + \vec{b})^2} \sqrt{(\vec{a} + \vec{c})^2}} = \frac{\vec{a}^2 - \vec{c}^2}{\sqrt{\vec{c}^2 + \vec{a}^2 + \vec{b}^2} \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{c}^2}} =$$

$$= \frac{100 - 36}{10\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{34}} = \frac{8}{5\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{8}{5\sqrt{17}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{8}{5\sqrt{17}}$.

7.196. Основанием параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит квадрат со стороной a , боковое ребро параллелепипеда AA_1 , равное b , образует с пересекающимися его сторонами основания острые углы, равные φ . Найти площадь диагонального сечения $AA_1 C_1 C$. (Применить координатный метод.)

Решение.

Расположив систему координат так, как показано на рис. 7.119, получим $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; a; 0)$. Проведя $A_1 K \perp AB$ и $A_1 F \perp AD$, найдем координаты точки A_1 . Тогда $A_1(b \cos \varphi; b \cos \varphi; z)$, а $\cos \angle A_1 AC = \frac{|\overline{AC} \cdot \overline{AA_1}|}{|\overline{AC}| |\overline{AA_1}|} = \frac{2ab \cos \varphi}{ab \sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos \varphi$. По-

этому $S_{AA_1 C_1 C} = |\overline{AC}| \cdot |\overline{AA_1}| \sin \angle A_1 AC = ab \sqrt{2 \cos 2\varphi}$.

Ответ: $ab \sqrt{2 \cos 2\varphi}$.

7.197. Даны координаты вершин четырехугольника: $A(-1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(-1; 7; 3)$, $D(-1; 6; 5)$. Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.

Решение.

Находим координаты векторов \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} : $\overline{AB}(0; 1; -2)$, $\overline{BC}(0; 4; 2)$, $\overline{CD}(0; -1; 2)$, $\overline{DA}(0; -4; 2)$. Тогда $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 0$, $\overline{BC} \cdot \overline{CD} = 0$, $\overline{CD} \cdot \overline{DA} = 0$, $\overline{DA} \cdot \overline{AB} = 0$, откуда следует, что $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp DA$ и $DA \perp AB$, а это значит, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. QED.

7.198. Вычислить двугранный угол правильного тетраэдра. (Применить векторный метод.)

Решение.

Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром a (рис. 7.120). Изобразим линейный угол двугранного угла BC . Так как тетраэдр правильный, то AK и DK — высоты и медианы соответственно треугольников ABC и BDC , следовательно, $\angle AKD$ — линейный угол двугранного угла BC . Если DO — высота тетраэдра, то O — центр $\triangle ABC$. Пусть

$$\overline{CA} = \vec{m}, \quad \overline{CB} = \vec{n}, \quad \overline{CD} = \vec{p}, \quad \text{тогда } \overline{KA} = \vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}, \quad \overline{KD} = \overline{CD} - \overline{CK} = \vec{p} - \frac{1}{2}\vec{n}.$$

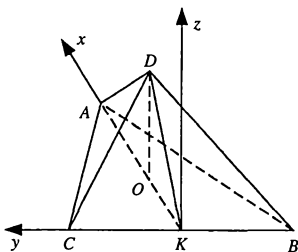


Рис. 7.120

Найдем:

$$\cos \angle AKD = \frac{\overline{KA} \overline{KD}}{|\overline{KA}| |\overline{KD}|} = \frac{\left(\overline{m} - \frac{1}{2} \overline{n} \right) \left(\overline{p} - \frac{1}{2} \overline{n} \right)}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{4 \left(\overline{m} \overline{p} - \frac{1}{2} \overline{m} \overline{n} - \frac{1}{2} \overline{n} \overline{p} + \frac{1}{4} \overline{n}^2 \right)}{3a^2} =$$

$$= \frac{4 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \right)}{3a^2} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда $\angle AKD = \arccos \frac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

7.199. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} , если $|\overline{OA}| = 5$, $|\overline{OB}| = 4$, $|\overline{OC}| = 3$, $\overline{OA} \overline{OB} = 0$, $\overline{OA} \overline{OC} = 0$, $\overline{OB} \overline{OC} = 8$.

Решение.

Из условия получаем, что $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ и $\overline{OA} \perp \overline{OC}$, т.е. $\overline{OA} \perp (OBC)$, следовательно, OA — высота данной пирамиды (рис. 7.121). Пусть $\angle BOC = \alpha$, тогда

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \sin \alpha. \text{ Из условия } \overline{OB} \overline{OC} = 8 \text{ получаем } |\overline{OB}| |\overline{OC}| \cos \alpha = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{8}{4 \cdot 3} = \frac{2}{3}. \text{ Поэтому } S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = 2\sqrt{5} \text{ (кв. ед.)}. \text{ Окончательно}$$

$$\text{получаем, что объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\Delta OBC} \cdot OA = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 = \frac{10\sqrt{5}}{3} \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ (куб.ед.).

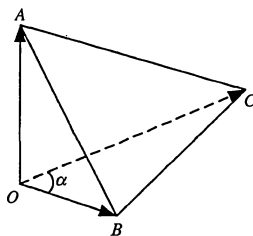


Рис. 7.121

7.200. Вычислить двугранный угол правильного тетраэдра. (Применить координатный метод.)

Решение.

Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром a (рис. 7.122). (Построение линейного угла двугранного угла BC дано в 7.198.) Расположим систему координат так, как показано на рис. 7.122. Тогда $K(0; 0; 0)$, $A(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$, $D(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; z)$,

$\overline{KD} = (\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; z)$ и $\overline{KA} = (\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$. Используя определение скалярного произведения векторов, вычислим

$$\cos \angle AKD = \frac{\overline{KD} \overline{KA}}{|\overline{KD}| |\overline{KA}|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + 0 + 0}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle AKD = \arccos \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

7.201. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найти угол между векторами $\overline{DA_1}$ и \overline{DM} , где M — середина ребра CC_1 .

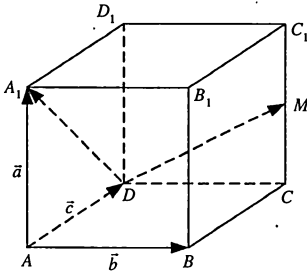


Рис. 7.122

Решение.

Пусть $\overline{AA_1} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AD} = \vec{c}$, $\angle(\overline{DA_1}, \overline{DM}) = \varphi$ (рис. 7.122). Тогда

$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$. Искомый угол φ будем искать по формуле

$\cos \varphi = \frac{\overline{DA_1} \cdot \overline{DM}}{|\overline{DA_1}| \cdot |\overline{DM}|}$ (1). Разложим векторы $\overline{DA_1}$ и \overline{DM} по векторам \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

Имеем $\overline{DA_1} = \vec{a} - \vec{c}$; $\overline{DM} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$. Тогда $\overline{DA_1} \cdot \overline{DM} = (\vec{a} - \vec{c})(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a}^2$;

$|\overline{DA_1}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{c} + \vec{c}^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{c}^2} = \sqrt{2\vec{a}^2}$; $|\overline{DM}| = \sqrt{(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a})^2} =$

$= \sqrt{\vec{b}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\vec{b}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{b}^2 + \frac{1}{4}\vec{a}^2} = \sqrt{\frac{5}{4}\vec{a}^2}$. Подставляя найденные выраже-

ния в (1), находим $\cos \varphi = \frac{\frac{1}{2}\vec{a}^2}{\sqrt{2\vec{a}^2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}\vec{a}^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, откуда $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$.

7.202. К вершине куба приложены три силы в 1 Н, 2 Н и 3 Н, направленные по диагоналям граней куба, проходящие через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

Решение.

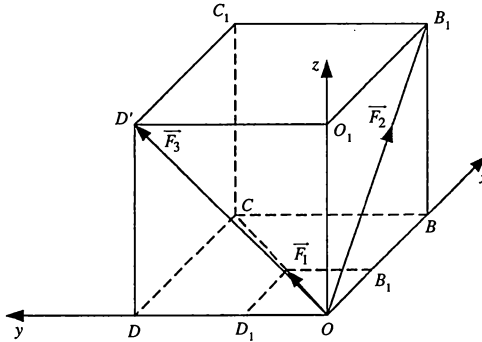


Рис. 7.123

Выберем систему координат так, как показано на рис. 7.123. \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 — данные силы, причем $|\vec{F}_1| = 1$ Н, $|\vec{F}_2| = 2$ Н; $|\vec{F}_3| = 3$ Н. Зная длину вектора \vec{F}_1 , найдем его координаты. Две первые координаты определяются из рассмотрения квадрата $OBCD$. По условию OC — биссектриса $\angle DOB$. Тогда $\angle COB = 45^\circ$ и $OB_1 = OD_1 = |\vec{F}_1| \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а третья координата равна нулю, так как вектор \vec{F}_1 лежит в плоскости xOy . Итак, $\vec{F}_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$. Аналогично находим, что

$\vec{F}_2(\sqrt{2}; 0; \sqrt{2})$ и $\vec{F}_3(0; \frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2})$. Равнодействующая \vec{R} этих сил равна их сумме: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Следовательно, $\vec{R}(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2})$. Тогда $|\vec{R}| = \sqrt{\frac{9}{2} + 8 + \frac{25}{2}} = 5 \text{ Н}$.

Ответ: 5 Н.

7.203. Даны координаты вершин пирамиды: $S(0; 0; 2)$, $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$. Найти координаты точки M , лежащей на оси Oz , и координаты точки N , лежащей в плоскости SBC , если известно, что $\vec{MN}(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)$.

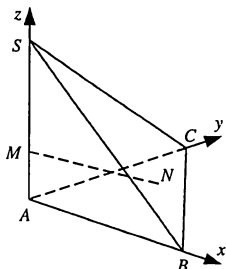


Рис. 7.124

Решение.

Вершина A совпадает с началом координат, а вершины B, C, S лежат на осях Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 7.124). Так как $M \in Oz$, то $M(0; 0; z_1)$. Пусть $(x_2; y_2; z_2)$ — координаты точки N . Тогда вектор \vec{MN} имеет координаты $(x_2; y_2; z_2 - z_1)$. Но по условию $\vec{MN}(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}; y_2 = \frac{1}{3}; z_2 - z_1 = 0 \Rightarrow z_2 = z_1$. Поэтому $N(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; z_1)$. Найдем значение координаты z_1 .

Общее уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$. Так как $B \in (SBC)$, то координаты точки B удовлетворяют уравнению плоскости: $a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow a = -d$. Аналогично, $C \in (SBC) \Rightarrow b + d = 0 \Rightarrow b = -d$; $S \in (SBC) \Rightarrow 2c + d = 0 \Rightarrow c = -\frac{d}{2}$. Тогда уравнение плоскости SBC примет вид: $-dx - dy - \frac{d}{2}z + d = 0 \Rightarrow x + y + \frac{1}{2}z - 1 = 0$. Но $N \in (SBC)$, поэтому для нахождения z_1 получаем уравнение $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}z_1 - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{2}{3}$.

Ответ: $M(0; 0; \frac{2}{3})$, $N(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.

7.204. Доказать, что две прямые в пространстве параллельны, если три точки одной прямой равноудалены от другой.

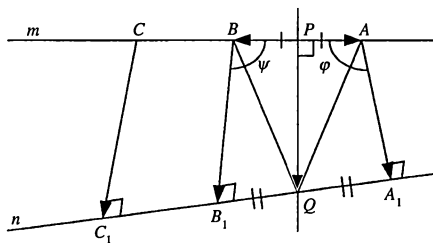


Рис. 7.125

Решение.

Если точки A, B, C с прямой m равноудалены от прямой n , то из теорем планиметрии следует, что прямые m и n не могут пересекаться. Остается доказать, что эти прямые не могут скрещиваться. Допустим, что m и n — скрещивающиеся прямые. Пусть A, B, C — проекции точек A, B, C на прямую n . Рассмотрим неплоский четырехугольник AA_1B_1B (рис. 7.125). Соединим отрезком середины P и Q сторон AB и A_1B_1 . Тогда $\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{AA_1} + \vec{BB_1})$.

Докажем вначале, что углы $\varphi = \angle BAA_1$ и $\psi = \angle ABB_1$ равны. В самом деле, $\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AA_1}}{|\vec{AB}| |\vec{AA_1}|}$, $\cos \psi = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BB_1}}{|\vec{BA}| |\vec{BB_1}|}$. Составим

разность этих косинусов: $\cos \varphi - \cos \psi = \frac{1}{|\vec{AB}| |\vec{AA_1}|} \cdot (\vec{AA_1} \cdot \vec{AB} + \vec{BB_1} \cdot \vec{AB}) = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}| |\vec{AA_1}|} \cdot (\vec{AA_1} + \vec{BB_1}) = \frac{2\vec{PQ} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}| |\vec{AA_1}|}$. Но $\triangle AA_1Q$ и

$\triangle BB_1Q$ равны, поэтому $AQ = BQ$, следовательно, $PQ \perp AB$, т.е. $\vec{PQ} \cdot \vec{AB} = 0$. Значит, $\cos \varphi - \cos \psi = 0$ и $\varphi = \psi$. Из равен-

ства этих углов следует $A_1P = B_1P$, ибо $\triangle A_1AP$ и $\triangle B_1BP$ конгруэнтны. Отсюда вытекает, что $PQ \perp A_1B_1$. Итак, PQ — общий перпендикуляр прямых m и n .

Аналогично доказывается существование еще одного общего перпендикуляра прямых m и n , если рассмотреть неплоский четырехугольник AA_1C_1C . Но две скрещивающиеся прямые имеют только один общий перпендикуляр, поэтому допущение, что m и n — скрещивающиеся прямые, следует отбросить. Остается $m \parallel n$. **QED.**

7.205. Медианы граней SAB и SAC тетраэдра $SABC$ пересекаются в точках G и H соответственно. Доказать, что $\overline{GH} \parallel \overline{BC}$, и найти отношение $\overline{GH} \parallel \overline{BC}$,

Решение.

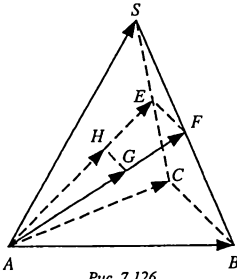


Рис. 7.126

Пусть AF и AE — медианы граней SAB и SAC , G и H — точки пересечения медиан указанных граней (рис. 7.126). Тогда $\overline{AF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AS})$, $\overline{AE} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{AS})$. Из свойства точки пересечения медиан треугольника имеем $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AF} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AS})$, $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AE} = \frac{1}{3}(\overline{AC} + \overline{AS})$. Значит, $\overline{GH} = \overline{AH} - \overline{AG} = \frac{1}{3}(\overline{AC} + \overline{AS} - \overline{AB} - \overline{AS}) = \frac{1}{3}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{3}\overline{BC}$.

Следовательно, $\overline{GH} = \frac{1}{3}\overline{BC} \Rightarrow \overline{GH} \parallel \overline{BC}$, $|\overline{GH}| : |\overline{BC}| = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

7.206. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ грань $ABCD$ — квадрат со стороной a ; ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы, равные α . Найти длину диагонали BD_1 и угол между прямыми BD_1 и AC .

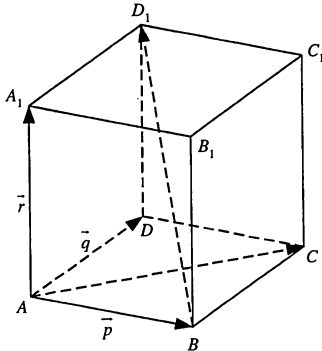


Рис. 7.127

Решение.

Найдем длину диагонали BD_1 . Разложим вектор $\overline{BD_1}$ по векторам $\overline{p} = \overline{AB}$, $\overline{q} = \overline{AD}$, $\overline{r} = \overline{AA_1}$ (рис. 7.127): $\overline{BD_1} = \overline{AD_1} - \overline{AB} = (\overline{r} + \overline{q}) - \overline{p} = \overline{r} + \overline{q} - \overline{p}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } BD_1^2 = \overline{BD_1}^2 &= (\overline{r} + \overline{q} - \overline{p})^2 = \overline{r}^2 + \overline{q}^2 + \overline{p}^2 + 2\overline{r}\overline{q} - 2\overline{r}\overline{p} - 2\overline{q}\overline{p} = \\ &= a^2 + a^2 + a^2 + 2a^2 \cos \alpha - 2a^2 \cos \alpha - 2a^2 \cos 90^\circ = 3a^2, \end{aligned}$$

откуда $BD_1 = a\sqrt{3}$.

Угол φ между прямыми BD_1 и AC найдем, пользуясь определением скалярного произведения векторов: $\cos \varphi = \frac{|\overline{BD_1} \overline{AC}|}{|\overline{BD_1}| |\overline{AC}|}$. Знак модуля в числителе поставлен потому, что $\varphi \leq 90^\circ$ (по определению угла между прямыми) и $\cos \varphi \geq 0$. Находим: $\overline{BD_1} \overline{AC} = (\overline{r} + \overline{q} - \overline{p})(\overline{p} + \overline{q}) = \overline{r}\overline{p} + \overline{q}\overline{p} - \overline{p}^2 + \overline{r}\overline{q} + \overline{q}^2 - \overline{p}\overline{q} = 2a^2 \cos \alpha$.

$$\text{Тогда } \cos \varphi = \frac{|2a^2 \cos \alpha|}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\cos \alpha|.$$

$$\text{Ответ: } a\sqrt{3}, \sqrt{\frac{2}{3}} |\cos \alpha|.$$

7.207. Даны вершины треугольника: $A(1; 1; 4)$, $B(1; 4; 4)$, $C(3; 3; 2)$. Доказать, что $\overline{OB} \perp \overline{AC}$, где O — середина стороны AC . Определить вид треугольника.

Решение.

Координаты точки O имеют вид $\left(\frac{1+3}{2}; \frac{1+4}{2}; \frac{4+2}{2}\right)$ или $(2; 2; 3)$. Тогда координаты векторов $\overline{OB}(-1; 2; 1)$, $\overline{AC}(2; 2; -2)$ и $\overline{OB} \cdot \overline{AC} = -2 + 4 - 2 = 0 \Rightarrow \overline{OB} \perp \overline{AC}$. Далее, имеем: $\overline{BA}(0; 3; 0) \Rightarrow |\overline{BA}| = 3$; $\overline{BC}(2; -1; -2) \Rightarrow |\overline{BC}| = 3$; $|\overline{AC}| = 2\sqrt{3}$. Так как $BA = BC \neq AC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный. Так как $\cos \angle(\overline{BA}, \overline{BC}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$, то угол при вершине B меньше 90° , т.е. $\triangle ABC$ — остроугольный.

Ответ: равнобедренный остроугольный.

7.208. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M(2; 1; 1)$, $N(1; 0; 1)$ и $P(0; 1; -3)$.

Решение.

Приведем схему традиционного решения такого рода задач.

а) Определяют координаты нормального вектора \vec{n} искомой плоскости, определяемой точками M, N и P , причем координаты нормального вектора являются произвольно выбранным ненулевым решением системы двух уравнений с тремя неизвестными.

б) Составляют скалярное произведение вектора \vec{n} с переменным вектором \overline{MQ} , принадлежащим искомой плоскости.

а) Найдем координаты вектора $\vec{n}(a; b; c)$, нормального (перпендикулярного) плоскости, определяемой точками M, N, P .

Для этого рассмотрим систему векторов \overline{MN} , \overline{MP} , \vec{n} . (Можно было бы выбрать систему векторов \overline{MP} , \overline{PN} , \vec{n} или \overline{NP} , \overline{NM} , \vec{n} .) Запишем эти векторы в координатной форме: $\overline{MN}(-1; -1; -2)$, $\overline{MP}(-2; 0; -4)$, $\vec{n}(a; b; c)$. Так как вектор \vec{n} является нормальным к искомой плоскости, то векторы \overline{MN} и \vec{n} , \overline{MP} и \vec{n} перпендикулярны, а следовательно, их скалярное произведение равно нулю. Отсюда имеем: $\begin{cases} \overline{MN} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overline{MP} \cdot \vec{n} = 0. \end{cases}$ (1) Запишем векторное соотношение (1) в координатной

форме: $\begin{cases} (-1)a + (-1)b + (-2)c = 0, \\ (-2)a + 0 \cdot b + (-4)c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 2c = 0, \\ a + 2c = 0. \end{cases}$ (2) Система (2) имеет бесчисленное множество решений. Так как нас

интересует только направление вектора \vec{n} (а его длина может быть произвольной, отличной от 0), то из множества решений системы (2) рассмотрим, например, решение, когда $a = 2$ ($a \neq 0$): $\begin{cases} b + 2c = -2, \\ 2c = -2 \end{cases} \Rightarrow c = -1, b = 0$. Следовательно, нормальный вектор искомой плоскости имеет координаты $\vec{n}(2; 0; -1)$.

б) Возьмем произвольную точку $Q(x; y; z)$, принадлежащую искомой плоскости, и рассмотрим скалярное произведение векторов $\overline{MQ}(x-2; y-1; z-1)$ и $\vec{n}(2; 0; -1)$. Получим $\overline{MQ} \cdot \vec{n} = 0$, или $(x-2) \cdot 2 + (y-1) \cdot 0 + (z-1) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow 2x - z - 3 = 0$. Это и есть искомое уравнение плоскости (проверьте!).

Ответ: $2x - z - 3 = 0$.

7.209. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $AB = a$, $DC = b$, $DD_1 = c$. Найти острый угол между прямыми BD_1 и $A_1 D$.

Решение.

Пусть ϕ — острый угол между прямыми BD_1 и $A_1 D$ (рис. 7.128). Он будет равен острому углу между векторами $\overline{BD_1}$ и

$\overline{A_1 D}$; поэтому искомый угол ϕ будем искать по формуле $\cos \phi = \frac{|\overline{BD_1} \cdot \overline{A_1 D}|}{|\overline{BD_1}| |\overline{A_1 D}|}$. (1)

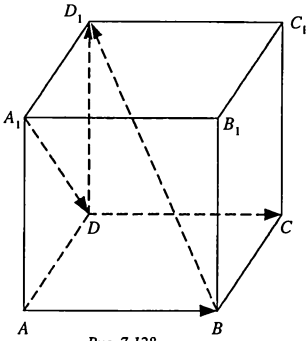


Рис. 7.128

Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{c}$, тогда $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{c} = 0$ и $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$. (2) Учитывая (2), разложим векторы $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$ по векторам \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Имеем $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = -\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1D} = -\vec{a} - \vec{c}$. Тогда $\overrightarrow{BD_1} \overrightarrow{A_1D} = (-\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})(-\vec{a} - \vec{c}) = a^2 - c^2$, $|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{(-\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $|\overrightarrow{A_1D}| = \sqrt{(-\vec{a} - \vec{c})^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$. Подставляя найденные выражения в (1), получим

$$\cos \varphi = \frac{|a^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{|a^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{|a^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

7.210. Тетраэдр задан координатами вершин $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; 2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Найти длину высоты, проведенной из вершины D .

Решение.

Выберем систему векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} , \vec{n} , где \vec{n} — нормальный вектор плоскости основания тетраэдра. Запишем векторы системы в координатной форме: $\overrightarrow{AB}(2; -2; 1)$, $\overrightarrow{AC}(4; 0; 6)$, $\overrightarrow{AD}(-7; -7; 7)$, $\vec{n}(a; b; c)$. Найдем координаты вектора \vec{n} (см. решение 7.208). Так как $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$, то $\begin{cases} \vec{n} \overrightarrow{AB} = 0, \\ \vec{n} \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} 2a - 2b + c = 0, \\ 2a + 3c = 0. \end{cases}$ Пусть $a = 3$, тогда $b = 2$, $c = -2$.

Отсюда $\vec{n}(3; 2; -2)$. Длина проекции вектора \overrightarrow{AD} на вектор \vec{n} и будет высотой h тетраэдра.

$$\text{Тогда } h = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{AD}| = \left| \frac{\vec{n} \overrightarrow{AD}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{-21 - 14 - 14}{\sqrt{17}} \right| = \frac{49}{\sqrt{17}}.$$

Ответ: $\frac{49}{\sqrt{17}}.$

7.211. Даны вершины треугольника: $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 1; 2)$. Найти угол между стороной CA и медианой, проведенной из вершины C .

Решение.

Пусть CM — медиана $\triangle ABC$, проведенная из вершины C ; $\angle MCA = \varphi$. Тогда $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{CA} \overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CM}|}$. (1) Точка M имеет координаты $\left(\frac{1+2}{2}; \frac{2+3}{2}; \frac{3+1}{2}\right)$ или $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 2\right)$. Найдем координаты векторов \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CM} : $\overrightarrow{CA}(-2; 1; -1)$, $\overrightarrow{CM}\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Тогда $\overrightarrow{CA} \overrightarrow{CM} = (-2) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \cdot \frac{3}{2} + (-1) \cdot 0 = \frac{9}{2}$; $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$; $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{18}{4}}$. Под-

ставим найденные выражения в (1): $\cos \varphi = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{18}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}.$

7.212. В пирамиде $DABC$ грань ACD — правильный треугольник со стороной $3\sqrt{2}$, грань ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник ($\angle ACB = 90^\circ$), ребро BD равно 3. Найти объем пирамиды.

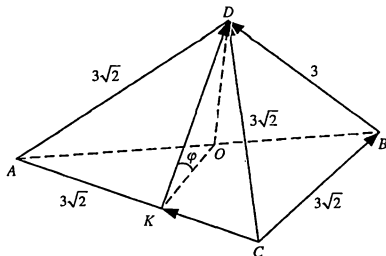


Рис. 7.129

Решение.

Построим линейный угол двугранного угла AC ($\angle DOK$, рис. 7.129) и обозначим его через φ . Очевидно, этот угол между векторами \overrightarrow{KD} и \overrightarrow{CB} равен линейному углу двугранного угла AC . Найдя этот угол, мы из прямоугольного $\triangle KOD$, в котором $KD = AD \cdot \sin \angle DAK$, т.е. $KD = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, вычислим DO — длину высоты тетраэдра.

Так как $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KD}$, то $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KD} - \overrightarrow{CB}$.

Тогда $BD^2 = \overrightarrow{CK}^2 + \overrightarrow{KD}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{KD} - 2\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{CB} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2})^2 + 0 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cos \varphi$, откуда $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$. Из $\triangle KOD$ находим высоту тетраэдра $DO = \frac{1}{2} KD = \frac{3\sqrt{6}}{4}$. Площадь основания $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} (3\sqrt{2})^2 = 9$. Наконец, объем пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{4} = \frac{9\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{6}}{4}$.

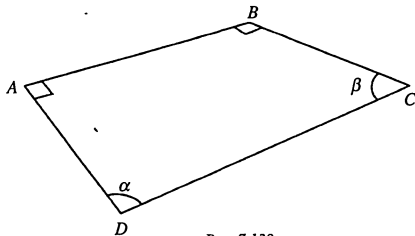


Рис. 7.130

7.213. Дана неплоская замкнутая линия $ABCD$. Доказать, что если $\angle ABC = \angle DAB = 90^\circ$ и $DA = CB$, то $\angle ADC = \angle BCD$.

Решение.

Пусть $\angle ADC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ (рис. 7.130).

Тогда $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DA}| |\overrightarrow{DC}|}$ (1) и $\cos \beta = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{CB}|}$. (2) Так как фигура $ABCD$ неплоская, то $\alpha \neq 90^\circ$ и $\beta \neq 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$ и $\cos \beta \neq 0$,

т.е. можно найти отношение выражений (1) и (2): $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} =$

$$= \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DA}| |\overrightarrow{DC}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{CB}|}{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}} \quad (3) \quad (\text{так как } |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DC}| \text{ и } |\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{CB}|).$$

Далее, находим $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = DA^2 + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = DA^2 + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{CB} = CB^2 + \overrightarrow{BACB} + \overrightarrow{ADCB} = CB^2 + \overrightarrow{ADCB}$ ($\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BACB} = 0$). Подставляя полученные выражения в (3), находим $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{DA^2 + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}}{CB^2 + \overrightarrow{ADCB}} = 1$ (так как $DA^2 = CB^2$ и $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ADCB}$). Следовательно, $\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (так как $0 < \alpha < 90^\circ$ и $0 < \beta < 90^\circ$).

QED.

7.214. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной, равной a . Боковое ребро, равное b , составляет с пересекающимися его сторонами основания углы, соответственно равные α и β . Найти объем призмы.

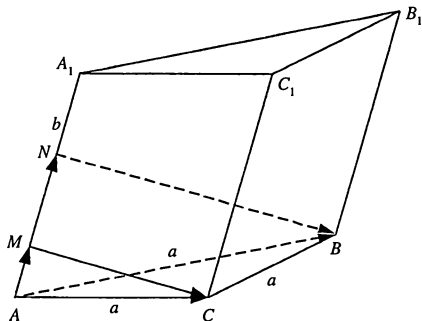


Рис. 7.131

Решение.

Из точек B и C проведем CM и BN — перпендикуляры на ребро AA_1 (рис. 7.131). Отрезки CM и BN конгруэнтные и параллельные сторонам перпендикулярного сечения; угол между векторами \overrightarrow{MC} и \overrightarrow{NB} равен линейному углу двугранного угла AA_1 . Имеем: $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN}$. Найдем скалярное произведение этих векторов: $\overrightarrow{MCNB} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{ACAB} - \overrightarrow{AMAB} - \overrightarrow{ACAN} + \overrightarrow{AMAN}$. (1) Из прямоугольных треугольников AMC и ANB находим длины катетов: $AM = a \cos \alpha$, $MC = a \sin \alpha$, $AN = a \cos \beta$, $NB = a \sin \beta$. Обозначим через φ линейный угол двугранного угла AA_1 , тогда

$$\overrightarrow{MCNB} = |\overrightarrow{MC}| |\overrightarrow{NB}| \cos \varphi = a^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi,$$

$$\overrightarrow{ACAB} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}, \quad \overrightarrow{AMAB} = |\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{AB}| \cos \beta = a^2 \cos \alpha \cos \beta, \quad \overrightarrow{ACAN} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AN}| \cos \alpha = a^2 \cos \beta \cos \alpha, \quad \overrightarrow{AMAN} = |\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{AN}| \cos 0 = a^2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Подставляя эти значения в (1), получим площадь перпендикулярного сечения:

$$\cos \varphi = \frac{1 - 2 \cos \alpha \cos \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta}.$$

$$S = \frac{1}{2} MC \cdot NB \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{1 - \frac{(1 - 2 \cos \alpha \cos \beta)^2}{4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3 - 4(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos \alpha \cos \beta)}.$$

$$\text{Объем призмы } V = \frac{a^2 b}{4} \sqrt{3 - 4(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos \alpha \cos \beta)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2 b}{4} \sqrt{3 - 4(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos \alpha \cos \beta)}.$$

7.215. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка N в плоскости его грани ABC . Доказать, что для разложения $\overrightarrow{DN} = \alpha \overrightarrow{DA} + \beta \overrightarrow{DB} + \gamma \overrightarrow{DC}$ выполняется равенство $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

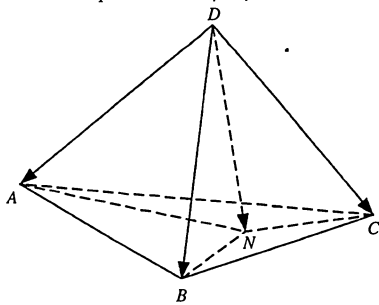


Рис. 7.132

Решение.

По условию $\overrightarrow{DN} = \alpha \overrightarrow{DA} + \beta \overrightarrow{DB} + \gamma \overrightarrow{DC}$, где $N \in (ABC)$ (рис. 7.132), тогда $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DN} = (1 - \alpha) \overrightarrow{DA} - \beta \overrightarrow{DB} - \gamma \overrightarrow{DC}$, (1) $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DN} = -\alpha \overrightarrow{DA} + (1 - \beta) \overrightarrow{DB} - \gamma \overrightarrow{DC}$, (2) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DN} = -\alpha \overrightarrow{DA} - \beta \overrightarrow{DB} + (1 - \gamma) \overrightarrow{DC}$. (3) Векторы \overrightarrow{NA} , \overrightarrow{NB} , \overrightarrow{NC} компланарны; поэтому существуют такие числа k, l, m , что $k \overrightarrow{NA} + l \overrightarrow{NB} + m \overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Используя (1)–(3), преобразуем последнее равенство:

$$k(1 - \alpha) \overrightarrow{DA} - k \beta \overrightarrow{DB} - k \gamma \overrightarrow{DC} - l \alpha \overrightarrow{DA} + l(1 - \beta) \overrightarrow{DB} - l \gamma \overrightarrow{DC} - m \alpha \overrightarrow{DA} - m \beta \overrightarrow{DB} + m(1 - \gamma) \overrightarrow{DC} = \vec{0};$$

$$(k(1 - \alpha) - l \alpha - m \alpha) \overrightarrow{DA} + (-k \beta + l(1 - \beta) - m \beta) \overrightarrow{DB} + (-k \gamma - l \gamma + m(1 - \gamma)) \overrightarrow{DC} = \vec{0}. \quad (4)$$

Векторы \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{DC} некопланарны и, значит, (4) возможно тогда, когда коэффициенты при \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{DC} равны

нулю: $\begin{cases} k - k\alpha - l\alpha - m\alpha = 0, \\ -k\beta + l - l\beta - m\beta = 0, \\ -k\gamma - l\gamma + m - m\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{k}{k+l+m}, \beta = \frac{l}{k+l+m}, \gamma = \frac{m}{k+l+m}$. Таким образом, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. **QED.**

7.216. В правильной треугольной призме угол между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней равен $\arccos \frac{5}{8}$. Найти объем призмы, если диагональ грани равна 4 см.

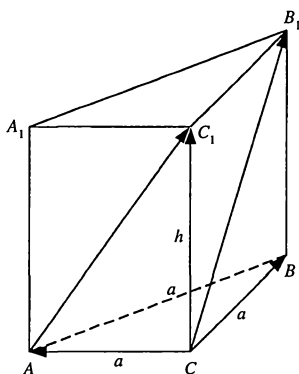


Рис. 7.133

Решение.

Обозначим сторону основания через a , а боковое ребро — через h . Рассмотрим векторы \overrightarrow{CA} , $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$, \overrightarrow{CB} , $\overrightarrow{AC_1}$ (рис. 7.133). Имеем $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB}$. Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AC_1} \overrightarrow{CB_1} = |\overrightarrow{AC_1}| |\overrightarrow{CB_1}| \cos \angle(\overrightarrow{AC_1}; \overrightarrow{CB_1}) = 4 \cdot 4 \cos \left(\arccos \frac{5}{8} \right) = 10.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC_1} \overrightarrow{CB_1} &= (\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{CC_1}^2 - \overrightarrow{CA} \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CC_1} \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \overrightarrow{CB} = h^2 - 0 + \\ &+ 0 - a^2 \cos 60^\circ = h^2 - \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Приравняв оба значения для скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AC_1} \overrightarrow{CB_1}$, получим $10 = h^2 - \frac{a^2}{2}$, а из прямоугольного $\triangle CBB_1$ имеем $a^2 + h^2 = 16$. Решая систему уравнений $\begin{cases} h^2 - \frac{a^2}{2} = 10, \\ a^2 + h^2 = 16, \end{cases}$ получаем

$$a = 2, h = 2\sqrt{3}. \text{ Теперь находим } S_{\text{осн}} = \frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ и } V = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: 6 (см³).

7.217. Известны длины ребер тетраэдра $ABCS$. Найти косинус угла между противоположными ребрами AB и CS .

Решение.

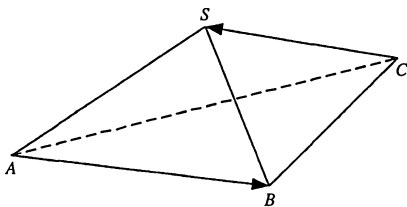


Рис. 7.134

Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $SA = d$, $SB = e$, $SC = f$;

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CS}) = \varphi \text{ (рис. 7.134). Тогда } \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CS}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{CS}}{cf}. \quad (1)$$

Преобразуем выражение (1):

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{CS}}{cf} = -\frac{2\overrightarrow{BACS}}{2cf} = -\frac{\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC})}{2cf} = \\ &= \frac{-\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB})}{2cf} = \frac{\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{SA}^2 - \overrightarrow{SB}^2}{2cf} = \\ &= \frac{a^2 + d^2 - b^2 - e^2}{2cf} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - e^2}{2cf}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a^2 + d^2 - b^2 - e^2}{2cf}$, где $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $SA = d$, $SB = e$, $SC = f$.

7.218. В равностороннем конусе через его вершину проведена плоскость, которая пересекает плоскость основания по хорде AC , стягивающей дугу в 60° ; треугольник ASB — осевое сечение. Расстояние между хордой AC и образующей SB равно $2\sqrt{15}$ см. Найти боковую поверхность конуса.

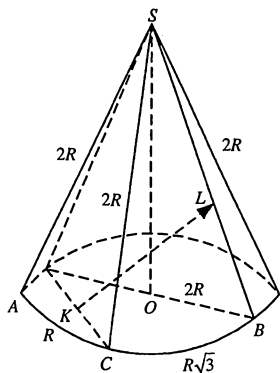


Рис. 7.135

Решение.

Для решения задачи заметим, что $\cos \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}) = \frac{1}{4}$, $\cos \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{SB}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдём скалярное произведение векторов \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{SB} (рис. 7.135): $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS}$, т.е. $R \cdot 2R \cos \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}) = R \cdot 2R \cos 60^\circ - R \cdot 2R \cos \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS})$, или $2R^2 \cos \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}) = R^2 - 2R^2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \cos \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}) = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}) = \frac{1}{4}$. Предположим, что $|KL|$ — расстояние между скрещивающимися прямыми AC и SB . Получаем, что $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BL}$. Пусть $\overrightarrow{KC} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{LB} = y\overrightarrow{SB}$, тогда $\overrightarrow{KL} = x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - y\overrightarrow{SB}$. Так как $\overrightarrow{KL} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KL} \perp \overrightarrow{SB}$, то $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ и $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$.

Имеем: $x\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} - y\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow xR^2 + R\sqrt{3}R \cos 90^\circ - y \cdot 2R \cdot R \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x - \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = 2x$ (1) и $x\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{SB} - y\overrightarrow{SB}^2 = 0 \Rightarrow xR \cdot 2R \cdot \frac{1}{4} + R\sqrt{3} \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} -$

$-y \cdot 4R^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{3}{2} - 4y = 0$. (2) Из (1) и (2) получаем $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$. Следовательно, $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{SB}$. Далее най-

дем скалярный квадрат вектора \overrightarrow{KL} : $\overrightarrow{KL}^2 = \frac{1}{25}\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + \frac{4}{25}\overrightarrow{SB}^2 - \frac{4}{25}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{SB}$ или $\overrightarrow{KL}^2 = \frac{1}{25}R^2 +$

$+3R^2 + \frac{4}{25} \cdot 4R^2 - \frac{4}{25}R \cdot 2R \cdot \frac{1}{4} - \frac{4}{5}R\sqrt{3} \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, т.е. $\overrightarrow{KL}^2 = \frac{60}{25}R^2$. Так как по условию $|KL| = 2\sqrt{15}$, то

$$\frac{60R^2}{25} = 60 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5. \text{ Итак, } S_{\text{бок}} = \pi Rl, \text{ т.е. } S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot 25 = 50\pi (\text{см}^2).$$

Ответ: $50\pi (\text{см}^2)$.

7.219. В тетраэдре $OABC$ плоские углы трехгранного угла при вершине O — прямые. Точка P — основание перпендикуляра, проведенного из вершины O к плоскости грани ABC . Разложить вектор \overrightarrow{OP} по векторам \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , если $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

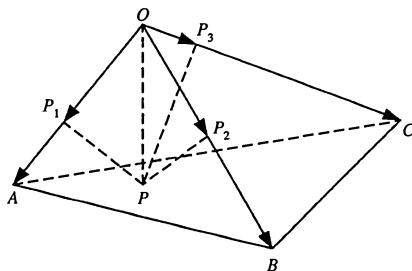


Рис. 7.136

Решение.

Проведем $PP_1 \perp OA$, $PP_2 \perp OB$, $PP_3 \perp OC$ (рис. 7.136). Тогда

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}$, (1) где $\alpha = \frac{OP_1}{OA}$, $\beta =$

$\frac{OP_2}{OB}$, $\gamma = \frac{OP_3}{OC}$. Далее, $\triangle OP_1P$ подобен $\triangle OPA \Rightarrow \frac{OP_1}{OP} = \frac{OP}{OA} \Rightarrow$

$\Rightarrow OP_1 = \frac{OP^2}{OA}$ и, значит, $\alpha = \frac{OP^2}{OA^2}$. (2) Для нахождения OP воспользуемся тем, что $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot OP = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AOB} \cdot OC$ (так

как $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$). Следовательно, $OP = \frac{S_{\triangle AOB} \cdot c}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}abc}{S_{\triangle ABC}}$, где $S_{\triangle ABC}$ вычислим с помощью формулы Герона:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} - \sqrt{a^2+c^2}}{2}} \times \\ \times \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{b^2+c^2}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

Значит, $OP = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$. Подставив это значение в (2), находим $\alpha = \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$. Аналогично полу-

чим $\beta = \frac{OP^2}{OB^2} = \frac{a^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$ и $\gamma = \frac{OP^2}{OC^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$. Подставив полученные выражения для α, β и γ в

$$(1), \text{ получаем } \overline{OP} = \frac{b^2c^2\overline{OA} + a^2c^2\overline{OB} + a^2b^2\overline{OC}}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

$$\text{Ответ: } \overline{OP} = \frac{b^2c^2\overline{OA} + a^2c^2\overline{OB} + a^2b^2\overline{OC}}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

7.220. В куб со стороной a вписан шар. Показать, что сумма квадратов расстояний любой точки шаровой поверхности до: а) вершин куба, б) граней куба, в) ребер куба постоянна. Вычислить эти суммы.

Решение.

Выберем начало координат таким образом, чтобы оно совпало с центром симметрии куба, а оси Ox, Oy, Oz были параллельными ребрам куба

(рис. 7.137). Радиус шара $R = \frac{a}{2}$. Вершины куба имеют следующие координаты: $A(R; R; -R), B(-R; R; -R), C(-R; -R; -R), D(R; -R; -R), A_1(R; R; R), B_1(-R; R; R), C_1(-R; -R; R), D_1(R; -R; R)$. Пусть точка $M(x; y; z)$ принадлежит шаровой поверхности, тогда $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}$.

$$\text{а) } S_1 = MA^2 + MB^2 + \dots + MC_1^2 + MD_1^2 = 4((R-x)^2 + (R+x)^2 + (R-y)^2 + (R+y)^2 + (R-z)^2 + (R+z)^2) = 24R^2 + 8(x^2 + y^2 + z^2) = 24R^2 + 8R^2 = 32R^2 = 8a^2;$$

$$\text{б) } S_2 = (R-x)^2 + (R+x)^2 + (R-y)^2 + (R+y)^2 + (R-z)^2 + (R+z)^2 = 6R^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 8R^2 = 2a^2;$$

$$\text{в) } S_3 = d_{AB}^2 + d_{BC}^2 + \dots + d_{CC_1}^2 = 4((R-x)^2 + (R+x)^2 + (R-y)^2 + (R+y)^2 + (R-z)^2 + (R+z)^2) = 24R^2 + 8(x^2 + y^2 + z^2) = 24R^2 + 8R^2 = 32R^2 = 8a^2.$$

Ответ: а) $8a^2$; б) $2a^2$; в) $8a^2$, где a — длина стороны куба.

7.221. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}$, равен $\sqrt{15}$. Определить длину вектора \overline{SC} , если $\overline{SA}\overline{SB} = 1, \overline{SA}\overline{SC} = 0, \overline{SB}\overline{SC} = 0, SA = SB = 2$.

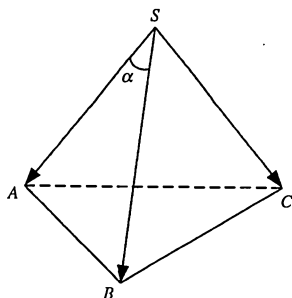


Рис. 7.138

Решение.

Так как $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$, $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$, то $SC \perp (SAB)$ (рис. 7.138). Значит, $V_n = \frac{1}{3} S_{\Delta SAB} \cdot SC \Rightarrow SC = \frac{3V_n}{S_{\Delta SAB}}$. (1) Далее, $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB \sin \alpha$, где $\alpha = \angle ASB$.

По условию $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 1$, тогда $SA \cdot SB \cos \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{SA \cdot SB}$. По формуле $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ находим $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{SA^2 \cdot SB^2}} = \frac{1}{SA \cdot SB} \sqrt{SA^2 \cdot SB^2 - 1}$.

Следовательно, $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \frac{1}{SA \cdot SB} \cdot \sqrt{SA^2 \cdot SB^2 - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 \cdot SB^2 - 1}$. Подставляя полученное выражение в (1), находим $SC = \frac{6V_n}{\sqrt{SA^2 \cdot SB^2 - 1}} = \frac{6\sqrt{15}}{\sqrt{16 - 1}} = 6$.

ставляя полученное выражение в (1), находим $SC = \frac{6V_n}{\sqrt{SA^2 \cdot SB^2 - 1}} = \frac{6\sqrt{15}}{\sqrt{16 - 1}} = 6$.

Ответ: 6.

7.222. Даны три попарно скрещивающиеся прямые, параллельные некоторой плоскости. Проведены еще три прямые, каждая из которых пересекает первые три прямые. Доказать, что проведенные прямые также параллельны некоторой плоскости.

Решение.

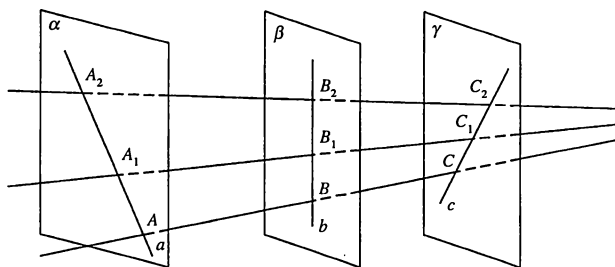


Рис. 7.139

Пусть a, b, c — данные попарно скрещивающиеся прямые, причем $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $c \subset \gamma$ и $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ (рис. 7.139). Отсюда $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2C_2} = \lambda \overrightarrow{A_2B_2}$. Легко видеть, что $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_2A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_2}$, $\lambda \overrightarrow{A_1B_1} =$

$= \overrightarrow{A_1A} + \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$, $\lambda \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_2A} + \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_2}$. (1) Из равенств (1) следует: $\frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{CC_2}} = \frac{(1-\lambda)\overrightarrow{AA_1} + \lambda\overrightarrow{BB_1}}{(1-\lambda)\overrightarrow{AA_2} + \lambda\overrightarrow{BB_2}}$. (2) Так как

$\overrightarrow{AA_2} = x\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_2} = y\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_2} = z\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{BB_1} \neq \vec{0}$, то из системы (2) имеем $x = y = z$. Далее, учитывая равенства (1), получаем $x(\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A_2B_2} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A_2B_2} = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{A_1B_1}$. Отсюда следует, что векторы \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ компланарные; значит, прямые AB , A_1B_1 , A_2B_2 параллельны некоторой плоскости. QED.

7.223. В пирамиде $ABCD$ длины четырех ребер связаны соотношением $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. Доказать, что ребра AD и BC взаимно перпендикулярны.

Решение.

По условию $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$, то $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{CD}^2$ (рис. 7.140).

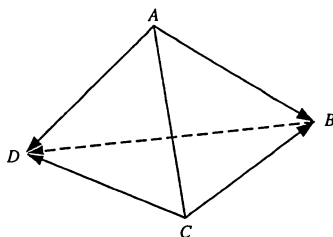


Рис. 7.140

Отсюда:

$$\begin{aligned}(\overline{AB} - \overline{AC})(\overline{AB} + \overline{AC}) &= (\overline{BD} - \overline{CD})(\overline{BD} + \overline{CD}) \Rightarrow \overline{CB}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \overline{BC}(\overline{BD} + \overline{CD}) \Rightarrow \\&\Rightarrow \overline{CB}(\overline{AB} + \overline{AC}) - \overline{BC}(\overline{BD} + \overline{CD}) = 0 \Rightarrow \overline{CB}(\overline{AB} + \overline{AC}) + \overline{CB}(\overline{BD} + \overline{CD}) = 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow \overline{CB}((\overline{AB} + \overline{BD}) + (\overline{AC} + \overline{CD})) = 0 \Rightarrow \overline{CB}(\overline{AD} + \overline{AD}) = 0 \Rightarrow 2\overline{CBAD} = 0.\end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $\overline{CB} \perp \overline{AD}$, т.е. ребра AD и CB взаимно перпендикулярны.

QED.

7.224. В усеченном конусе AB и CD — взаимно перпендикулярные диаметры нижнего основания; EF — диаметр верхнего основания, параллельный прямой CD . Найти косинус острого угла между прямыми AE и BF , если образующая конуса есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований и составляет с плоскостью основания угол α ($\alpha > \frac{\pi}{3}$).

Решение.

Выберем систему координат $Oxyz$ так, как показано на рис. 7.141, примем $OF = OK = 1$. Если $FD = l$, то $OO_1 = KF = l \sin \alpha$, $KD = l \cos \alpha$.

По условию $l^2 = EF \cdot CD = 2(2 + 2l \cos \alpha) \Rightarrow 2 + 2l \cos \alpha = \frac{l^2}{2}$. Рассмотрим точки $E(0; -1; l \sin \alpha)$, $F(0; 1; l \sin \alpha)$, $A(1 + l \cos \alpha; 0; 0)$, $B(-1 - l \cos \alpha; 0; 0)$ и векторы $\overline{AE}(-1 - l \cos \alpha; -1; l \sin \alpha)$, $\overline{BF}(1 + l \cos \alpha; 1; l \sin \alpha)$. Угол β между указанными векторами будем искать, используя определение скалярного произведения векторов:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\overline{AE} \overline{BF}}{|\overline{AE}| |\overline{BF}|} = \frac{-(1 + l \cos \alpha)^2 - 1 + l^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{((-1 - l \cos \alpha)^2 + 1 + l^2 \sin^2 \alpha)^2}} = \\&= \frac{-(1 + 2l \cos \alpha + l^2 \cos^2 \alpha + 1) + l^2 \sin^2 \alpha}{1 + 2l \cos \alpha + l^2 \cos^2 \alpha + 1 + l^2 \sin^2 \alpha} = \\&= \frac{-(2 + 2l \cos \alpha) + l^2(1 - \cos^2 \alpha) - l^2 \cos^2 \alpha}{(2 + 2l \cos \alpha) + l^2} = \\&= \frac{-\frac{l^2}{2} + l^2(1 - 2 \cos^2 \alpha)}{\frac{l^2}{2} + l} = \frac{-1 + 2(1 - 2 \cos^2 \alpha)}{1 + 2} = -\frac{4 \cos^2 \alpha - 1}{3}.\end{aligned}$$

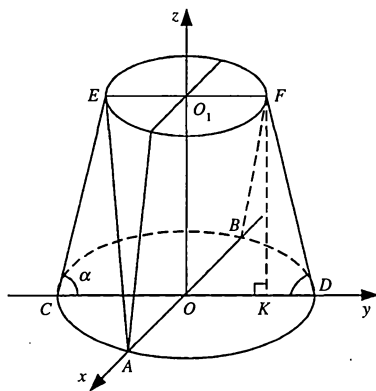


Рис. 7.141

Так как $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \cos \alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow 4 \cos^2 \alpha < 1$, следовательно, $\cos \beta > 0$ и угол β — острый. Далее,

$$\cos \beta = -\frac{1}{3}(4 \cos^2 \alpha - 1) = -\frac{1}{3}(2 \cos 2\alpha + 2 - 1) = -\frac{2}{3}(\cos 2\alpha + \cos \frac{\pi}{3}) = -\frac{4}{3} \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right).$$

Ответ: $-\frac{4}{3} \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right)$.

7.225. В параллельных плоскостях расположены одинаково ориентированные квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Пользуясь векторным методом, доказать, что $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$.

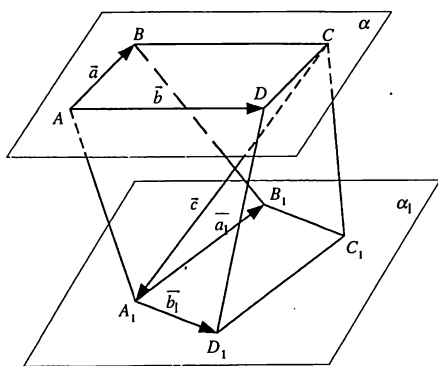


Рис. 7.142

Решение.

Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}_1$, $\overrightarrow{CA_1} = \vec{c}$ (рис. 7.142).

Имеем: $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{c}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}_1 + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{a} + \vec{b}_1 + \vec{c}$. Найдем скалярные квадраты этих векторов: $\overrightarrow{AA_1}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c}$, $\overrightarrow{CC_1}^2 = a_1^2 + b_1^2 + c^2 + 2\vec{a}_1\vec{c} + 2\vec{b}_1\vec{c} + 2\vec{a}_1\vec{b}_1$, $\overrightarrow{BB_1}^2 = a_1^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{a}_1\vec{b} + 2\vec{a}_1\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c}$, $\overrightarrow{DD_1}^2 = a^2 + b_1^2 + c^2 + 2\vec{a}\vec{b}_1 + 2\vec{b}_1\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c}$.

Отсюда $\overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{CC_1}^2 = a^2 + b^2 + a_1^2 + b_1^2 + 2c^2 + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}_1\vec{c} + 2\vec{b}_1\vec{c}$ (1) и $\overrightarrow{BB_1}^2 + \overrightarrow{DD_1}^2 = a^2 + b^2 + a_1^2 + b_1^2 + 2c^2 + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}_1\vec{c} + 2\vec{b}_1\vec{c} + 2\vec{a}\vec{b}_1 + 2\vec{b}\vec{a}_1 + 2\vec{a}\vec{b}_1$. (2) Сопоставляя равенства

(1) и (2), видим, что для доказательства данного равенства осталось доказать, что $\vec{b}\vec{a}_1 + \vec{a}\vec{b}_1 = 0$. Пусть $\angle(\vec{a}; \vec{a}_1) = \alpha$, тогда $\angle(\vec{a}; \vec{b}_1) = \alpha + 90^\circ$, $\angle(\vec{b}; \vec{a}_1) = \alpha + 270^\circ$, поэтому $\vec{b}\vec{a}_1 + \vec{a}\vec{b}_1 = 0$ и $\overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{CC_1}^2 = \overrightarrow{BB_1}^2 + \overrightarrow{DD_1}^2$ или $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$.

QED.

7.226. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. В каком отношении плоскость, проведенная через вершину A и центры P и Q граней $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $BB_1 C_1 C$, делит ребро $B_1 C_1$?

Решение.

Пусть M — точка пересечения рассматриваемой плоскости с ребром $B_1 C_1$ (рис. 7.143). Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Так как векторы \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AQ} компланарные, а последние два вектора неколлинеарные, то:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= m\overrightarrow{AP} + n\overrightarrow{AQ} = m\left(\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}\right) + n\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}\right) = m\left(\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}\right) + n\left(\vec{a} + \frac{\vec{c}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{m}{2} + n\right)\vec{a} + \frac{m+n}{2}\vec{b} + \left(m + \frac{n}{2}\right)\vec{c}. \end{aligned}$$

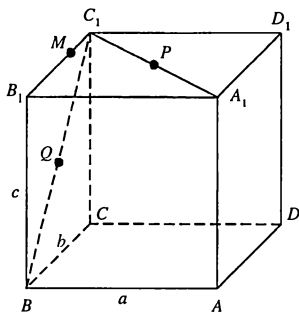


Рис. 7.143

С другой стороны, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1M} = \vec{a} + \vec{c} + \lambda \vec{b}$, где λ — неизвестный скаляр, который нам и надо найти. Так как векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} некопланарны, то полученные два разложения вектора \overrightarrow{AM} совпадают и $\frac{m}{2} + n = 1$, $m + \frac{n}{2} = 1$, $\lambda = \frac{m+n}{2}$. Из этой системы получаем $\lambda = \frac{2}{3}$, т.е. $B_1M:MC_1 = 2:1$.

Ответ: 2:1.

7.227. На ребрах DA , DB , AC тетраэдра $DABC$ взяты соответственно точки L , N , F так, что $DL = \frac{1}{2}DA$, $DN = \frac{1}{3}DB$, $AF = \frac{1}{4}AC$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки L , N , F , делит ребро BC ?

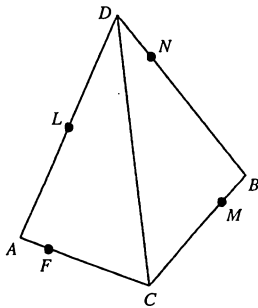


Рис. 7.144

Решение.

Пусть M — точка пересечения рассматриваемой плоскости с ребром BC (рис. 7.144) и $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Так как точки M , N , L , F лежат в одной плоскости, причем последние три точки не лежат на одной прямой, то $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DL} + l\overrightarrow{DN} + (1-k-l)\overrightarrow{DF} = k\frac{\vec{a}}{2} + l\frac{\vec{b}}{3} + (1-k-l)\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}\right)$. С другой стороны, $\overrightarrow{DM} = (1-m)\vec{b} + m\vec{c}$, где m — отношение $BM:MC$. Так как векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} некопланарны, то мы получаем систему уравнений: $\frac{k}{2} + (1-k-l)\frac{3}{4} = 0$, $\frac{l}{3} = 1-m$, $(1-k-l)\frac{1}{4} = m$. Отсюда $m = \frac{2}{5}$ и $BM:MC = 2:3$.

Ответ: 2:3.

7.228. Через середину O ребра DA тетраэдра $DABC$ провести прямую, пересекающую прямые BE и CM , где E и M — середины ребер DC и AB .

Решение.

Пусть F и L — точки пересечения искомой прямой с прямыми BE и CM соответственно (рис. 7.145), $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Тогда

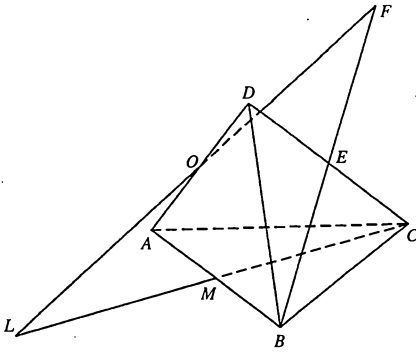


Рис. 7.145

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL} = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{c} + \lambda \frac{\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{2} = \frac{\lambda - 1}{2} \vec{a} + \frac{\lambda}{2} \vec{b} + (1 - \lambda) \vec{c},$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \mu \frac{\vec{c} - 2\vec{b}}{2} = -\frac{\vec{a}}{2} + (1 - \mu) \vec{b} + \frac{\mu}{2} \vec{c}.$$

Но точки O, L и F лежат на одной прямой, так что векторы \overrightarrow{OL} и \overrightarrow{OF} коллинеарны, поэтому получаем систему уравнений: $2(\lambda - 1)(1 - \mu) + \lambda = 0, (\lambda - 1)\mu + 2(1 - \lambda) = 0, \lambda\mu - 4(1 - \mu)(1 - \lambda) = 0$.

Из геометрических соображений можно было бы показать, что в данном случае независимыми являются только два из этих уравнений, но это не сделало бы решение более кратким. Проще решить первые два уравнения, получив $\lambda = 2, \mu = 2$, и проверить, что третье уравнение этими значениями неизвестных также удовлетворяется.

Таким образом, искомая прямая проходит через точку O и точку L , лежащую на продолжении CM за точку M , для которой $ML = CM$. Эта прямая пересечет прямую BE в такой точке F , что $EF = BE$.

7.229. Построить и вычислить расстояние между скрещивающимися ребрами правильного октаэдра с ребром a .

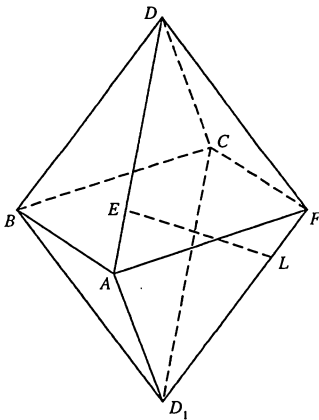


Рис. 7.146

Решение.

Имеем: $\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{FC}) = \angle(AD, AB) = 60^\circ, \angle ADC = 90^\circ$ (доказать!). Пусть

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FD_1} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD_1} = \vec{c}$ (рис. 7.146). Найдем расстояние EL

между AD и FD_1 . Имеем: $\overrightarrow{EA} = l\vec{a}, \overrightarrow{FL} = m\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1L} =$

$= l\vec{a} + \vec{c} + (m - 1)\vec{b}$. Так как $EL \perp DA$ и $EL \perp FD_1$, то $\overrightarrow{ELDA} = 0, \overrightarrow{ELFD_1} = 0$, и, следовательно,

$$\begin{cases} (l\vec{a} + (m - 1)\vec{b} + \vec{c})\vec{a} = 0, \\ (l\vec{a} + (m - 1)\vec{b} + \vec{c})\vec{b} = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $\vec{a}\vec{b} = a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$, $\vec{a}\vec{c} = 0, \vec{b}\vec{c} = a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$, придем к системе уравнений: $\begin{cases} 2l + m = 1, \\ 2m + l = 1, \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow l = m = \frac{1}{3}$. Таким образом, $AF = \frac{1}{3} AD$ и $FL = \frac{1}{3} FD_1$. Найдем длину EL .

$$\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow EL^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{4}{9} a^2 + a^2 - \frac{4}{9} \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EL = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

7.230. Пусть $ABCD$ и $ABEF$ — две грани куба. Точки N и M принадлежат соответственно отрезкам AC и FB , причем $AN = FM$.

- 1) Доказать, что отрезок MN параллелен одной из граней куба.
- 2) Найти геометрическое место середины отрезков MN .
- 3) Найти острые углы, образуемые отрезком MN с диагоналями AC и FB .
- 4) Найти наименьшую длину MN и углы, образуемые в этом случае отрезком MN и диагоналями AC и FB .

- 5) Показать, что отрезок MN не может быть общим перпендикуляром к AC и FB .

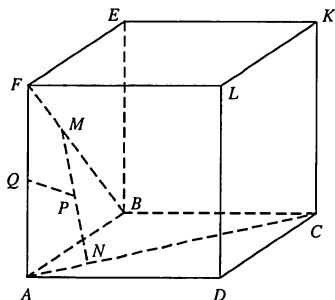


Рис. 7.147

Решение.

Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$, причем $a = b = c$ (рис. 7.147).

1) Имеем: $\overrightarrow{FM} = l\overrightarrow{FB} = l(\vec{b} - \vec{c})$, $\overrightarrow{AN} = l\overrightarrow{AC} = l(\vec{a} + \vec{b})$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AN} = l(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{c} + l(\vec{a} + \vec{b}) = l\vec{a} + (l-1)\vec{c}$. Отсюда видно, что векторы \overrightarrow{MN} , \vec{a} , \vec{c} компланарны, и поэтому отрезок MN параллелен плоскости $AFLD$.

2) Пусть P есть середина отрезка MN , а Q — середина отрезка AF . Тогда $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QF} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NP}$. Почленно складывая полученные равенства, имеем $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}l(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$. Таким образом,

вектор \overrightarrow{QP} коллинеарен постоянному вектору $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, а так как начало Q переменного вектора \overrightarrow{QP} есть постоянная точка Q , то заключаем, что точка P находится на постоянном отрезке QP , соединяющем середину Q ребра AF с серединой ребра BC (доказать!). Обратно: если через произвольную точку P отрезка QR провести прямую MN , пересекающую диагонали FB и AC так, что $FM = AN$, то $MP = PN$ (доказательство предоставляем читателю). Таким образом, отрезок QR есть искомое геометрическое место.

- 3) Для нахождения углов между MN и диагоналями AC и FB воспользуемся скалярным произведением векторов. Имеем:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{AC}| \cos \varphi_1, \quad \cos \varphi_1 = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(l\vec{a} + (l-1)\vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{a\sqrt{l^2 + (l-1)^2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{l}{\sqrt{2(2l^2 - 2l + 1)}}. \quad \text{Аналогично находим угол между } MN$$

$$\text{и } FB: \cos \varphi_2 = \frac{1-l}{\sqrt{2(2l^2 - 2l + 1)}}. \quad \text{Так как точки } M \text{ и } N \text{ даны на диагоналях } FB \text{ и } AC, \text{ а не на их продолжениях, то } 0 \leq l \leq 1,$$

и найденные формулы определяют острые углы между векторами \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{FB} и векторами \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{AC} . Рекомендуется для читателей отдельно рассмотреть случаи $l = 0$ и $l = 1$. Для нахождения углов φ_1 и φ_2 можно также воспользоваться и выражением скалярного произведения векторов на три попарно перпендикулярные оси, в данном случае на \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

$$\text{Тогда } \cos \varphi_1 = \frac{la \cdot a + 0 \cdot a + (l-1)a \cdot 0}{a^2 \sqrt{2(2l^2 - 2l + 1)}} = \frac{l}{\sqrt{2(2l^2 - 2l + 1)}}; \quad \cos \varphi_2 = \frac{la \cdot 0 + 0 \cdot a + (l-1)a \cdot (-a)}{a^2 \sqrt{2(2l^2 - 2l + 1)}} = \frac{1-l}{\sqrt{2(2l^2 - 2l + 1)}}.$$

$$4) \overrightarrow{MN} = l\vec{a} + (l-1)\vec{c}, \quad MN = a\sqrt{2\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}. \quad \text{Отсюда видно, что длина } MN \text{ приобретает наименьшее значение при } l = \frac{1}{2},$$

т.е. когда точки M и N совпадают с серединами диагоналей FB и AC . В этом случае $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = \frac{1}{2}$;

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{3}.$$

5) Если бы отрезок MN был общим перпендикуляром к AC и FB , то мы имели бы $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{FB} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (l\vec{a} + (l-1)\vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0, \\ (l\vec{a} + (l-1)\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0, \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} la^2 = 0, \\ (l-1)a^2 = 0. \end{cases} \quad \text{Но последние два равенства не могут выполняться одновременно, следовательно, } MN \text{ не может быть}$$

общим перпендикуляром к AC и FB .

7.231. В тетраэдре скрещивающиеся ребра, взятые попарно, имеют длины a и a_1 , b и b_1 , c и c_1 . Пусть из сумм $a^2 + a_1^2$, $b^2 + b_1^2$, $c^2 + c_1^2$ самая наибольшая есть $c^2 + c_1^2$. Доказать, что $a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 > c^2 + c_1^2$.

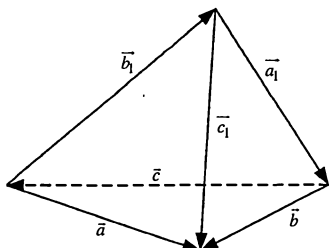


Рис. 7.148

Решение.

Разложим векторы \vec{a} , \vec{a}_1 , \vec{b} , \vec{b}_1 , \vec{c} , \vec{c}_1 (рис. 7.148). По правилу сложения векторов имеем: $\vec{b}_1 + \vec{a}_1 + \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, $\vec{b}_1 + \vec{c}_1 + (-\vec{b}) + \vec{c} = \vec{0}$, $\vec{a} + (-\vec{c}_1) + \vec{a}_1 + \vec{c} = \vec{0}$. Отсюда $\vec{a} - \vec{a}_1 = \vec{b} + \vec{b}_1$, $\vec{b} - \vec{b}_1 = \vec{c} + \vec{c}_1$, $\vec{c} - \vec{c}_1 = -\vec{a} - \vec{a}_1$. Возведя в квадрат обе части каждого из трех последних равенств, а затем сложив почленно первое и третье и вычтя из полученной суммы второе, будем иметь: $(\vec{a} - \vec{a}_1)^2 + (\vec{c} - \vec{c}_1)^2 - (\vec{b} - \vec{b}_1)^2 = (\vec{b} + \vec{b}_1)^2 + (\vec{a} + \vec{a}_1)^2 - (\vec{c} + \vec{c}_1)^2$. Учитывая, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, получим $c^2 + c_1^2 - (b^2 + b_1^2) = 2\vec{a}\vec{a}_1$. Но $2\vec{a}\vec{a}_1 = 2a \cdot a_1 \cos \angle(\vec{a}; \vec{a}_1) < 2a \cdot a_1 \leq a^2 + a_1^2$, значит, $c^2 + c_1^2 - (b^2 + b_1^2) < a^2 + a_1^2$ или $a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 > c^2 + c_1^2$.

QED.

7.232. Дан трехгранный угол $SABC$; $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Через ребро SA проведена плоскость, пересекающая грань BSC по прямой ST . Определить $\angle AST$, если $\angle CST = \beta_1$ и $\angle BST = \gamma_1$.

Решение.

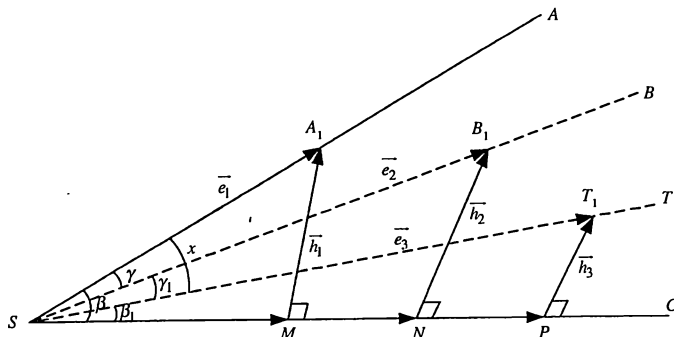


Рис. 7.149

На лучах SA, SB, ST (рис. 7.149) отложим от точки S единичные векторы $\vec{SA}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{SB}_1 = \vec{e}_2$, $\vec{ST}_1 = \vec{e}_3$. Построим отрезки AM, B_1N, T_1P перпендикулярно к лучу SC . Рассмотрим векторы $\vec{MA}_1 = \vec{h}_1$, $\vec{NB}_1 = \vec{h}_2$, $\vec{PT}_1 = \vec{h}_3$. Так как эти векторы сонаправленные лучам линейного угла двугранного угла при ребре SC , то $\angle(\vec{h}_1; \vec{h}_2) = \angle(\vec{h}_1; \vec{h}_3) = \varphi_1$, (1) где φ — величина линейного угла двугранного угла при ребре SC . Кроме того, $\vec{e}_1 = \vec{SM} + \vec{h}_1$, (2) $\vec{e}_2 = \vec{SN} + \vec{h}_2$, (3) $\vec{e}_3 = \vec{SP} + \vec{h}_3$. (4) Перемножив почленно равенство (2) на (3) и (4) и учитывая, что $\vec{SM} \perp \vec{h}_2$, $\vec{SN} \perp \vec{h}_1$, $\vec{SM} \perp \vec{h}_3$, $\vec{SP} \perp \vec{h}_1$, получим соответственно $\vec{e}_1 \vec{e}_2 = \vec{SM} \vec{SN} + \vec{h}_1 \vec{h}_2$ и $\vec{e}_1 \vec{e}_3 = \vec{SM} \vec{SP} + \vec{h}_1 \vec{h}_3$. (5) Из прямоугольных треугольников SMA_1 , SNB_1 , SPT_1 имеем: $SM = \cos \beta$, $h_1 = \sin \beta$, $SN = \cos \alpha$, $h_2 = \sin \alpha$, $SP = \cos \beta_1$, $h_3 = \sin \beta_1$. (6) Введем обозначение $\angle AST = \angle(\vec{e}_1; \vec{e}_3) = x$. (7) Заметим, что $\angle(\vec{e}_1; \vec{e}_2) = \gamma$ и $\angle(\vec{SM}; \vec{SN}) = \angle(\vec{SM}; \vec{SP}) = 0$, тогда на основании равенств (6) и обозначений (1) и (7) равенствам (5) можно придать следующий вид: $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi$ и $\cos x = \cos \beta_1 \cos \beta + \sin \beta_1 \sin \beta \cos \varphi$. Исключив из этих двух равенств $\cos \varphi$, получим $\cos x = \frac{\cos \gamma \sin \beta_1 + \cos \beta \sin \gamma_1}{\sin \alpha}$. (8) Формула (8) — формула Стиوارта для трехгранного угла.

Ответ: $\cos \angle AST = \frac{\cos \gamma \sin \beta_1 + \cos \beta \sin \gamma_1}{\sin \alpha}$.

7.233. Найти косинус угла между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной треугольной призмы, у которой боковое ребро конгруэнтно стороне основания.

Решение.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{CA_1}$, \overrightarrow{CA} , $\overrightarrow{AA_1}$, \overrightarrow{BC} , $\overrightarrow{BC_1}$ (рис. 7.150). Пусть $CA = AA_1 = a$. Обозначим через φ угол между прямыми CA_1 и BC_1 . Согласно определению угла между скрещивающимися прямыми, $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$, $CA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{CA_1} \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{CA_1}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{|(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1})|}{2a^2} = \frac{\left| -\frac{1}{2}a^2 + 0 + 0 + a^2 \right|}{2a^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

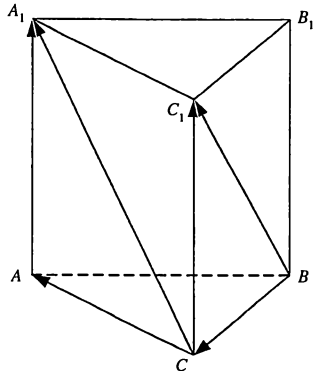


Рис. 7.150

7.234. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величиной φ . Катет AB образует с ребром EF двугранного угла острый угол α (рис. 7.151). Определить угол между этим ребром и катетом AC .

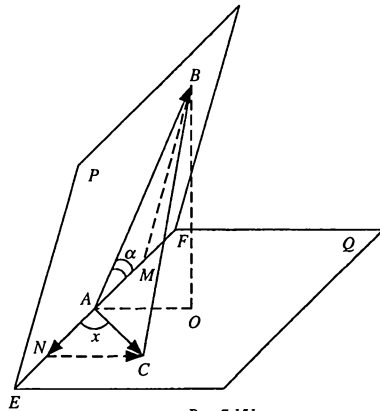


Рис. 7.151

Решение.

Катет AC образует с ребром EF два смежных угла. Нетрудно установить, какой из них острый. Проведем из точки B перпендикуляр BO на грань Q и соединим точки O и A ; $OA \perp AC$ (теорема о трех перпендикулярах) и, следовательно, $\angle CAF$ — тупой, а $\angle CAE$ — острый. Определим величину угла CAE . В грани P проведем $BM \perp EF$, а в грани Q — $CN \perp EF$. Согласно условию, $\angle BAM = \alpha$. Пусть $\angle CAN = x$, $AB = c$ и $AC = b$. Тогда $AM = c \cos \alpha$, $AN = b \cos x$, $MB = c \sin \alpha$ и $NC = b \sin x$. Запишем векторные равенства: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC}$. Так как $\triangle ABC$ прямоугольный, то $\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} = 0$ и $(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC}) = 0$. Отсюда $AM \cdot AN + 0 + 0 + MB \cdot NC \cos \varphi = 0$, что можно записать иначе: $-c \cos \alpha b \cos x + c \sin \alpha b \sin x \cos \varphi = 0$ или $\sin \alpha \cos \varphi \sin x = \cos \alpha \cos x$. (1)

Из (1) получаем: $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \varphi} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \varphi}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \varphi}$.

7.235. Плоскость отсекает от боковых ребер SA , SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S (рис. 7.152) отрезки, длины которых равны $SK = \frac{2}{3}SA$, $SL = \frac{1}{3}SB$, $SM = \frac{1}{3}SC$. Длина бокового ребра пирамиды равна a . Найти длину отрезка SN , отсекаемого этой плоскостью на ребре SD .

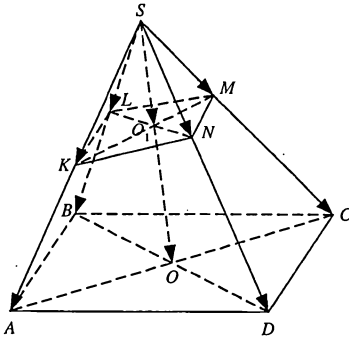


Рис. 7.152

Решение.

Легко установить, что $\vec{SO} = \frac{1}{2}(\vec{SA} + \vec{SC})$. Пусть $\vec{SO}_1 = x\vec{SO}$, где $0 < x < 1$.

Тогда $\vec{SO}_1 = \frac{x}{2}\vec{SA} + \frac{x}{2}\vec{SC}$. (1) По условию $\vec{SK} = \frac{2}{3}\vec{SA}$, $\vec{SM} = \frac{1}{3}\vec{SC}$. Так как SO_1 — биссектриса $\triangle KSM$ и $SK:SM = 2:1$, то $KO_1:O_1M = 2:1$ и $\vec{SO}_1 = \frac{1}{3}\vec{SK} + \frac{2}{3}\vec{SM} = \frac{2}{9}\vec{SA} + \frac{2}{9}\vec{SC}$. (2) В силу единственности разложения вектора по двум данным неколлинеарным векторам из равенств (1) и (2) получаем $x = \frac{4}{9}$. Теперь рассмотрим диагональное сечение BSD .

$\vec{SO} = \frac{1}{2}\vec{SB} + \frac{1}{2}\vec{SD}$, $\vec{SO}_1 = \frac{4}{9}\vec{SO} = \frac{2}{9}\vec{SB} + \frac{2}{9}\vec{SD}$. (3) Пусть $\vec{SN} = y\vec{SD}$. Так как SO_1 — биссектриса $\angle LSM$ в $\triangle LSM$ и $SL:SN = 1:2y$, то $LO_1:O_1N = 1:2y$, поэтому $\vec{SO}_1 = \frac{2y}{1+2y}\vec{SL} + \frac{1}{1+2y}\vec{SN} = \frac{y}{1+2y}\vec{SB} + \frac{y}{1+2y}\vec{SD}$. (4) Из ра-

венств (4) и (3) следует, что $\frac{y}{1+2y} = \frac{2}{9} \Rightarrow y = \frac{2}{5}$. Значит, $SN = \frac{2}{5}a$.

Ответ: $\frac{2}{5}a$.

7.236. Тетраэдр задан плоскими углами при одной из вершин и длинами ребер, выходящих из этой вершины. Выразить через эти данные необходимое и достаточное условие того, чтобы расстояния между серединами каждой пары противоположных ребер тетраэдра были равны между собой.

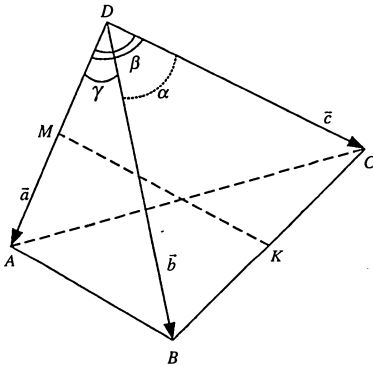


Рис. 7.153

Решение.

В тетраэдре $ABCD$ примем $\vec{DA} = \vec{a}$, $\vec{DB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{c}$ (рис. 7.153). Пусть K и M — соответственно середины ребер BC и DA . Тогда

$\vec{MK} = \vec{DK} - \vec{DM} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})$. Аналогично получаем, что векторы, определяемые серединами двух других пар противоположных ребер, будут $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$ и $\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a} - \vec{b})$. Если расстояние между

серединами каждой пары противоположных ребер равны между собой, то $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2 = (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})^2 = (\vec{c} + \vec{a} - \vec{b})^2$. (1) Из равенств (1) имеем $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}$ или $abc\cos\gamma = bcc\cos\alpha = cac\cos\beta$, (2) где a, b, c — соответственно длины ребер DA, DB, DC и $\gamma = \angle ADB$, $\alpha = \angle BDC$, $\beta = \angle CDA$. Разделив в равенствах (2) каждое произведение на abc , получим

$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}$. (3) Таким образом, из равенства расстояний

между серединами каждой пары противоположных ребер вытекает необходимость условия. Проведем обратный переход от соотношения (3) к соотношению (1), легко обнаружить достаточность условия (3).

Ответ: $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}$.

7.237. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AD:DC = a:b$. В каком отношении делит общий перпендикуляр прямых AA_1 и $B_1 D$ отрезки AA_1 и $B_1 D$?

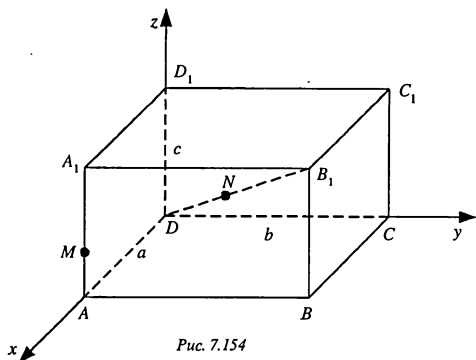


Рис. 7.154

Решение.

Введем в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, что $A(a; 0; 0)$, $C(0; b; 0)$, $B_1(a; b; c)$ (рис. 7.154). Пусть MN — общий перпендикуляр прямых AA_1 и B_1D_1 .

Тогда $\overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AA_1} (0; 0; pc)$, $\overrightarrow{DN} = q\overrightarrow{DB_1} (qa; qb; qc)$.

Из условия задачи следует, что $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0, \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB_1} = 0. \end{cases}$ (1) Запишем систему (1) в координатной форме:

$$\begin{cases} (qa - a) \cdot 0 + qb \cdot 0 + c^2(q - p) = 0, \\ (qa - a) \cdot a + qb \cdot b + (q - p)c = 0 \end{cases} \Rightarrow p = q = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно, $\frac{AM}{MA_1} = \frac{DN}{NB_1} = \frac{a^2}{b^2}$.

Ответ: $\frac{a^2}{b^2}$.

7.238. Дан тетраэдр $ABCD$ и точки K_1, K_2, M_1, M_2, M_3 такие, что $\overrightarrow{AK_1} \cdot \overrightarrow{K_1B} = \overrightarrow{DK_2} \cdot \overrightarrow{K_2C} = k$, $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{M_1D} = \overrightarrow{K_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_2K_2} = \overrightarrow{BM_3} \cdot \overrightarrow{M_3C} = m$. Доказать, что точки M_1, M_2, M_3 принадлежат одной прямой.

Решение.

Пусть O — произвольная точка пространства и точка $P \in (M_1M_3)$, причем $\overrightarrow{M_1P} \cdot \overrightarrow{PM_3} = k$. Докажем, что $P = M_2$. Действительно, по условию задачи имеем:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= \frac{m-1}{m}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{m}\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM_3} = \frac{m-1}{m}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{m}\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OP} = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OM_3} + \frac{1}{k}\overrightarrow{OM_1} = \\ &= \frac{(k-1)(m-1)}{km}\overrightarrow{OC} + \frac{k-1}{km}\overrightarrow{OB} + \frac{m-1}{km}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{km}\overrightarrow{OA}. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, $\overrightarrow{OM_2} = \frac{m-1}{m}\overrightarrow{OK_2} + \frac{1}{m}\overrightarrow{OK_1} = \frac{(k-1)(m-1)}{km}\overrightarrow{OC} + \frac{m-1}{kn}\overrightarrow{OD} + \frac{k-1}{km}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{km}\overrightarrow{OA}$. (2) Из (1) и (2) следует, что $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_2}$,

т.е. $P = M_2$. Значит, $M_2 \in M_1M_3$ и три точки M_1, M_2, M_3 принадлежат одной прямой. QED.

7.239. Доказать, что если a, b, c — длины ребер тетраэдра, имеющих общую вершину, a_1, b_1, c_1 — длины трех остальных ребер и R — радиус описанной около него сферы, то $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 4R^2$.

Решение.

Пусть $\vec{S} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, где O — центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$ (рис. 7.155). Отсюда $\vec{S}^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})^2 \geq 0$.

После возведения в квадрат получим $4R^2 + 2(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\overrightarrow{OD}) \geq 0$. Но $2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c_1^2$, $2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC} = 2R^2 - b_1^2$, $2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OD} = 2R^2 - a^2$, $2\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a_1^2$, $2\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OD} = 2R^2 - b^2$, $2\overrightarrow{OC}\overrightarrow{OD} = 2R^2 - c^2$, тогда $4R^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ или

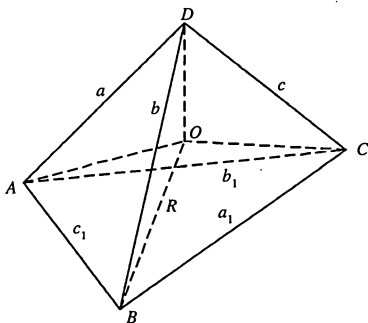


Рис. 7.155

$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 4R^2$. Знак равенства имеет место в случае $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3\overline{OG}$, где G — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. **QED.**

7.240. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1$) с ребром a . Точка E — середина ребра $B_1 C_1$. Найти радиус сферы, проходящей через точки A_1, E, C_1, C .

Решение.

Выберем систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы в ней точки A_1, C_1, C, E имели координаты $A_1(a; 0; a)$, $C_1(0; a; a)$, $C(0; a; 0)$, $E\left(\frac{1}{2}a; a; a\right)$ (рис. 7.156). Радиус сферы ($M; R$) можно найти как расстояние от центра $M(x; y; z)$ до одной из ее точек. Следовательно, задача сводится к отысканию координат x, y, z центра M . Из определения сферы следует, что $MC_1 = MC$, $ME = MC_1$ и $ME = MA_1$. Значит, координаты точки M должны удовлетворять системе трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = x^2 + (y-a)^2 + z^2, \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = x^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2, \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = (x-a)^2 + y^2 + (z-a)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{a}{2}, \\ x = \frac{a}{4}, \\ x - 2y = -\frac{a}{4}. \end{cases}$$

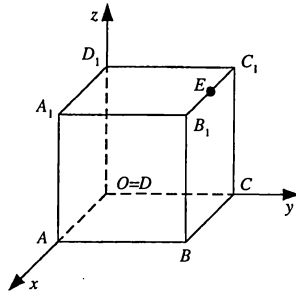


Рис. 7.156

Тройка чисел $\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right)$, являющаяся решением системы, — это координаты центра M . Применяя формулу расстояния между двумя точками, находим $R = MC = \frac{\sqrt{14}}{4}a$.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}a$.

7.241. E — вершина правильной четырехугольной пирамиды $EABCD$. Длины всех ее ребер равны a . Через точку A и точку M ребра EC проведена плоскость α , перпендикулярная к плоскости EAC . Найти объем четырехугольной пирамиды, отсекаемой этой плоскостью α от данной пирамиды, если $ME = b$.

Решение.

Нетрудно доказать, что плоскость α пересекает высоту EO пирамиды в точке $R = EO \cap \alpha$, а плоскость EDB — по прямой NK , параллельной DB (рис. 7.157). Отсеченную четырехугольную пирамиду $EAKNM$ можно представить как объединение двух конгруэнтных треугольных пирамид $KEAM$ и $NEAM$ с общим основанием EAM . Высотами этих пирамид являются конгруэнтные отрезки KR и NR . Следовательно, искомый объем V равен двум объемам пирамиды $KEAM$:

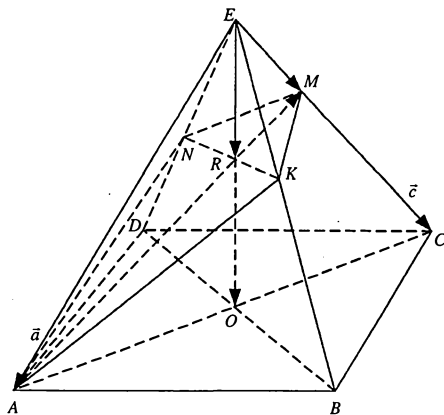


Рис. 7.157

$V = \frac{2}{3} S_{\triangle EKM} \cdot KR$. Из условия задачи следует, что угол AEC — прямой ($\triangle ABC = \triangle AEC$ по трем сторонам, тогда $\angle B = \angle E = 90^\circ$). Значит, $S_{\triangle EKM} = \frac{1}{2} AE \cdot EM = \frac{1}{2} ab$. Для вычисления длины отрезка KR необходимо знать, в каком отношении точка R делит высоту EO данной пирамиды. Ответить на этот вопрос можно с помощью векторов. Пусть $\vec{EA} = \vec{a}$, $\vec{EC} = \vec{c}$, $|\vec{a}| = |\vec{c}| = a$. Тогда $\vec{ER} = l\vec{EO} = \frac{l}{2}(\vec{EA} + \vec{EC}) = \frac{l}{2}\vec{a} + \frac{l}{2}\vec{c}$. С другой стороны, $R \in AM$, т.е. $\vec{ER} = k\vec{EA} + (1-k)\vec{EM} = k\vec{a} + (1-k)\frac{b}{a}\vec{c}$. Поскольку векторы \vec{a} , \vec{c} , \vec{ER} компланарны, а \vec{a} , \vec{c} неколлинеарны, то из двух

последних равенств следует, что $\begin{cases} \frac{l}{2} = k, \\ \frac{l}{2} = (1-k)\frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow l = \frac{2b}{a+b}$.

Значит, $\vec{ER} = \frac{2b}{a+b}\vec{EO}$, $\frac{ER}{EO} = \frac{2b}{a+b}$. Из подобия треугольников ERK и EOB находим: $RK = \frac{ER}{EO} \cdot OB = \frac{2b}{a+b} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Тогда объем пирамиды $EAKMN = V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} = \frac{a^2b^2\sqrt{2}}{3(a+b)}$ (куб. ед.).

Ответ: $\frac{a^2b^2\sqrt{2}}{3(a+b)}$ (куб. ед.).

7.242. Дан тетраэдр $ABCD$, высоты которого пересекаются в одной точке H . Доказать истинность векторного равенства $\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$, где O — центр сферы, описанной около тетраэдра.

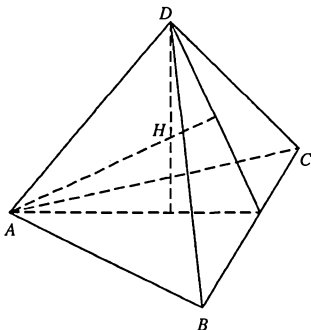


Рис. 7.158

Решение.

Если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то противоположные ребра тетраэдра, как легко доказать, попарно перпендикулярны; верно и обратное утверждение. Следовательно, $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$, $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$ (рис. 7.158). Кроме того, $\vec{OB}^2 - \vec{OC}^2 = 0$. Отсюда находим, что $(\vec{OH} - \vec{OA}) \cdot \vec{BC} = 0$, $(\vec{OD} - \vec{OA}) \cdot \vec{BC} = 0$, $(\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{BC} = 0$. Умножив первое из этих равенств на 2 и вычтя из него два других, получим $(2\vec{OH} - \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} - \vec{OD}) \cdot \vec{BC} = 0$ или $\vec{x} \cdot \vec{BC} = 0$, где $\vec{x} = 2\vec{OH} - \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} - \vec{OD}$. Аналогично находим, что $\vec{x} \cdot \vec{BA} = 0$, $\vec{x} \cdot \vec{BD} = 0$. Так как векторы \vec{BA} , \vec{BC} , \vec{BD} некопланарны, то $\vec{x} = \vec{0}$, отсюда следует, что $\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$. QED.

7.243. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD конгруэнтные и перпендикулярные. Остальные ребра (BC , CA , AD , DB) разделены по обходу ломаной $BCAD$ соответственно точками P , Q , R , S в равных отношениях. Доказать, что отрезки PR и QS также конгруэнтные и перпендикулярные. Верно ли обратное утверждение?

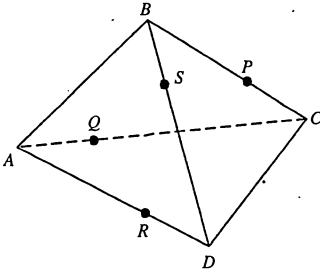


Рис. 7.159

Решение.

Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ (рис. 7.159). Согласно условию задачи, имеем: $\vec{a}^2 = \vec{c}^2$, $\vec{a}\vec{c} = 0$, $BP:BC = CQ:CA = AR:AD = DS:DB = k$. Отсюда, как легко проверить, $\vec{p} = \overrightarrow{PR} = (k-1)\vec{a} + k\vec{c}$, $\vec{q} = \overrightarrow{QS} = k\vec{a} + (1-k)\vec{c}$, (1) а тогда $\vec{p}^2 = \vec{q}^2$, $\vec{p}\vec{q} = 0$. (2) Обратно, пусть выполняется (2). Из равенств (1) выражаем \vec{a} , \vec{c} через \vec{p} , \vec{q} : $m\vec{a} = (k-1)\vec{p} + k\vec{q}$, $m\vec{c} = k\vec{p} + (1-k)\vec{q}$, (3) где $m = 2k^2 - 2k + 1 > 0$. Снова легко проверить, что из равенств (3) при соблюдении условий (2) следует: $(m\vec{a})^2 = (m\vec{c})^2$, $(m\vec{a})(m\vec{c}) = 0$, т.е. $m\vec{a} = m\vec{c}$, $\vec{a}\vec{c} = 0$, или $AB = CD$, $AB \perp CD$. Итак, верно и обратное утверждение. **QED.**

7.244. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка $M \in AB$, через которую проведены прямые l_1 и l_2 , параллельные медианам AA_1 и BB_1 тетраэдра и пересекающие грани BCD и ACD соответственно в точках P и Q . Доказать, что $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MG}$, где G — точка пересечения медиан тетраэдра.

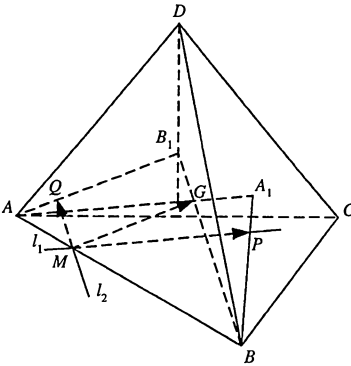


Рис. 7.160

Решение.

Прямые l_1 и l_2 , параллельные медианам AA_1 и BB_1 тетраэдра, пересекут грани BCD и ACD соответственно в точках P и Q (рис. 7.160), лежащих на прямых A_1B и AB_1 . Учитывая, что $MP \parallel AA_1$ и $MQ \parallel BB_1$, имеем:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{MB}{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1}, \quad \overrightarrow{MQ} = \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{BB_1}. \quad \text{Отсюда} \quad \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{MB}{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{BB_1}. \quad (1)$$

Известно, что $G = AA_1 \cap BB_1$ и $\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BG}$, поэтому из равенства (1) получим $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{BM}{AB} \cdot \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{MA}{AB} \cdot \frac{4}{3}\overrightarrow{BG} = \frac{4}{3} \left(\frac{BM}{AB} \cdot \overrightarrow{AG} + \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{BG} \right)$. Так как точки A, B, M лежат на одной прямой, то $\frac{BM}{AB} \cdot \overrightarrow{AG} + \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GM}$.

$$\text{Следовательно, } \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{GM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MG}.$$

QED.

7.245. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Доказать, что диагонали AB_1 , BC_1 , CA_1 боковых граней не могут быть параллельными одной плоскости.

Решение.

Введем базисные векторы: $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ (рис. 7.161). Тогда $\overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BC_1} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CA_1} = \vec{a} - \vec{c}$. Если бы диагонали AB_1 , BC_1 , CA_1 были параллельны плоскости, то векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ были бы компланарными. Но этого быть не может. Действительно, пусть векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ компланарны. Тогда выполняется равенство $\overrightarrow{AB_1} = x\overrightarrow{BC_1} + y\overrightarrow{CA_1}$ или $\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) + y(\vec{a} - \vec{c})$. Учитывая единственность разложения вектора по базисным век-

торам, имеем $\begin{cases} x + y = 1, \\ x = -1, \\ x - y = 0. \end{cases}$ Легко видеть, что полученная система несовместна, т.е. не имеет решения. Таким обра-

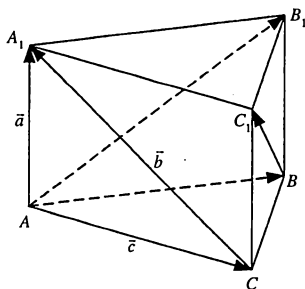


Рис. 7.161

зом, векторы $\overline{AB_1}$, $\overline{BC_1}$, $\overline{CA_1}$ некомпланарные, т.е. диагонали AB_1 , BC_1 , CA_1 не могут быть параллельны одной плоскости. **QED.**

7.246. Противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ попарно конгруэнтны: $AB = DC = c$, $BC = DA = a$, $CA = DB = b$. Доказать, что зависимость $a^2 + c^2 = 3b^2$ является необходимой и достаточной, чтобы медианы AA_1 и CC_1 тетраэдра были перпендикулярны (A_1 и C_1 — точки пересечения медиан граней BCD и DAB).

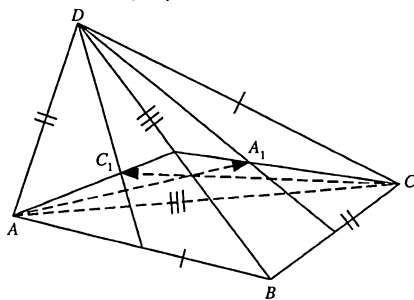


Рис. 7.162

Решение.

Имеем (рис. 7.162): $\overline{AA_1} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})$ (см. 7.012),

$\overline{CC_1} = \overline{AC_1} - \overline{AC} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AD}) - \overline{AC}$. Следовательно, $9\overline{AA_1}\overline{CC_1} =$

$= (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})(\overline{AB} + \overline{AD} - 3\overline{AC})$ или $9\overline{AA_1}\overline{CC_1} = (\overline{AB} + \overline{AD})^2 -$

$- 2(\overline{AB} + \overline{AD})\overline{AC} - 3\overline{AC}^2$. Отсюда $9\overline{AA_1}\overline{CC_1} = c^2 + a^2 + a^2 + c^2 -$

$- b^2 - (b^2 + c^2 - a^2) - (a^2 + b^2 - c^2) - 3b^2$ или $9\overline{AA_1}\overline{CC_1} =$

$= 2(a^2 + c^2 - 3b^2)$. Медианы AA_1 и CC_1 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\overline{AA_1}\overline{CC_1} = 0$ или $a^2 + c^2 = 3b^2$. **QED.**

7.247. Плоские углы четырехугольного угла равны по 60° . Найти зависимость между косинусами углов диагональных сечений этого четырехгранного угла.

Решение.

Отложим от вершины S четырехгранного угла вдоль его ребер единичные векторы \overline{SA} , \overline{SB} , \overline{SC} , \overline{SD} . Пусть $\alpha = \angle ASC$,

$\beta = \angle BSD$. Очевидно, $\overline{SA}\overline{SB} = \overline{SB}\overline{SC} = \overline{SC}\overline{SD} = \overline{SD}\overline{SA} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\overline{SA}\overline{SC} = \cos \alpha = x$, $\overline{SB}\overline{SD} = \cos \beta = y$. Разложим вектор

\overline{SD} по векторам \overline{SA} , \overline{SB} , \overline{SC} : $\overline{SD} = p\overline{SA} + q\overline{SB} + r\overline{SC}$. (1) Составим систему уравнений, умножив равенство (1) скалярно

на $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = p + \frac{1}{2}q + rx, \\ y = \frac{1}{2}p + q + \frac{1}{2}r, \\ \frac{1}{2} = px + \frac{1}{2}q + r, \\ 1 = \frac{1}{2}p + qy + \frac{1}{2}r. \end{cases}$$

Исключив из системы уравнений параметры p, q, r и учитывая, что $y = \cos\beta \neq 1$,

$x = \cos\alpha \neq 1$, получим $(x+1)(y+1) = 1$ или $(\cos\alpha+1)(\cos\beta+1) = 1$.

Отсюда $4\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\beta}{2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, где α и β — углы диагональных сечений четырехгранного угла.

7.248. Пусть X — произвольная точка пространства. Рассмотрим треугольник ABC , возьмем на сторонах CA и CB соответственно точки B_1 и A_1 , которые делят стороны в отношении $CB_1 : B_1A = p$, $CA_1 : A_1B = q$. Обозначим $AA_1 \cap BB_1 = Y$.

Доказать, что имеет место в этом случае формула $\overline{XY} = \frac{p\overline{XA} + q\overline{XB} + \overline{XC}}{p+q+1}$.

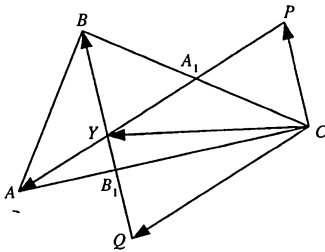


Рис. 7.163

Решение.

Рассмотрим векторы $\overline{CQ}, \overline{CP}$, сонаправленные соответственно векторам $\overline{YA}, \overline{YB}$, такие, что $\overline{CY} = \overline{CQ} + \overline{CP}$ (рис. 7.163). Из подобия треугольников AYB_1 и B_1CQ , BA_1Y и A_1PC получаем $\overline{CY} = p\overline{YA} + q\overline{YB}$. Так как $\overline{CY} = \overline{CX} + \overline{XY}$, то $p\overline{YA} + q\overline{YB} = \overline{CX} + \overline{XY}$. Но $\overline{YA} = \overline{YX} + \overline{XA}$, $\overline{YB} = \overline{YX} + \overline{XB}$, а потому $p(\overline{YX} + \overline{XA}) + q(\overline{YX} + \overline{XB}) = \overline{CX} + \overline{XY}$ или $\overline{XY}(p+q+1) = p\overline{XA} + q\overline{XB} + \overline{XC}$, откуда $\overline{XY} = \frac{p\overline{XA} + q\overline{XB} + \overline{XC}}{p+q+1}$. (*)

QED.

7.249. Доказать, что в тетраэдре $DABC$:

- отрезки, соединяющие вершины пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке M ;
- если X — произвольная точка пространства, то $\overline{XM} = \frac{1}{4}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD})$;
- каждый из отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, делится точкой M в отношении 3:1, считая от вершины;
- $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \vec{0}$.

Решение.

а) Обозначим точки пересечения медиан граней тетраэдра $DABC$ соответственно через M_1, M_2, M_3, M_4 (рис. 7.164) и предположим, что отрезки, соединяющие вершины пирамиды с точками M_1, M_2, M_3, M_4 , не пересекаются в одной точке. Пусть $DM_1 \cap AM_2 = Q$. Введем обозначения: $AM_1 \cap BC = A_1$, $BM_1 \cap AC = B_1$. По свойству медиан AA_1 и DA_1 запишем, что $A_1M_1 : M_1A = 1:2 = p$, $A_1M_2 : M_2D = 1:2 = q$. Теперь по формуле (*) задачи 7.248 для произвольной точки X пространства

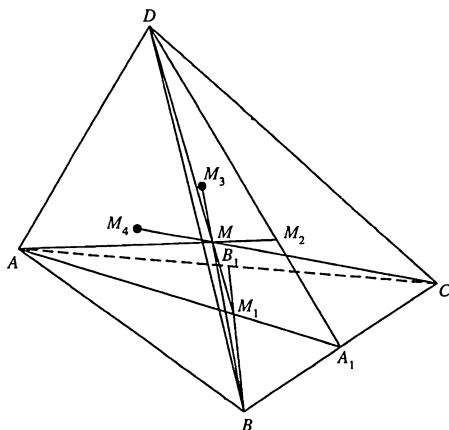


Рис. 7.164

(так как $\vec{M_1A} + \vec{M_1B} + \vec{M_1C} = \vec{0}$, см. 7.009). Значит, $\vec{DM} = 3\vec{MM_1}$.

г) Пусть $X = M$, тогда $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$.

QED.

7.250. Дана треугольная пирамида $SABC$. Через точки M и N , определяемые условием $\vec{SM} = \frac{1}{3}\vec{SA}$ и $\vec{SN} = \frac{1}{2}\vec{SB}$, проведем плоскость, параллельную медиане основания BD . Доказать, что эта плоскость проходит через вершину C .

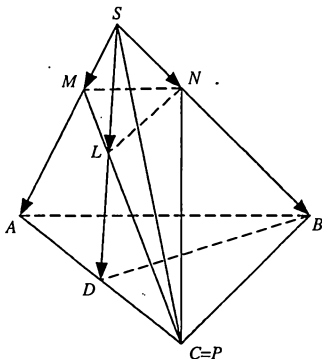


Рис. 7.165

Решение.

Искомая плоскость параллельна медиане BD основания и поэтому должна пересечь $\triangle SBD$ по средней линии NL (рис. 7.165). Пусть $ML \cap SC = P$, тогда плоскость MNP удовлетворяет условию задачи.

Четыре точки M, N, L, P по условию задачи лежат в одной плоскости. Следовательно, будут истинными следующие равенства: $\vec{SP} = \alpha\vec{SM} + \beta\vec{SN} + \gamma\vec{SL}$ и $\alpha + \beta + \gamma = 1$. (1) В качестве базиса примем векторы $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SD} = \vec{d}$. Разложим каждый вектор, входящий в равенство (1), по выбранному базису: $\vec{SM} = \frac{1}{3}\vec{SA} = \frac{1}{3}\vec{a}$, $\vec{SN} = \frac{1}{2}\vec{SB} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{SL} = \frac{1}{2}\vec{SD} = \frac{1}{2}\vec{d}$. (2) Остается выполнить разложение вектора \vec{SP} . Пусть $\vec{SP} = x\vec{SC}$. Для того чтобы получить разложение вектора \vec{SC} , используем равенство $2\vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC}$, из которого следует, что $\vec{SC} = 2\vec{d} - \vec{a}$. Теперь будем иметь $\vec{SP} = x(2\vec{d} - \vec{a})$. (3) Подставив в (1) вместо \vec{SP} , \vec{SM} , \vec{SN} , \vec{SL} их выражения из (2) и (3), получим:

$-\alpha\vec{a} + 2x\vec{d} = \frac{\alpha}{3}\vec{a} + \frac{\beta}{2}\vec{b} + \frac{\gamma}{2}\vec{d}$. Из последнего равенства следует, что $-\alpha = \frac{\alpha}{3}$, $\beta = 0$, $\frac{\gamma}{2} = 2x$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 1$, то $-3x + 4x = 1 \Rightarrow x = 1$. Отсюда следует, что $\vec{SP} = \vec{SC}$, а значит $P = C$, т.е. проведенная плоскость проходит через вершину C .

QED.

$$\text{имеем } \vec{XQ} = \frac{\vec{XA_1} + \vec{XA} \cdot \frac{1}{2} + \vec{XD} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\vec{XA} + \vec{XD} + 2\vec{XA_1}) =$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC} + \vec{XD}). \text{ Обозначим теперь } BM_3 \cap AM_2 = L,$$

$$\text{тогда } \vec{XL} = \frac{\vec{XB_1} + \vec{XD} \cdot \frac{1}{2} + \vec{XB} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC} + \vec{XD}).$$

Это значит, что $\vec{XQ} = \vec{XL} = \vec{XM}$, т.е. $Q = L = M$.

б) Теперь очевидно, что $\vec{XM} = \frac{1}{4}(\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC} + \vec{XD})$. (1)

в) Пусть в формуле (1) $X = M_1$, тогда $\vec{M_1M} = \frac{1}{4}(\vec{M_1A} + \vec{M_1B} + \vec{M_1C} + \vec{M_1D}) = \frac{1}{4}(\vec{M_1A} + \vec{M_1B} + \vec{M_1C}) + \frac{1}{4}\vec{M_1D} = \frac{1}{4}\vec{M_1D}$

7.251. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$. На боковых ребрах SA , SB и SC этой пирамиды даны точки M , N и P такие, что $SM:MA = 2:1$, $SN:NB = 3:1$, $SP:PC = 1:1$. В каком отношении делится ребро SD точкой пересечения его с плоскостью MNP ?

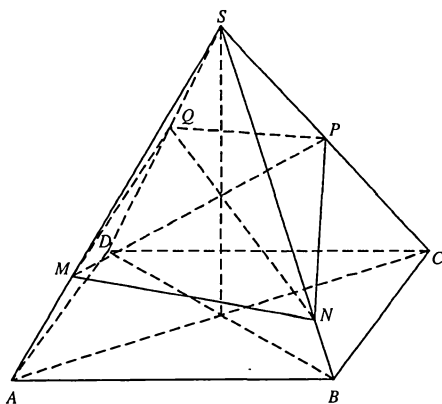


Рис. 7.166

Решение.

Пусть плоскость MNP пересекает ребро SD в точке Q (рис. 7.166). Запишем необходимое и достаточное условие принадлежности четырех точек M , N , P и Q одной плоскости:

$\vec{SQ} = \alpha \vec{SM} + \beta \vec{SN} + (1 - \alpha - \beta) \vec{SP}$. (1) За базис в данной задаче примем тройку некопланарных векторов $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SC} = \vec{c}$. Выполним разложение каждого вектора, входящего в равенство (1), по введенному выше базису. По условию задачи $\vec{SM} = \frac{2}{3} \vec{SA}$, $\vec{SN} = \frac{3}{4} \vec{SB}$, $\vec{SP} = \frac{1}{2} \vec{SC}$. Допустим, что

$\vec{SQ} = x \vec{SD}$, тогда (1) можно записать в виде $x \vec{SD} = \frac{2}{3} \alpha \vec{a} + \frac{3}{4} \beta \vec{b} + (1 - \alpha - \beta) \frac{1}{2} \vec{c}$. (2) Если O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, то $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO}$ или

$\vec{SD} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$. (3) Из равенств (2) и (3) следует, что $x(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) = \frac{2}{3} \alpha \vec{a} + \frac{3}{4} \beta \vec{b} + (1 - \alpha - \beta) \frac{1}{2} \vec{c}$. Отсюда получаем систему

трех уравнений первой степени с тремя неизвестными:
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \alpha, \\ x = \frac{1 - \alpha - \beta}{2}, \Rightarrow \alpha = \frac{9}{13}, \beta = -\frac{8}{13}, x = \frac{6}{13}. \text{ Итак, } SQ:QD = \frac{6}{7}. \\ -x = \frac{3}{4} \beta \end{cases}$$

Ответ: $\frac{6}{7}$.

7.252. В пространстве даны сфера и k точек A_1, A_2, \dots, A_k ($k > 1$). Для каждой точки M сферы строится точка N такая, что $\vec{MN} = \vec{MA}_1 + \vec{MA}_2 + \dots + \vec{MA}_k$. Найти множество точек M .

Решение.

Пусть O — произвольная точка. Применим правило многоугольника: $\vec{MN} = \vec{MO} + \vec{OA}_1 + \vec{MO} + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{MO} + \vec{OA}_k = k\vec{MO} + (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_k)$. Если $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_k = \vec{OO}_1$, то $\vec{MN} = k\vec{MO} + \vec{OO}_1$ или $\vec{MO} + \vec{ON} = k\vec{MO} + \vec{OO}_1$, $\vec{ON} - \vec{OO}_1 = (k-1)\vec{MO}$. Отсюда $\vec{O_1N} = (1-k)\vec{OM}$. Если O — центр сферы, то для каждой точки M сферы $OM = R$, поэтому $O_1N = |k-1|R$. Таким образом, искомое множество точек N есть сфера радиуса $(k-1)R$ с центром в точке O_1 .

7.253. В тетраэдре $ABCD$ из двух его вершин к противоположным граням проведены перпендикуляры, пересекающиеся в точке Q . Доказать, что перпендикуляры к плоскостям двух других граней, проведенные через точку O , пересекают их в ортоцентре.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр (рис. 7.167), $AE \perp (CDB)$, $CF \perp (ADB)$ и $AE \cap CF = O$. Через точку O проведем перпендикуляры к граням ABC и ADC : $OH_1 \perp (ABC)$, $H_1 \in (ABC)$, $OH_2 \perp (ADC)$, $H_2 \in (ADC)$. Так как $AE \perp (CDB)$, $OH_1 \perp (ABC)$, то $\vec{AO} \vec{CB} = 0$ и

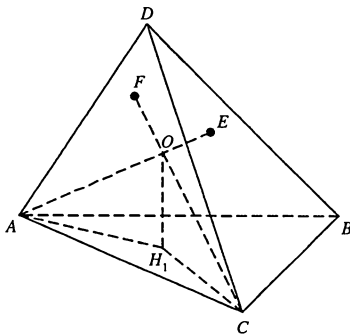


Рис. 7.167

$\overline{OH_1} \perp \overline{CB} = 0$. Отсюда $\overline{AO} \perp \overline{CB} + \overline{OH_1} \perp \overline{CB} = 0 \Rightarrow \overline{AH_1} \perp \overline{CB} = 0 \Rightarrow \overline{AH_1} \perp \overline{CB}$. Аналогично, $\overline{CO} \perp \overline{AB} = 0$, $\overline{OH_1} \perp \overline{AB} = 0 \Rightarrow \overline{CH_1} \perp \overline{AB} = 0 \Rightarrow \overline{CH_1} \perp \overline{AB}$. Итак, $\overline{AH_1} \perp \overline{CB}$ и $\overline{CH_1} \perp \overline{AB}$. Это значит, что точка H_1 является ортоцентром $\triangle ABC$. Доказательство того, что H_2 — ортоцентр $\triangle ADC$, аналогично. **QED.**

7.254. Длины ребер тетраэдра $ABCD$ равны a, b, c, m, n, k . Найти расстояние от вершины A до точки пересечения медиан грани BCD .

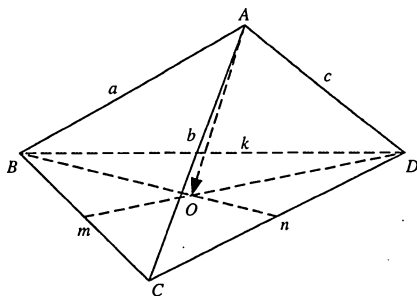


Рис. 7.168

Решение.

Пусть O — точка пересечения медиан грани BCD (рис. 7.168). Обозначим $\angle BAC = \varphi_1$, $\angle CAD = \varphi_2$, $\angle DAB = \varphi_3$. Воспользуемся равенством $\overline{AO} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})$ (см. 7.014). Отсюда

$$\overline{AO}^2 = \frac{1}{9}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})^2 \quad \text{или} \quad \overline{AO}^2 = \frac{1}{9}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + 2|\overline{AB}||\overline{AC}|\cos\varphi_1 + 2|\overline{AC}||\overline{AD}|\cos\varphi_2 + 2|\overline{AD}||\overline{AB}|\cos\varphi_3).$$

Последнее равенство перепишем так: $\overline{AO}^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\varphi_1 + 2bc\cos\varphi_2 + 2ac\cos\varphi_3)$. По теореме косинусов

$$2ab\cos\varphi_1 = a^2 + b^2 - m^2, \quad 2bc\cos\varphi_2 = b^2 + c^2 - n^2, \quad 2ac\cos\varphi_3 = a^2 + c^2 - k^2. \quad \text{Отсюда} \quad \overline{AO}^2 = \frac{1}{9}(3(a^2 + b^2 + c^2) - (m^2 + n^2 + k^2)).$$

Следовательно, $AO = \frac{1}{3}(3(a^2 + b^2 + c^2) - (m^2 + n^2 + k^2))^{\frac{1}{2}}$.

Ответ: $\frac{1}{3}(3(a^2 + b^2 + c^2) - (m^2 + n^2 + k^2))^{\frac{1}{2}}$.

7.255. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ длины всех ребер равны a , величина плоского угла BCD равна 60° . Доказать, что $C_1 B^2 + C_1 D^2 = C_1 A^2$.

Решение.

Рассмотрим векторы $\overline{C_1 B}$, $\overline{C_1 D}$: $\overline{C_1 B} = \overline{C_1 C} + \overline{CB}$, $\overline{C_1 D} = \overline{C_1 C} + \overline{CD}$ (рис. 7.169). Тогда $C_1 B^2 = 2a^2 + 2\overline{C_1 C} \cdot \overline{CB}$, $C_1 D^2 = 2a^2 + 2\overline{C_1 C} \cdot \overline{CD}$. Из двух последних равенств следует $C_1 D^2 + C_1 B^2 = 4a^2 + 2\overline{C_1 C}(\overline{CB} + \overline{CD})$. (1) Воспользовавшись пра-

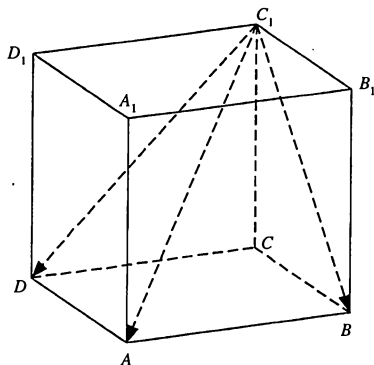


Рис. 7.169

вилем параллелепипеда, запишем $\overline{C_1A} = \overline{C_1D_1} + \overline{C_1B_1} + \overline{C_1C}$. Отсюда $C_1A^2 = 3a^2 + 2\overline{C_1C}(\overline{C_1B_1} + \overline{C_1D_1}) + 2\overline{C_1D_1}\overline{C_1B_1}$. (2) Поскольку $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1 = 60^\circ$, то $\cos \angle BCD = \cos \angle B_1C_1D_1 = \frac{1}{2}$. Поэтому равенство (2) примет вид $C_1A^2 = 4a^2 + 2\overline{C_1C}(\overline{C_1B_1} + \overline{C_1D_1})$. (3) В (1) и (3) $\overline{CB} = \overline{C_1B_1}$, $\overline{CD} = \overline{C_1D_1}$. Следовательно, правые части этих равенств равны, поэтому $C_1B^2 + C_1D^2 = C_1A^2$. **QED.**

7.256. Диагональ DB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ образует с ребрами AD и DC углы по 60° . Какой угол она образует с ребром DD_1 ?

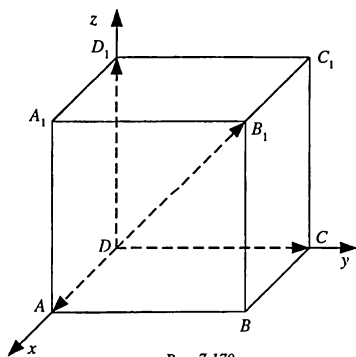


Рис. 7.170

Решение.

Зададим пространственную прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 7.170. Обозначим $DA = a$, $DC = b$, $DD_1 = AA_1 = c$, тогда $\overline{DB_1}(a; b; c)$, $\overline{DD_1}(0; 0; c)$. Пусть $\angle D_1DB_1 = x$, то

$$\cos x = \frac{\overline{DD_1} \cdot \overline{DB_1}}{|\overline{DD_1}| |\overline{DB_1}|} = \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + c^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (1)$$

Поскольку параллелепипед прямоугольный, запишем

$$AD = a = DB_1 \cos 60^\circ = \frac{DB_1}{2}, \quad (2)$$

$$DC = b = DB_1 \cos 60^\circ = \frac{DB_1}{2}, \quad (3)$$

$$D_1D = c = DB_1 \cos x. \quad (4)$$

Из равенств (1) — (4) имеем: $\cos x = \frac{DB_1 \cos x}{\sqrt{\frac{1}{2} DB_1^2 + DB_1^2 \cos^2 x}}$. Тогда

$1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \cos^2 x}}$. Возведя в квадрат обе части последнего равенства и выполнив очевидные преобразования, получим

$$\frac{1}{2} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}. \quad \text{Отсюда, учитывая, что } x \text{ меньше } 90^\circ, \text{ запишем } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

7.257. Один из плоских углов при вершине треугольной пирамиды прямой, высота пирамиды проходит через точку пересечения высот основания. Найти величины остальных плоских углов при вершине пирамиды.

Решение.

Пусть дана пирамида $MABC$ (рис. 7.171), в которой $\angle AMB = 90^\circ$, $MO \perp (ABC)$, где O — точка пересечения высот AF , BK , CD основания ABC . Рассмотрим векторы \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{MC} , \overrightarrow{CB} . Из условия имеем: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, но $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$, поэтому $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) = 0$ или $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. (1) Докажем, что $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. По условию $BC \perp AO$. По теореме о трех перпендикулярах $BC \perp MA$. Следовательно, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$; отсюда и из (1) получаем, что $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MC}$, т.е. $\angle AMC$ — прямой. Аналогично можно показать, что $\angle BMC$ — прямой.

Ответ: по 90° .

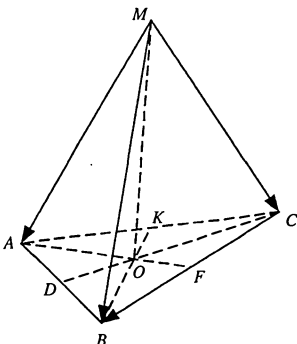


Рис. 7.171

7.258. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, в которой боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α , точка K — середина ребра BS . Найти угол φ между прямыми AK и SC .

Решение.

Выберем систему координат так, как показано на рис. 7.172. По условию $\angle SCO = \alpha$. Обозначим $SC = m$, тогда $OC = OA = OB = m \cos \alpha$, $SO = m \sin \alpha$. Пусть $\overrightarrow{AK}(x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{SC}(x_2; y_2; z_2)$. Определим координаты вершин S, C, B, A : $S(0; 0; m \sin \alpha)$, $C(m \cos \alpha; 0; 0)$, $B(m \cos \alpha; 0; 0)$, $A(0; -m \cos \alpha; 0)$. Отсюда $\overrightarrow{SC}(0; m \cos \alpha; -m \sin \alpha)$, $\overrightarrow{AB}(m \cos \alpha; m \cos \alpha; 0)$, $\overrightarrow{AS}(0; m \cos \alpha; m \sin \alpha)$. Далее, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS})$, $\overrightarrow{AK}\left(\frac{m \cos \alpha}{2}; m \cos \alpha; \frac{m \sin \alpha}{2}\right)$. Из того, что φ — угол между скрещивающимися прямыми, следует, что $0 < \varphi \leq 90^\circ$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{SC}|}{|\overrightarrow{AK}| |\overrightarrow{SC}|} = \frac{\left| m^2 \cos^2 \alpha - \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{2} \right|}{\sqrt{m^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \sqrt{\frac{1}{4} m^2 (\cos^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}} = \frac{|1 - 3 \cos^2 \alpha|}{\sqrt{1 + 4 \cos^2 \alpha}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{|1 - 3 \cos^2 \alpha|}{\sqrt{1 + 4 \cos^2 \alpha}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{|1 - 3 \cos^2 \alpha|}{\sqrt{1 + 4 \cos^2 \alpha}}.$

7.259. Дан косой четырехугольник $ABCD$, у которого $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$. Доказать, что $AD = BC$, $BD = AC$.

Решение.

Имеем (рис. 7.173): $\cos \angle A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}|}$, $\cos \angle B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|}$. Поскольку $\angle A = \angle B$, то $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$. (1) Аналогично, $\frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DA}|}$. (2) Примем произвольную точку O за начало векторов. Из (1) и (2) следует: $\frac{(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})}{|\overrightarrow{AD}|} =$

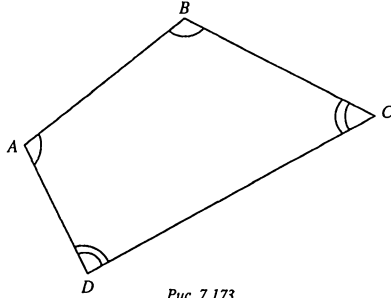


Рис. 7.173

$$= \frac{(\overline{OA} - \overline{OB})(\overline{OC} - \overline{OD})}{|\overline{BC}|}, \quad (3) \text{ Из (3) и (4) получаем } \frac{1}{|\overline{AD}|} (\overline{OBOD} - \overline{OB OA} - \overline{OA OD} + \overline{OA}^2) = \frac{1}{|\overline{CB}|} (\overline{OBOD} - \overline{OB OC} - \overline{OC OD} + \overline{OC}^2), \quad (5) \quad \frac{1}{|\overline{CB}|} (\overline{OBOD} - \overline{OB OC} - \overline{OC OD} + \overline{OC}^2) = \frac{1}{|\overline{DA}|} (\overline{OA OC} - \overline{OA OD} - \overline{OD OC} + \overline{OD}^2). \quad (6) \text{ После почленного сложения}$$

равенств (5) и (6) приходим к равенству $\frac{(\overline{OA} - \overline{OD})^2 + \overline{OA OC} - \overline{OD OC} + \overline{OB OD} - \overline{OB OA}}{|\overline{AD}|} = \frac{(\overline{OB} - \overline{OC})^2 + \overline{OA OC} - \overline{OA OB} + \overline{OB OD} - \overline{OC OD}}{|\overline{CB}|}$, из которого после несложных преобразований следует, что

$$|\overline{AD}| + \frac{(\overline{OC} - \overline{OB})(\overline{OA} - \overline{OD})}{|\overline{AD}|} = |\overline{BC}| + \frac{(\overline{OC} - \overline{OB})(\overline{OA} - \overline{OD})}{|\overline{CB}|}. \text{ Отсюда } (|\overline{AD}| - |\overline{BC}|) \left(1 - \frac{\overline{CB DA}}{|\overline{BC}| |\overline{AD}|} \right) = 0. \text{ Но векторы } \overline{BC} \text{ и } \overline{DA}$$

неколлинеарные, поэтому $\overline{BC DA} \neq \overline{BC AD}$. Следовательно, $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$. Из конгруэнтности $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ следует $AC = BD$. QED.

7.260. Куб с ребром a спроектирован параллельно прямой l на плоскость. Вычислить сумму квадратов проекций всех ребер куба на данную плоскость, если прямая l образует с плоскостью проекций угол φ .

Решение.

Найдем сумму квадратов проекций трех ребер OA , OB , OC . Пусть плоскость проекций α проходит через O, A_1, B_1, C_1 — проекции точек A, B, C на плоскость α (проектируем параллельно l) и пусть \vec{n} — единичный нормальный вектор плоскости, а \vec{e} — единичный направляющий вектор прямой l (рис. 7.174). Тогда (для краткости, например, вместо $\overline{OA_1}$ употребляется запись $\overline{A_1}$)

$$\begin{cases} \overline{A_1} = \vec{A} + p_1 \vec{e}, \\ \overline{B_1} = \vec{B} + p_2 \vec{e}, \\ \overline{C_1} = \vec{C} + p_3 \vec{e}. \end{cases} \quad (1)$$

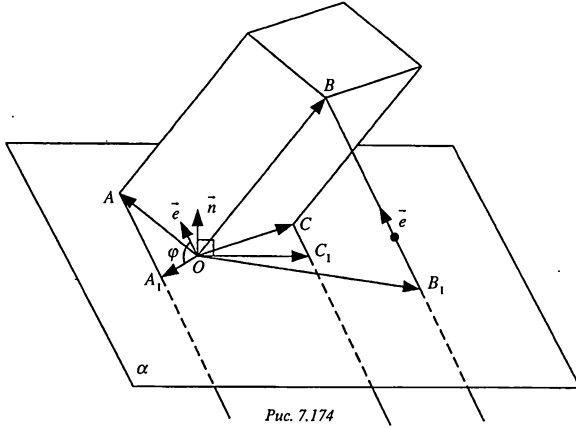


Рис. 7.174

Умножив равенства (1) скалярно на \vec{n} , получим $\vec{n}\vec{A} + p_1\vec{e}\vec{n} = 0$, $\vec{n}\vec{B} + p_2\vec{e}\vec{n} = 0$, $\vec{n}\vec{C} + p_3\vec{e}\vec{n} = 0$. Отсюда $p_1 = -\frac{\vec{n}\vec{A}}{\vec{n}\vec{e}}$,

$p_2 = -\frac{\vec{n}\vec{B}}{\vec{n}\vec{e}}$, $p_3 = -\frac{\vec{n}\vec{C}}{\vec{n}\vec{e}}$. (2) Найденные значения p_1, p_2, p_3 подставим в (1): $\vec{A}_1 = \vec{A} - \frac{\vec{n}\vec{A}}{\vec{n}\vec{e}} \cdot \vec{e}$, $\vec{B}_1 = \vec{B} - \frac{\vec{n}\vec{B}}{\vec{n}\vec{e}} \cdot \vec{e}$, $\vec{C}_1 = \vec{C} - \frac{\vec{n}\vec{C}}{\vec{n}\vec{e}} \cdot \vec{e}$. Тогда

$$OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 + \vec{C}^2 + \frac{(\vec{n}\vec{A})^2 + (\vec{n}\vec{B})^2 + (\vec{n}\vec{C})^2}{(\vec{n}\vec{e})^2} - 2 \frac{(\vec{n}\vec{A})(\vec{A}\vec{e}) + (\vec{n}\vec{B})(\vec{B}\vec{e}) + (\vec{n}\vec{C})(\vec{C}\vec{e})}{\vec{n}\vec{e}}. \text{ Но } \frac{(\vec{n}\vec{A})^2 + (\vec{n}\vec{B})^2 + (\vec{n}\vec{C})^2}{(\vec{n}\vec{e})^2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \angle(\vec{n}, \vec{e})} ((a \cos \angle(\vec{A}; \vec{n}))^2 + (a \cos \angle(\vec{B}; \vec{n}))^2 + (a \cos \angle(\vec{C}; \vec{n}))^2) = \frac{a^2}{\sin^2 \varphi}, \text{ так как сумма квадратов направляющих}$$

косинусов вектора \vec{n} в базисе $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ равна 1. Далее, $(\vec{n}\vec{A})(\vec{e}\vec{A}) + (\vec{n}\vec{B})(\vec{e}\vec{B}) + (\vec{n}\vec{C})(\vec{e}\vec{C}) = a^2(\vec{n}\vec{e})$. Следовательно,

$$OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{\sin^2 \varphi} - 2a^2 = a^2 + \frac{a^2}{\sin^2 \varphi}. \text{ Если } \Sigma \text{ — искомая сумма квадратов проекций ребер куба, то}$$

$$\Sigma = 4a^2 + \frac{4a^2}{\sin^2 \varphi}.$$

$$\text{Ответ: } 4a^2 + \frac{4a^2}{\sin^2 \varphi}.$$

7.261. Доказать теорему косинусов для трехгранного угла $SABC$ (рис. 7.175): $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \angle A$, где $\angle A$ — величина двугранного угла с ребром SA , α, β, γ — величины плоских углов BSC, ASC, ASB соответственно.

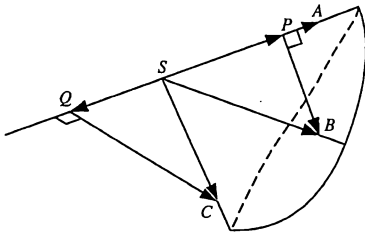


Рис. 7.175

Решение.

Пусть векторы $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}$ имеют длину 1, P и Q — проекции точек B и C на прямую SA . Тогда $\vec{SA}\vec{SB} = \cos \gamma$, $\vec{SA}\vec{SC} = \cos \beta$, $\vec{SB}\vec{SC} = \cos \alpha$; угол между векторами \vec{PB} и \vec{QC} равен $\angle A$, $\vec{SP} = \cos \alpha \cdot \vec{SA}$, $\vec{SQ} = \cos \beta \cdot \vec{SA}$ и (вне зависимости от того, острые, прямые или тупые углы β и γ) $\vec{QC} = \sin \beta$, $\vec{PB} = \sin \gamma$. Далее, $\vec{QC} = \vec{SC} - \vec{SQ}$, $\vec{PB} = \vec{SB} - \vec{SP}$, и в силу свойств скалярного произведения $\vec{QC}\vec{PB} = (\vec{SC} - \vec{SQ})(\vec{SB} - \vec{SP}) = \vec{SC}\vec{SB} - \vec{SC}\vec{SP} - \vec{SQ}\vec{SB} + \vec{SQ}\vec{SP}$.

Отсюда $\sin \beta \sin \gamma \cos \angle A = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma$, т.е. $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \angle A$. **QED.**

7.262. Вывести формулу расстояния $\rho(A, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ от точки $A(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α , заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

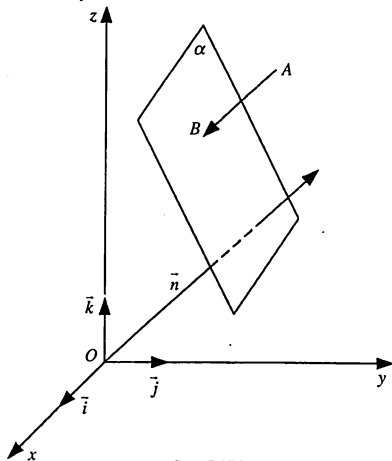


Рис. 7.176

Решение.

Опустим из точки A перпендикуляр на плоскость α , пусть B — точка пересечения перпендикуляра с плоскостью α , тогда AB — расстояние от A до α (рис. 7.176). Обозначим через $(x_1; y_1; z_1)$ координаты точки B , тогда $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$,

откуда $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$. Поскольку

вектор \overline{AB} перпендикулярен плоскости α , то он коллинеарен вектору \vec{n} с координатами $(a; b; c)$. Это означает, что найдется такое число p , что $\overline{AB} = p\vec{n}$. (1) Из этого равенства следует, что $x_1 - x_0 = pa$, $y_1 - y_0 = pb$, $z_1 - z_0 = pc$. (2) Таким образом,

$AB = \sqrt{p^2 a^2 + p^2 b^2 + p^2 c^2} = |p| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. (3) Осталось найти число $|p|$. Так как точка B принадлежит плоскости α , то $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Поскольку $x_1 = x_0 + pa$, $y_1 = y_0 + pb$, $z_1 = z_0 + pc$ (см. (2)), для p получаем уравнение $a(x_0 + pa) + b(y_0 + pb) + c(z_0 + pc) + d = 0$, из которого находим $|p|$:

$|p| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}$. Подставляя найденное значение $|p|$ в соотношение (3), получаем нужную формулу

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

7.263. Найти расстояние между плоскостями π_1 и π_2 , заданными соответственно уравнениями $x + 2y - 2z - 1 = 0$ и $3x + 6y - 6z + 15 = 0$.

Решение.

Разделив обе части второго уравнения на 3, видим, что плоскости π_1 и π_2 параллельные: $x + 2y - 2z - 1 = 0$ и $x + 2y - 2z + 5 = 0$. Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию любой точки одной плоскости до другой. Выберем на плоскости π_1 произвольную точку M . Приняв, например, что координаты точки $M(x_0; y_0; z_0)$ и $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, из уравнения $x + 2y - 2z - 1 = 0$ найдем $x_0 = 1$. По формуле расстояния точки до плоскости (см. 7.262) находим расстояние от точки

$$M(1; 1; 1) \text{ до плоскости } \pi_2: \rho(M, \pi_2) = \frac{|1 + 2 - 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Замечание. В общем случае расстояние между параллельными плоскостями $ax + by + cz + d_1 = 0$ и $ax + by + cz + d_2 = 0$

находится по формуле $\rho = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, вывод которой предоставляем читателю в качестве упражнения.

Ответ: 2.

7.264. Найти проекцию точки $M(1; -2; 4)$ на плоскость, проходящую через точки $A(-1; 0; -5)$, $B(-1; 10; 0)$, $C(-7; 0; 0)$.

Решение.

Пусть $N(x_0; y_0; z_0)$ — искомая проекция точки M . Найдем координаты векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} : $\overrightarrow{AB} = (0; 10; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (-6; 0; 5)$. Так как точка N является точкой пересечения перпендикуляра к данной плоскости, проходящей через точку M , то вектор \overrightarrow{MN} перпендикулярен к векторам \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} , т.е. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ и $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Координаты вектора $\overrightarrow{MN} = (x_0 - 1; y_0 + 2; z_0 - 4)$, поэтому $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \cdot (x_0 - 1) + 10 \cdot (y_0 + 2) + 5 \cdot (z_0 - 4) = (2y_0 + z_0) \cdot 5 = 0 \Rightarrow 2y_0 + z_0 = 0$. (1) Аналогично, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 \cdot (x_0 - 1) + 0 \cdot (y_0 + 2) + 5 \cdot (z_0 - 4) = 0 \Rightarrow 6x_0 - 5z_0 = 14$. (2) Далее, точка N принадлежит плоскости, проходящей через точки A, B, C . Следовательно, координаты точки N удовлетворяют уравнению этой плоскости, которое можно найти по аналогии с решением 7.208: $5x - 3y + 6z + 35 = 0$. Подставив в это уравнение координаты точки N , будем иметь: $5x_0 - 3y_0 + 6z_0 + 35 = 0$. (3) Решив систему уравнений (1) — (3), находим искомые координаты точки N : $x_0 = -4, y_0 = 1, z_0 = -2$.

Ответ: $(-4; 1; -2)$.

7.265. Вершины пирамиды находятся в точках $A_1(4; 6; 5)$, $A_2(6; 9; 4)$, $A_3(2; 10; 10)$, $A_4(7; 5; 9)$. Найти объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

Решение.

Искомый объем пирамиды будем вычислять по формуле $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, (1) где $S_{\text{осн}}$ — площадь грани $A_1A_2A_3$, H — длина высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 . Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади $\Delta A_1A_2A_3$, которую можно найти по формуле Герона, предварительно вычислив длины всех его сторон. Применив эту формулу, окончательно находим, что

$S_{\text{осн}} = S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \sqrt{621}$. (2) Осталось найти длину высоты H . Для этого воспользуемся тем, что длина высоты H будет равна расстоянию точки A_4 до плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_3 . Поэтому при помощи решения задачи 7.208 находим уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_3 : $19x - 8y + 14z - 98 = 0$. Затем, воспользовавшись формулой из 7.262, находим искомую высоту: $H = \rho(A_4, A_1A_2A_3) = \frac{121}{\sqrt{621}}$. (3) Подставив (2) и (3) в (1), окончательно

находим: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{621} \cdot \frac{121}{\sqrt{621}} = \frac{121}{6}$.

Ответ: $\frac{121}{6}$.

7.266. Найти угол между двумя плоскостями $11x - 8y - 7z + 6 = 0$ и $4x - 10y + z - 5 = 0$.

Решение.

Искомый угол φ будет равен углу между нормальными векторами этих плоскостей. Так как координаты нормального вектора первой плоскости равны $\vec{n}_1(11; -8; -7)$, а второй — $\vec{n}_2(4; -10; 1)$, то по известной формуле найдем косинус

искового угла: $\cos \angle(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \frac{11 \cdot 4 + (-8) \cdot (-10) + (-7) \cdot 1}{\sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2} \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда имеем $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

7.267. Известно, что в треугольной пирамиде все плоские углы при вершине — прямые. Найти длину ее высоты, опущенной из этой вершины, если длины ее боковых ребер равны a, b и c .

Решение.

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, как показано на рис. 7.177. Тогда точки A, B, C будут иметь координаты $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ соответственно. Точка O имеет координаты $(0; 0; 0)$. Используя решение задачи

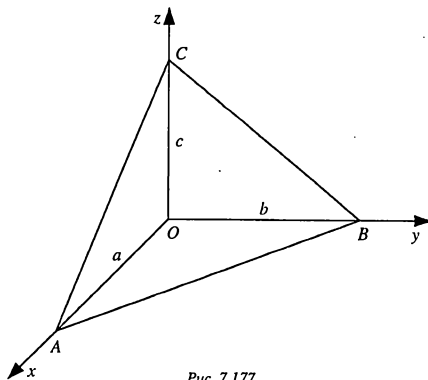


Рис. 7.177

7.208. найдем уравнение плоскости, проходящей через три точки A, B, C . Это уравнение имеет вид $bcsx + acy + abz - abc = 0$. Далее, используя формулу из 7.262, находим искомую длину высоты пирамиды:

$$H = \frac{|bc \cdot 0 + ac \cdot 0 + ab \cdot 0 - abc|}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}.$$

Ответ: $\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}.$

7.268. Даны три вектора $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 3; 2)$, $\vec{c} = (7; -3; 5)$. Доказать, что эти векторы являются линейно независимыми, и найти скалярное произведение векторов \vec{a} и $\vec{b} - 2\vec{c}$.

Решение.

Три вектора являются линейно независимыми, если их линейная комбинация обращается в нулевой вектор при условии, что все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, т.е. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — линейно независимые, если $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ и $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$. Предыдущее равенство относительно одноименных координат преобразуется в систему уравнений вида:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 7\gamma = 0, \\ 2\alpha + 3\beta - 3\gamma = 0, \\ 3\alpha + 2\beta + 5\gamma = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим, что $\alpha = \beta = \gamma = 0$ — единственное решение. Значит, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ —

линейно независимы.

Найдем координаты вектора $\vec{b} - 2\vec{c}$: $\vec{b} - 2\vec{c} = (-1 - 2 \cdot 7; 3 - 2 \cdot (-3); 2 - 2 \cdot 5) = (-15; 9; -8)$. Тогда $\vec{a} \cdot (\vec{b} - 2\vec{c}) = 1 \cdot (-15) + 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-8) = -15 + 18 - 24 = -21$.

Ответ: -21 .

7.269. Найти высоту параллелепипеда h , построенного на векторах $\vec{a} = (1; 3; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; 3)$, $\vec{c} = (3; 1; 2)$.

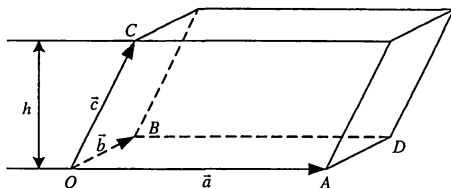


Рис. 7.178

Решение.

Пусть точка O имеет координаты $(0; 0; 0)$ (рис. 7.178). Тогда точки A, B, C имеют координаты $(1; 3; 1), (2; 1; 3), (3; 1; 2)$ соответственно (так как $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$). Теперь задача сводится к нахождению расстояния точки C до плоскости, проходящей через точки O, A и B . По аналогии с решением 7.208 находим уравнение плоскости, проходящей через точки $O(0; 0; 0), A(1; 3; 1), B(2; 1; 3)$. Это уравнение имеет вид: $8x - y - 5z = 0$. Далее, по формуле из задачи 7.262 находим

$$\text{искомую высоту: } h = \frac{|8 \cdot 3 - 1 \cdot 1 - 5 \cdot 2|}{\sqrt{8^2 + (-1)^2 + (-5)^2}} = \frac{13}{\sqrt{90}} = \frac{13}{3\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{13}{3\sqrt{10}}.$

7.270. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1; 3; 1), \vec{b} = (2; 1; 3), \vec{c} = (3; 1; 2)$.

Решение.

Для решения этой задачи воспользуемся рисунком к решению задачи 7.269. Искомый объем параллелепипеда будем вычислять по формуле

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h, \quad (1)$$

где $S_{\text{осн}} = S_{\text{OADB}} = 2 \cdot S_{\Delta OAB}$ (2) и $h = \frac{13}{3\sqrt{10}}$ (см. 7.269). Далее, координаты точек O, A, B равны $O(0; 0; 0), A(1; 3; 1), B(2; 1; 3)$;

следовательно, можно найти длины сторон ΔABC , а затем и вычислить площадь этого треугольника по формуле Герона:

$$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{11}, \quad OB = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{14}, \quad AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{6};$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \quad (3) \text{ Подставляя (3) в (2), находим, что } S_{\text{осн}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} = 3\sqrt{10}. \text{ Окончательно объем параллелепи-}$$

$$\text{педа } V = 3\sqrt{10} \cdot \frac{13}{3\sqrt{10}} = 13.$$

Ответ: 13.

Справочное издание

**ЕРМОЛИЦКИЙ
АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ
БОЛЬШОЙ СПРАВОЧНИК
ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

Ответственный за выпуск *Ю. Г. Хацкевич*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 21.01.03.
Формат 60×90¹/₄. Печать офсетная. Бумага типографская.
Усл. печ. л. 110,0. Тираж 5000 экз. Заказ 144.

ООО «Харвест». Лицензия ЛВ № 32 от
27.08.02. РБ, 220013, Минск, ул. Кульман,
д. 1, корп. 3, эт. 4, к. 42.

Республиканское унитарное предприятие
«Полиграфический комбинат имени Я. Коласа».
220600, Минск, ул. Красная, 23.

БОЛЬШОЙ СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Предлагаемый справочник – универсальное пособие к вступительным экзаменам по математике в высшие учебные заведения. Теоретические разделы, включенные в книгу, охватывают программу для поступающих в вузы, а также содержат основные сведения по элементарной математике как для учащихся общеобразовательных школ, так и для обучающихся в спецклассах, гимназиях, колледжах. Каждый теоретический раздел дополнен примерами решения задач, которые располагаются по принципу «от простого к сложному».

Для школьников, абитуриентов, студентов младших курсов, а также преподавателей.

ISBN 985-13-1234-7



9 789851 312340